Λύσεις Ασκήσεων

του

Νικόλας Παπαμιχαήλ

Εισαγωγή
στη
Θεωρία Συναρτήσεων Spline
μιας Μεταβλητής

Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών, Πάτρα 2004

Νικόλας Παπαμιχαήλ
Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής
Πανεπιστήμιο Κύπρου
Δεκέμβριος 2004

Σημειώσεις

• Λύσεις δεν δίνονται σε περιπτώσεις που αυτές είναι άμεσες συνέπειες αποτελεσμάτων που έχουν αποδειχτεί στο αντίστοιχο κεφάλαιο του βιβλίου.

• Οι αναφορές σε ορισμούς, θεωρήματα, εξισώσεις, κ.λ.π., γίνονται χρησιμοποιώντας τις αριθμήσεις του βιβλίου. Επίσης, η αρίθμηση εξισώσεων στις λύσεις γίνεται (σε κάθε κεφάλαιο) συνεχίζοντας την αντίστοιχη αρίθμηση του βιβλίου.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1 **Προκαταρκτικά** **7**

2 **Συναρτήσεις spline** **15**

3 **Παρεμβολικές κυβικές συναρτήσεις spline** **17**

4 **Θέματα κυβικών συναρτήσεων spline** **27**

5 **Πεμπτοβάθμιες συναρτήσεις spline** **41**

6 **Συναρτήσεις B-spline** **45**

7 **Η επίλυση προβλημάτων συνοριακών τιμών** **53**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Προκαταρκτικά

1.1

$$
\begin{aligned}
&\ln \pi_{n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} \ln(x - x_j),\\
&\Rightarrow \frac{\pi_{n+1}^{(1)}(x)}{\pi_{n+1}(x)} = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{x - x_j},\\
&\Rightarrow \pi_{n+1}^{(1)}(x) = \pi_{n+1}(x) \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{x - x_j},\\
&\Rightarrow \pi_{n+1}^{(1)}(x_i) = (x_i - x_0)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n).
\end{aligned}
$$

Συνεπώς

$$
l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} [(x - x_j)/(x_i - x_j)] = \frac{\pi_{n+1}(x)}{\pi_{n+1}^{(1)}(x_i)(x - x_i)}.
$$

Η πολυωνυμική παρεμβολή βαθμού n είναι ακριβής για πολυώνυμα βαθμού $\leq n \Rightarrow$

$$
x^k = \sum_{i=1}^{n} l_i(x) x_i^k, \quad k \leq n.
$$

Ιδιαίτερα, με $k = 0$,

$$
1 = \sum_{i=1}^{n} l_i(x).
$$

1.2 Έστω $\pi_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$. Τότε το σφάλμα παρεμβολής είναι

$$
y(x) - p_n(x) = \frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\pi_{n+1}(x),
$$

για κάποιο $\xi = \xi(x) \in [x_0, x_n]$. $\Rightarrow$

$$||y - p_n|| \le \frac{1}{(n+1)!}||\pi_{n+1}|| \cdot ||y^{(n+1)}||.$$

Τα ζητούμενα αποτελέσματα προκύπτουν επειδή

$$||\pi_2|| = \frac{h^2}{4} \ \text{ και } \ ||\pi_4|| = h^4.$$

Υποδείξεις:

- Ο μετασχηματισμός $x \to hx + x_0$ οδηγεί στη σχέση

  $$\pi_{n+1} = h^{n+1}\widehat{\pi}_{n+1}, \quad \text{όπου } \ \widehat{\pi}_{n+1}(x) = x(x-1)\cdots(x-n).$$

  Συνεπώς $||\pi_{n+1}|| = h^{n+1}\max_{x\in[0,n]}|\widehat{\pi}_{n+1}|$. $\Rightarrow$ Για την απλοποίηση των πράξεων, προσδιορίστε το $||\pi_{n+1}||$ απο την πιο πάνω σχέση, αφού πρώτα βρείτε το $\max_{x\in[0,n]}|\widehat{\pi}_{n+1}|$.

- Για το δεύτερο μέρος της Άσκησης: Λόγω συμμετρίας το σημείο $x = 3/2$ είναι σημείο καμπής του $\widehat{\pi}_4$.

1.3 Έστω $p_{n+1} \in \mathbb{P}_{n+1}$ το πολυώνυμο παρεμβολής της y στα $n+2$ σημεία x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, και $x \ne x_i$. Δηλαδή το p_{n+1} πληροί τις συνθήκες

$$p_{n+1}(x_i) = y(x_i), \ i = 0, 1, \ldots, n, \ \text{ και } \ p_{n+1}(x) = y(x).$$

$\Rightarrow$ Η αναπαράσταση Newton του p_{n+1} είναι

$$p_{n+1}(t) = p_n(x) + y[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]\prod_{i=0}^{n}(t - x_i)$$
$$\Rightarrow y(x) - p_n(x) = y[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]\prod_{i=0}^{n}(x - x_i).$$

1.4 Έστω p_n το πολυώνυμο παρεμβολής της y στα σημεία x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, και έστω $e_n := y - p_n$. Τότε $e_n \in C^n[a,b]$ και $e_n(x_i) = 0$, $i = 0, 1, \ldots, n$. $\Rightarrow$ Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Rolle n φορές:

$$e_n^{(n)}(\xi) = 0, \quad \text{για κάποιο } \xi \in [a,b], \quad \Rightarrow \quad y^{(n)}(\xi) = p_n^{(n)}(\xi).$$

Όμως

$$\begin{aligned} p_n(x) \quad &= \quad y(x_0) + y[x_0,x_1](x-x_0) + y[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) \\ &\qquad + \cdots + y[x_0,x_1,\ldots,x_n](x-x_0)\cdots(x-x_{n-1}). \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$p_n^{(n)}(x) = n! \times y[x_0, x_1, \ldots, x_n] \ \Rightarrow \ y[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \frac{1}{n!}y^{(n)}(\xi).$$

1.5 Η θεμελιώδη αναπαράσταση του H_3 είναι (βλ. (1.6)-(1.7)):

$$H_3(x) = a(x)y_0 + b(x)y_1 + c(x)y_0^{(1)} + d(x)y_1^{(1)},$$

όπου

$$
\begin{aligned}
a(x) &= \frac{1}{h^2}(x_1 - x)^2[2(x - x_0) + h] \\
b(x) &= \frac{1}{h^2}(x - x_0)^2[2(x_1 - x) + h] \\
c(x) &= \frac{1}{h^2}(x_1 - x)^2(x - x_0) \\
d(x) &= \frac{1}{h}(x - x_0)^2(x - x_1).
\end{aligned}
$$

Επίσης, αν $y \in C^4[x_0, x_1]$, τότε (από το Θεώρημα 1.4) το σφάλμα παρεμβολής είναι

$$
y(x) - H_3(x) = \frac{y^{(4)}(\xi)}{4!}\{\pi_2(x)\}^2, \quad \text{όπου} \;\; \pi_2(x) = (x - x_0)(x - x_1),
$$

για κάποιο $\xi = \xi(x) \in [x_0, x_1]$. $\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
&||y - H_3|| \le \frac{1}{24}||y^{(4)}|| \cdot ||\pi_2^2||, \\
&\Rightarrow ||y - H_3|| \le \frac{h^4}{384}||y^{(4)}||,
\end{aligned}
$$

επειδή $||\pi_2|| = h^2/4$ και συνεπώς $||\pi_2^2|| = h^4/16$.

1.6 Από την Άσκηση 1.5 έχουμε ότι αν $y \in C^4[x_0, x_1]$, τότε $||y - H_3|| \le h^4||y^{(4)}||/384$.

- $x_0 = 1$ και $x_1 = 2 \Rightarrow h = 1$. Επίσης $y(x) = 1/x \Rightarrow y^{(4)}(x) = 24/x^4 \Rightarrow ||y^{(4)}|| \le 24 \Rightarrow ||y - H_3|| \le 1/16$.
- $x_0 = 0$ και $x_1 = 0.1 \Rightarrow h = 0.1$. Επίσης $y(x) = \sin x \Rightarrow y^{(4)}(x) = \sin x \Rightarrow ||y^{(4)}|| = \sin 0.1 \Rightarrow ||y - H_3|| \le (0.1)^4 \sin 0.1/384 \le 2.6 \times 10^{-8}$.

1.7

$$
\mathcal{H}_3^{(2)}(x) = \frac{1}{h}\{(x_1 - x)y_0^{(2)} + (x - x_0)y_1^{(2)}\}.
$$

Άρα

$$
\mathcal{H}_3^{(1)}(x) = \frac{1}{2h}\{-(x_1 - x)^2 y_0^{(2)} + (x - x_0)^2 y_1^{(2)}\} + A,
$$

και

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}_3(x) &= \frac{1}{6h}\{(x_1 - x)^3 y_0^{(2)} + (x - x_0)^3 y_1^{(2)}\} + Ax + B \\
&= \frac{1}{6h}\{(x_1 - x)^3 y_0^{(2)} + (x - x_0)^3 y_1^{(2)}\} + C(x_1 - x) + D(x - x_0),
\end{aligned}
$$

όπου εφαρμόζοντας τις συνθήκες $\mathcal{H}_3(x_0) = y_0$ και $\mathcal{H}_3(x_1) = y_1$,

$$
C = \frac{1}{h}[y_0 - \frac{h^2}{6}y_0^{(2)}] \quad \text{και} \quad D = \frac{1}{h}[y_1 - \frac{h^2}{6}y_1^{(2)}].
$$

1.8 Έστω p_2 το πολυώνυμο παρεμβολής της y στα σημεία $x_0, x_0+\epsilon$ και x_1 και $\widehat{p}_2$ το πολυώνυμο που προκυπτεί από το p_2 καθώς $\epsilon \to 0$. Τότε, στη μορφή Newton,

$$p_2(x) = y(x_0) + y[x_0, x_0+\epsilon](x-x_0) + y[x_0, x_0+\epsilon, x_1](x-x_0)(x-x_0-\epsilon).$$

Άρα

$$\begin{aligned}\widehat{p}_2(x) &= \lim_{\epsilon\to 0} p_2(x)\\ &= y(x_0) + y[x_0,x_0](x-x_0) + y[x_0,x_0,x_1](x-x_0)^2,\end{aligned}$$

όπου

$$y[x_0,x_0] = y^{(1)}(x_0) \quad \text{και} \quad y[x_0,x_0,x_1] = \frac{1}{h}\{\frac{1}{h}(y(x_1)-y(x_0)) - y^{(1)}(x_0)\}.$$

Προφανώς, $\widehat{p}_2(x_0) = y(x_0)$, $\widehat{p}_2^{(1)}(x_0) = y^{(1)}(x_o)$ και $\widehat{p}_2(x_1) = y(x_1) \Rightarrow$ Το πολυώνυμο $\widehat{p}_2$ είναι το ζητούμενο δευτεροβάθμιο πολυώνυμο Hermite H_2.

Από το Θεώρημα 1.2,

$$e_2(x) := y(x) - p_2(x) = \frac{1}{3!}(x-x_0)(x-x_0-\epsilon)(x-x_1)y^{(3)}(\eta),$$

για κάποιο η στο διάστημα που ορίζεται από τα σημεία $x_0, x_0+\epsilon$ και x_1. $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}y(x) - H_2(x) &= \lim_{\epsilon\to 0} e_2(x)\\ &= \frac{1}{3!}(x-x_0)^2(x-x_1)y^{(3)}(\xi),\end{aligned}$$

όπου $\xi \in [x_0, x_1]$.

1.9 Τα ζητούμενα αποτελέσματα προκύπτουν εφαρμόζοντας, αντίστοιχα, τα Θεωρήματα 1.8 και 1.7 με $n=2$, $m_0 = m_1 = 1$ και $m_2 = 0$.

1.10 (i)

$$\begin{aligned}y[x_0,x_0,x_0,x_1] &= \frac{1}{h}\{y[x_0,x_0,x_1] - y[x_0,x_0,x_0]\}\\ &= \frac{1}{h}\{\frac{1}{h}[(y_1-y_0) - y_0^{(1)}] - \frac{1}{2}y_0^{(2)}\}\\ &= \frac{1}{2h^3}\{2(y_1-y_0) - 2hy_0^{(1)} - h^2y_0^{(2)}\}.\end{aligned}$$

Επίσης

$$\begin{aligned}y[x_0,x_0,x_0,x_1,x_1] &= \frac{1}{h}\{y[x_0,x_0,x_1,x_1] - y[x_0,x_0,x_0,x_1]\}\\ &= \frac{1}{h^4}\{-2(y_1-y_0) + h(y_1^{(1)} + y_0^{(1)})\}\\ &\quad - \frac{1}{2h^3}\{2(y_1-y_0) - 2hy_0^{(1)} - h^2y_0^{(2)}\}\\ &= \frac{1}{2h^4}[-6(y_1-y_0) + 2h(y_1^{(1)} + 2y_0^{(1)}) + h^2y_0^{(2)}],\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
y[x_0,x_0,x_0,x_1,x_1,x_1] &= \frac{1}{h}\{y[x_0,x_0,x_1,x_1,x_1]-y[x_0,x_0,x_0,x_1,x_1]\}\\
&= \frac{1}{h}\{\frac{1}{h}(y[x_0,x_1,x_1,x_1]-y[x_0,x_0,x_1,x_1])\\
&\qquad\qquad -y[x_0,x_0,x_0,x_1,x_1]\}\\
&= \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\\
&= \frac{1}{2h^5}[12(y_1-y_0)\\
&\qquad -6h(y_1^{(1)}+y_0^{(1)})+h^2(y_1^{(2)}-y_0^{(2)})].
\end{aligned}$$

(ii) Από το Θεώρημα 1.8 με $n=1$ και $m_0=m_1=2$:

$$\begin{aligned}
H_5(x) &= y_0+y[x_0,x_0](x-x_0)+y[x_0,x_0,x_0](x-x_0)^2\\
&\quad +y[x_0,x_0,x_0,x_1](x-x_0)^3\\
&\quad +y[x_0,x_0,x_0,x_1,x_1](x-x_0)^3(x-x_1)\\
&\quad +y[x_0,x_0,x_0,x_1,x_1,x_1](x-x_0)^3(x-x_1)^2.
\end{aligned}$$

(iii) Από το Θεώρημα 1.7 με $n=1$ και $m_0=m_1=2$ (δηλ. με $N=5$),

$$y(x)-H_5(x)=\frac{1}{6!}y^{(6)}(\xi)\pi_2^3(x),\quad \xi\in[x_0,x_1],$$

όπου $\pi_2(x)=(x-x_0)(x-x_1)$. $\Rightarrow$

$$||y-H_5||\le\frac{1}{720}||y^{(6)}||||\pi_2^3||.$$

Το αποτέλεσμα προκύπτει επειδή $||\pi_2||=h^2/4$ και συνεπώς $||\pi_2^3||=h^6/64$.

1.11 Χρησιμοποιώντας τη θεμελιώδη μορφή (Άσκ. 1.5) ή τη Newton μορφή (Παρ. 1.3) του H_3,

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_1}H_3(x)dx &= \int_{x_0}^{x_1}[a(x)y_0+b(x)y_1+c(x)y_0^{(1)}+d(x)y_1^{(1)}]dx\\
&= \int_{x_0}^{x_1}\{y_0+y[x_0,x_0](x-x_0)+y[x_0,x_0,x_1](x-x_0)^2\\
&\qquad +y[x_0,x_0,x_1,x_1](x-x_0)^2(x-x_1)\}dx\\
&= \frac{h}{2}(y_0+y_1)+\frac{h^2}{12}(y_0^{(1)}-y_1^{(1)}).
\end{aligned}$$

Έστω

$$E(y)=\int_{x_0}^{x_1}y(x)dx-[\frac{h}{2}(y_0+y_1)+\frac{h^2}{12}(y_0^{(1)}-y_1^{(1)})].$$

Τότε (βλ. Άσκ. 1.5)

$$\begin{aligned}
E(y) &= \int_{x_0}^{x_1}[y(x)-H_3(x)]dx\\
&= \frac{1}{4!}\int_{x_0}^{x_1}(x-x_0)^2(x-x_1)^2y^{(4)}(\eta)dx,
\end{aligned}$$

όπου $\eta = \eta(x) \in [x_0, x_1]$. Άρα το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής $\Rightarrow$

$$E(y) = \frac{1}{4!} y^{(4)}(\xi) \int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)^2 (x - x_1)^2 dx = \frac{1}{720} h^5 y^{(4)}(\xi),$$

για κάποιο $\xi \in [x_0, x_1]$.

1.12 Έστω

$$L(y) := -y_0^{(4)} + \alpha y_1^{(4)} + (3 - 2\alpha) y_2^{(4)} - (2 - \alpha) y_3^{(4)}.$$

Τότε, αναπτύσσοντας κατά Taylor στο σημείο x_1,

$$L(y) = h^2 \{ -\frac{1}{2} y^{(6)}(\xi_1) + \frac{1}{2}(3 - 2\alpha) y^{(6)}(\xi_2) - 2(2 - \alpha) y^{(6)}(\xi_3) \},$$

όπου $\xi_i \in [x_0, x_3]$, $i = 1, 2, 3$. $\Rightarrow L(p) = 0$, $\forall p \in \mathbb{P}_5$. $\Rightarrow$ Από το Θεώρημα Peano,

$$L(y) = \int_{x_0}^{x_3} K(t) y^{(6)}(t) dt,$$

όπου

$$\begin{aligned} K(t) &= \frac{1}{5!} L\{(x - t)_+^5\} \\ &= -(x_0 - t)_+ + \alpha(x_1 - t)_+ + (3 - 2\alpha)(x_2 - t)_+ - (2 - \alpha)(x_3 - t)_+. \end{aligned}$$

Ως προς το πρόσημο του πυρήνα K:

Για $t \in [x_2, x_3]$,

$$K(t) = -(2 - \alpha)(x_3 - t) \leq 0, \quad \text{αν} \quad \alpha \leq 2.$$

Για $t \in [x_1, x_2]$,

$$K(t) = (3 - 2\alpha)(x_2 - t) - (2 - \alpha)(x_3 - t),$$

ή, με $t = x_2 - \mu h$, $0 \leq \mu \leq 1$,

$$\begin{aligned} K(t) = K(x_2 - \mu h) &= (3 - 2\alpha)\mu h - (2 - \alpha)(1 + \mu) h \\ &= (\alpha - 2)(1 - \mu) \leq 0, \quad \text{αν } \alpha \leq 2. \end{aligned}$$

Για $t \in [x_0, x_1]$,

$$K(t) = \alpha(x_1 - t) + (3 - 2\alpha)(x_2 - t) - (2 - \alpha)(x_3 - t),$$

ή, με $t = x_1 - \mu h$, $0 \leq \mu \leq 1$,

$$\begin{aligned} K(t) = K(x_1 - \mu h) &= \alpha \mu h + (3 - 2\alpha)(1 + \mu) h - (2 - \alpha)(2 + \mu) h \\ &= \mu - 1 \leq 0. \end{aligned}$$

$\Rightarrow K(t) \leq 0$, $\forall t \in [x_0, x_3]$. $\Rightarrow$ Εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής,

$$\begin{aligned} L(y) &= \int_{x_0}^{x_3} K(t) y^{(6)}(t) dt = y^{(6)}(\xi) \int_{x_0}^{x_3} K(t) dt, \\ &= \frac{1}{2} [-\alpha(x_1 - t)_+^2 - (3 - 2\alpha)(x_1 - t)_+^2 + (2 - \alpha)(x_3 - t)_+^2]_{x_0}^{x_3} \\ &= (\alpha - 3) h^2 y^{(6)}(\xi), \end{aligned}$$

όπου $\xi \in [x_0, x_3]$.

1.13 Η αναπαράσταση (1.1)-(1.2) του p_2 είναι

$$\begin{aligned} p_2(x) &= \frac{1}{2h^2}\{(x-x_1)(x-x_2)y(x_0) \\ &\quad -2(x-x_0)(x-x_2)y(x_1)+(x-x_0)(x-x_1)y(x_2)\}. \end{aligned}$$

Επίσης, από το Θεώρημα 1.2,

$$y(x) = p_2(x) + e_2(x),$$

όπου

$$e_2(x) = \frac{1}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)y^{(3)}(\xi), \quad \text{με} \;\; \xi = \xi(x) \in [x_0, x_2].$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_2} y(x)dx &= \int_{x_0}^{x_2} p_2(x)dx + \int_{x_0}^{x_2} e_2(x)dx \\ &= \frac{h}{3}\{y(x_0)+4y(x_1)+y(x_2)\} + E(y), \end{aligned}$$

όπου

$$E(y) = \int_{x_0}^{x_2} e_2(x)dx = \frac{1}{3!}\int_{x_0}^{x_2}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)y^{(3)}(\xi)dx.$$

Συνεπώς $E(1) = E(x) = E(x^2) = 0$. Επίσης, λόγω της συμμετρίας του πολυωνύμου $(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$ ως προς τον άξονα του x,

$$E(x^3) = \int_{x_0}^{x_2}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)dx = 0.$$

$\Rightarrow E(p) = 0, \forall p \in \mathbb{P}_3$. $\Rightarrow$ Από το Θεώρημα Peano,

$$E(y) = \int_{x_0}^{x_2} K(t)y^{(4)}(t)dt,$$

όπου, επειδή

$$E(y) = \int_{x_0}^{x_2} y(x)dx - \frac{h}{3}\{y(x_0)+4y(x_1)+y(x_2)\},$$

ο πυρήνας K είναι

$$\begin{aligned} K(t) &= \frac{1}{6}E\{(x-t)_+^3\} \\ &= \frac{1}{24}\{(x_2-t)_+^4-(x_0-t)_+^4\} - \frac{h}{18}\{(x_0-t)_+^3+4(x_1-t)_+^3+(x_2-t)_+^3\} \\ &= \frac{1}{72}\{3(x_2-t)_+^4-4h(x_2-t)_+^3-16h(x_1-t)_+^3\}. \end{aligned}$$

Ως προς το πρόσημο του K:

Για $t \in [x_1, x_2]$,

$$K(t) = \frac{1}{72}\{3(x_2-t)_+^4-4h(x_2-t)_+^3\},$$

ή, με $t = x_1 + \mu h$, $0 \le \mu \le 1$,

$$\begin{aligned} K(t) = K(x_1 + \mu h) &= \frac{h^4}{72}\{3(1-\mu)^4 - 4(1-\mu)^3\} \\ &= -\frac{h^4}{72}(1-\mu)^3(3\mu+1) \le 0. \end{aligned}$$

Για $t \in [x_0, x_1]$

$$K(t) = \frac{1}{72}\{3(x_2 - t)_+^4 - 4h(x_2 - t)_+^3 - 16h(x_1 - t)_+^3\},$$

ή, με $t = x_1 - \mu h$, $0 \le \mu \le 1$,

$$\begin{aligned} K(t) = K(x_1 - \mu h) &= \frac{h^4}{72}\{3(1+\mu)^4 - 4(1+\mu)^3 - 16\mu^3\} \\ &= \frac{h^4}{72}(3\mu+1)(\mu-1)^3 \le 0. \end{aligned}$$

$\Rightarrow K(t) \le 0$, $\forall t \in [x_0, x_2]$. $\Rightarrow$ Εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής,

$$\begin{aligned} E(y) &= \int_{x_0}^{x_2} K(t)y^{(4)}(t)dt = y^{(4)}(\eta)\int_{x_0}^{x_2} K(t)dt \\ &= \frac{1}{72}y^{(4)}(\eta)[-\frac{3}{5}(x_2 - t)_+^5 + h(x_2 - t)_+^4 + 4h(x_1 - t)_+^4]_{x_0}^{x_2} \\ &= -\frac{1}{90}h^5 y^{(4)}(\eta), \end{aligned}$$

όπου $\eta \in [x_0, x_2]$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Συναρτήσεις spline

2.1 Σε κάθε ένα από τα διαστήματα $[-1,1)$ και $[1,2)$ η s είναι ένα κυβικό πολυώνυμο, ενώ σε κάθε ένα από τα δύο ακραία διαστήματα $(-\infty,-1)$ και $[2,\infty)$ η s είναι ένα γραμμικό πολυώνυμο. Επίσης

$$\begin{aligned}
&s(-1\mp) = -1,\ s^{(1)}(-1\mp) = 2,\ s^{(2)}(-1\mp) = 0,\\
&s(1\mp) = 11,\ s^{(1)}(1\mp) = 14,\ s^{(2)}(1\mp) = 12,\\
&s(2\mp) = 29,\ s^{(1)}(2\mp) = 20,\ s^{(2)}(2\mp) = 0.
\end{aligned}$$

Δηλαδή $s \in C^2(-\infty,\infty)$. $\Rightarrow$ Η s είναι μια φυσική κυβική συνάρτηση spline με κόμβους στα σημεία -1, 1 και 2.

2.2 Έστω

$$s(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + c_1(x-1)_+^2 + c_2(x-2)_+^2.$$

Τότε

$$s^{(1)}(x) = b_1 + 2b_2 x + 2c_1(x-1)_+ + 2c_2(x-2)_+.$$

$\Rightarrow$ Οι συνθήκες παρεμβολής δίνουν τις εξισώσεις

$$\left.\begin{array}{lcr}
b_0 & = & -1,\\
b_0 + b_1 + b_2 & = & 0,\\
b_0 + 2b_1 + 4b_2 + c_1 & = & 5,\\
b_0 + 3b_1 + 9b_2 + 4c_1 + c_2 & = & 12,
\end{array}\right\} \qquad (2.23)$$

ενώ η συνθήκη άκρων $s^{(1)}(0) = 0$ δίνει ότι $b_1 = 0$. $\Rightarrow$ Η λύση του συστήματος (2.23) είναι $b_0 = -1$, $b_1 = 0$, $b_2 = 1$, $c_1 = 2$ και $c_2 = -4$. $\Rightarrow$

$$s(x) = -1 + x^2 + 2(x-1)_+^2 - 4(x-2)_+^2.$$

2.3 Έστω

$$s(x) = a_o + a_1 x + c_0(x+1)_+^3 + c_1(x-1)_+^3 + c_2(x-2)_+^3,$$

όπου σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2,

$$\left.\begin{array}{rcl} c_0 + c_1 + c_2 & = & 0, \\ -c_0 + c_1 + 2c_2 & = & 0. \end{array}\right\} \tag{2.24}$$

Επίσης, οι συνθήκες παρεμβολής δίνουν τις εξισώσεις

$$\left.\begin{array}{lcr} a_0 - a_1 & = & -1, \\ a_0 + a_1 + 8c_0 & = & 11, \\ a_0 + 2a_1 + 27c_0 + c_1 & = & 29. \end{array}\right\} \tag{2.25}$$

Η λύση του γραμμικού συστήματος (2.24)-(2.25) είναι $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $c_0 = 1$, $c_1 = -3$ και $c_2 = 2$. $\Rightarrow$

$$s(x) = 1 + 2x + (x+1)_+^3 - 3(x-1)_+^3 + 2(x-2)_+^3.$$

2.6 $e := y - s \Rightarrow e(x_i) = 0$, $i = 0, 1, \ldots, k$, και $e^{(j)}(a) = e^{(j)}(b) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, m-1$. $\Rightarrow$ Το Λήμμα 2.1 με $\phi = e$ δίνει

$$\int_a^b s^{(m)}(x) e^{(m)}(x) dx = 0.$$

2.7 $s \in S_{2m-1}^{\pi}(\Delta_k) \Rightarrow s^{(j)}(0) = s^{(j)}(1)$, $j = 0, 1, \ldots, 2m-2$. Ιδιαίτερα,

$$s^{(2m-2)}(0) = s^{(2m-2)}(1), \tag{2.26}$$

όπου

$$s^{(2m-2)}(x) = (2m-2)! b_{2m-2} + (2m-1)! b_{2m-1} x + (2m-1)! \sum_{i=1}^{k-1} c_i (x - \frac{i}{k})_+$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} s^{(2m-2)}(0) &= (2m-2)! b_{2m-2}, \\ s^{(2m-2)}(1) &= (2m-2)! b_{2m-2} + (2m-1)! b_{2m-1} + (2m-1)! \sum_{i=1}^{k-1} c_i (1 - \frac{i}{k}). \end{aligned}$$

Άρα, η (2.26) δίνει

$$\begin{aligned} & b_{2m-1} + \sum_{i=1}^{k-1} c_i (1 - \frac{i}{k}) = 0, \Rightarrow \\ & \sum_{i=1}^{k-1} (k-i) c_i = -k b_{2m-1}. \end{aligned}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Παρεμβολικές κυβικές συναρτήσεις spline

3.1 Με τους συνήθεις συμβολισμούς: $x_0 = -1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, και $y_0 = -2$, $y_1 = -4$, $y_2 = -12$. Συνεπώς, $h_1 = 2$, $h_2 = 1$ και (βλ. (3.7) και (3.18))

$$\gamma_1 = 1/3, \quad \delta_1 = 2/3 \ \text{ και } \ d_1 = -17.$$

$\Rightarrow$ Η (3.17) δίνει την εξίσωση συνέχειας

$$\frac{1}{3}m_0 + 2m_1 + \frac{2}{3}m_2 = -17,$$

$\Rightarrow$ Επειδή οι συνθήκες άκρων είναι $m_0 = 5$ και $m_2 = -7$, η πιο πάνω εξίσωση δίνει ότι $m_1 = -7$. $\Rightarrow$ Από τις (3.9) και (3.10), με $i = 1$ και $i = 2$:

$$s(x) = -x - 3x^2, \quad x \in [-1, 1),$$

και

$$s(x) = -2 + 5x - 9x^2 + 2x^3, \quad x \in [1, 2].$$

(**Παρατήρηση:** Η s είναι η κυβική συνάρτηση spline του Παραδείγματος 2.5.)

3.2 $x_0 = -1$, $x_1 = 1$ και $x_2 = 2 \Rightarrow$ Όπως και στην Άσκηση 3.1,

$$h_1 = 2, \quad h_2 = 1 \ \text{ και } \ \gamma_1 = 1/3, \quad \delta_1 = 2/3.$$

Επίσης, $y_0 = -1$, $y_1 = 11$ και $y_2 = 29$. $\Rightarrow$ Από την (3.7), $c_1 = 24$. $\Rightarrow$ Η (3.6) δίνει την εξίσωση συνέχειας

$$\frac{2}{3}M_0 + 2M_1 + \frac{1}{3}M_2 = 24.$$

Επειδή η s είναι φυσική συνάρτηση spline, $M_0 = M_2 = 0$. $\Rightarrow M_1 = 12$. $\Rightarrow$ Από την (3.2) με $i = 1$ και $i = 2$:

$$s(x) = 2 + 5x + 3x^2 + x^3, \quad x \in [-1, 1),$$

και

$$s(x) = 5 - 4x + 12x^2 - 2x^3, \quad x \in [1, 2).$$

3.3 Για $x \in [x_{i-1}, x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$,

$$s^{(2)}(x) = \frac{1}{h}\{M_{i-1}(x_i - x) + M_i(x - x_{i-1})\} \quad \Rightarrow \quad s^{(3)}(x) = \frac{1}{h}\{M_i - M_{i-1}\},$$

και για $x \in [x_i, x_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$,

$$s^{(2)}(x) = \frac{1}{h}\{M_i(x_{i+1} - x) + M_{i+1}(x - x_i)\} \quad \Rightarrow \quad s^{(3)}(x) = \frac{1}{h}\{M_{i+1} - M_i\}.$$

$$\Rightarrow \quad s^{(3)}(x_i+) - s^{(3)}(x_i-) = \frac{1}{h}\{M_{i-1} - 2M_i + M_{i+1}\}, \quad i = 1, 2, \ldots, k-1.$$

3.4 Χρησιμοποιώντας την αναπράσταση (3.9) της s,

$$\begin{aligned}
\int_{x_{i-1}}^{x_i} s(x)dx &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \{y_{i-1} + s[x_{i-1}, x_{i-1}](x - x_{i-1}) \\
&\qquad + s[x_{i-1}, x_{i-1}, x_i](x - x_{i-1})^2 \\
&\qquad + s[x_{i-1}, x_{i-1}, x_i, x_i](x - x_{i-1})^2(x - x_i)\}dx \\
&= \frac{h}{2}(y_{i-1} + y_i) + \frac{h^2}{12}(m_{i-1} - m_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n.
\end{aligned}$$

Για $i = 1, 2, \ldots, n$, η (3.4) $\Rightarrow$

$$m_i = \frac{h}{6}M_{i-1} + \frac{h}{3}M_i + \frac{1}{h}(y_i - y_{i-1}),$$

και η (3.5) $\Rightarrow$

$$m_{i-1} = -\frac{h}{3}M_{i-1} - \frac{h}{6}M_i + \frac{1}{h}(y_i - y_{i-1}).$$

Άρα,

$$m_{i-1} - m_i = -\frac{h}{2}(M_{i-1} + M_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\Rightarrow \quad \int_{x_{i-1}}^{x_i} s(x)dx = \frac{h}{2}(y_{i-1} + y_i) - \frac{h^3}{24}(M_{i-1} + M_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Τέλος,

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_n} s(x)dx &= \sum_{i=1}^{n}\{\int_{x_{i-1}}^{x_i} s(x)dx\}\\ &= \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_{i-1}+y_i)+\frac{h^2}{12}\sum_{i=1}^{n}(m_{i-1}-m_i)\\ &= \frac{h}{2}\{y_0+2(y_1+y_2+\cdots+y_{n-1})+y_n\}+\frac{h^2}{12}(m_0-m_n).\end{aligned}$$

3.5 Σε κάθε διάστημα I_i, $i=1,2,\ldots,k$, $s\in\mathbb{P}_2 \Rightarrow s^{(1)}\in\mathbb{P}_1$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow \quad s^{(1)}(x)=\frac{1}{h}\{m_{i-1}(x_i-x)+m_i(x-x_{i-1})\}\\ &\Rightarrow \quad s(x)=\frac{1}{2h}\{-m_{i-1}(x_i-x)^2+m_i(x-x_{i-1})^2\}+A,\end{aligned}$$

όπου εφαρμόζοντας τη συνθήκη παρεμβολής $s(x_{i-1/2})=y_{i-1/2}$ $(i=1,2,\ldots,k)$,

$$A=\frac{h}{8}(m_{i-1}-m_i)+y_{i-1/2}.$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \; s(x) &= \frac{1}{2h}\{-m_{i-1}(x_i-x)^2+m_i(x-x_{i-1})^2\}\\ &\quad +\frac{h}{8}(m_{i-1}-m_i)+y_{i-1/2},\quad x\in I_i,\quad i=1,2,\ldots,k.\end{aligned}$$

Ο τρόπος κατασκευής της $s \Rightarrow$ η $s^{(1)}$ είναι συνεχής στο $[x_0,x_k]$. $\Rightarrow$ Για να έχουμε $s\in C^1[x_0,x_k]$ πρέπει ταυτόχρονα να ισχύει ότι

$$s(x_i-)=s(x_i+),\quad i=1,2,\ldots,k-1.$$

Άρα,

$$\begin{aligned}&\frac{h}{2}m_i+\frac{h}{8}(m_{i-1}-m_i)+y_{i-1/2}=-\frac{h}{2}m_i+\frac{h}{8}(m_i-m_{i+1})+y_{i+1/2},\\ &\quad\Rightarrow m_{i-1}+6m_i+m_{i+1}=\frac{8}{h}(y_{i+1/2}-y_{i-1/2}),\quad i=1,2,\ldots,k-1.\end{aligned} \tag{3.59}$$

Τέλος,

$$s^{(2)}(x)=\frac{1}{h}(-m_{i-1}-m_i),\quad x\in I_i,\quad i=1,2,\ldots,k.$$

Άρα, για $i=1,2,\ldots,k-2$,

$$\begin{aligned}&s^{(2)}_{i-1/2}=\frac{1}{h}(-m_{i-1}+m_i),\quad s^{(2)}_{i+1/2}=\frac{1}{h}(-m_i+m_{i+1})\ \text{και}\\ &s^{(2)}_{i+3/2}=\frac{1}{h}(-m_{i+1}+m_{i+2})\\ &\Rightarrow \quad s^{(2)}_{i-1/2}+6s^{(2)}_{i+1/2}+s^{(2)}_{i+3/2}=\frac{1}{h}(-m_{i-1}-5m_i+5m_{i+1}+m_{i+2}).\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Χρησιμοποιώντας την (3.59),

$$\begin{aligned} s^{(2)}_{i-1/2} + 6s^{(2)}_{i+1/2} + s^{(2)}_{i+3/2} &= \frac{1}{h}\{-(m_{i-1} + 6m_i + m_{i+1}) \\ &\qquad + (m_i + 6m_{i+1} + m_{i+2})\} \\ &= \frac{8}{h^2}(y_{i-1/2} - 2y_{i+1/2} + y_{i+3/2}), \\ &\qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, k-2. \end{aligned}$$

3.6 Για την απλοποίηση των πράξεων, εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό $x \to h_i x + x_{i-1}$ και παρατηρούμε ότι

$$c_i(x) = h_i \widehat{c}_i(x), \quad \text{όπου} \quad \widehat{c}_i(x) = (x-1)^2 x,$$

και

$$d_i(x) = h_i \widehat{d}_i(x), \quad \text{όπου} \quad \widehat{d}_i(x) = x^2(x-1).$$

$$\Rightarrow \quad c_i^{(j)}(x) = h_i^{1-j}\widehat{c}_i^{(j)}(x) \quad \text{και} \quad d_i^{(j)}(x) = h_i^{1-j}\widehat{d}_i^{(j)}(x), \quad j = 0, 1, 2, 3.$$

Άρα

$$\max_{xin[x_{i-1},x_i]}\{|c_i^{(j)}(x)| + |d_i^{(j)}(x)|\} = h^{1-j}\max_{x\in[0,1]}\{|\widehat{c}_i^{(j)}(x)| + |\widehat{d}_i^{(j)}(x)|\}, \quad j = 0, 1, 2, 3.$$

Το ζητούμενο αποτέλεσμα προκύπτει επειδή, όπως είναι εύκολο να δειχτεί,

$$\max_{x\in[0,1]}\{|\widehat{c}_i^{(j)}(x)| + |\widehat{d}_i^{(j)}(x)|\} \le A_j, \quad j = 0, 1, 2, 3.$$

3.7 Έστω $\tau = x_i - t$. Τότε, για $t \in [x_{i-1}, x_i]$,

$$\begin{aligned} K(t) = K(x_i - \tau) &= \frac{\gamma_i}{2h_i}\tau^3 + \frac{\delta_i}{2h_{i+1}}\{(\tau + h_{i+1})^3 - \tau^3\} \\ &\qquad - \tau^2 - \frac{\delta_i}{2}(\tau + h_{i+1})^2 \\ &= \frac{\gamma_i}{2h_i}\tau^3 + \frac{\delta_i}{2}\{(\tau + h_{i+1})^2 + (\tau + h_{i+1})\tau + \tau^2\} \\ &\qquad - \tau^2 - \frac{\delta_i}{2}(\tau + h_{i+1})^2 \\ &= \frac{\gamma_i}{2h_i}\tau^3 + \frac{\delta_i}{2}\{2\tau^2 + h_{i+1}\tau\} - \tau^2 \\ &= \frac{1}{2h_i}\tau\{\gamma_i\tau^2 + 2(\delta_i - 1)h_i\tau + \delta_i h_i h_{i+1}\}. \end{aligned}$$

Άρα (επειδή $\delta_i - 1 = -\gamma_i$ και $\delta_i h_i h_{i+1} = h_i^2\gamma_i$), για $x \in [x_{i-1}, x_i]$,

$$\begin{aligned} K(t) &= K(x_i - \tau) = \frac{1}{2h_i}\tau\{\gamma_i\tau^2 - 2h_i\gamma_i\tau + h_i^2\gamma_i\} \\ &= \frac{\gamma_i}{2h_i}(\tau - h_i)^2\tau \\ &= \frac{\gamma_i}{2h_i}(x_{i-1} - t)^2(x_i - t) = K_1(t). \end{aligned}$$

Αν $x \in [x_i, x_{i+1}]$, τότε

$$\begin{aligned} K(t) &= \frac{\delta_i}{2h_{i+1}}(x_{i+1}-t)^3 - \frac{\delta_i}{2}(x_{i+1}-t)^2 \\ &= \frac{\delta_i}{h_{i+1}}(x_{i+1}-t)^2(x_{i+1}-t-h_{i+1}) \\ &= \frac{\delta_i}{2h_{i+1}}(x_{i+1}-t)^2(x_i-t) = K_2(t). \end{aligned}$$

3.8 Η κατά Taylor ανάπτυξη του συναρτησιακού

$$\beta_0 = \frac{3}{h_1}(y_1-y_0) - \frac{h_1}{2}y_0^{(2)} - 2y_0^{(1)} - y_1^{(1)} =: L(y),$$

στο σημείο x_0 δίνει

$$L(y) = \frac{h_1^3}{8}y^{(4)}(\eta) - \frac{h_1^3}{6}y^{(4)}(\theta), \quad \text{όπου} \quad \eta, \theta \in [x_0, x_1].$$

$\Rightarrow L(p) = 0$, $\forall p \in \mathbb{P}_3$. $\Rightarrow$ Από το Θεώρημα Peano

$$L(y) = \int_{x_0}^{x_1} K(t)y^{(4)}(t)dt,$$

όπου

$$K(t) = \frac{1}{3!}L_x\{(x-t)_+^3\}.$$

$\Rightarrow$ Για $t \in [x_0, x_1]$,

$$\begin{aligned} K(t) &= \frac{1}{2h_1}(x_1-t)^3 - \frac{1}{2}(x_1-t)^2 \\ &= \frac{1}{2h_1}(x_0-t)(x_1-t)^2 \le 0. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Εφαρμόζοντας το Θεώρημα μέσης τιμής

$$\begin{aligned} L(y) &= y^{(4)}(\xi_0)\int_{x_0}^{x_1} K(t)dt \\ &= \frac{1}{2h_1}y^{(4)}(\xi_0)\{[-\frac{1}{3}(x_0-t)(x_1-t)^3]_{x_0}^{x_1} + \frac{1}{3}\int_{x_0}^{x_1}(x_1-t)^3dt\} \\ &= -\frac{1}{24}h_1^4y^{(4)}(\xi_0), \quad \text{όπου} \quad \xi_0 \in [x_0, x_1]. \end{aligned}$$

Το αποτέλεσμα για το β_k αποδεικνύεται με ακριβώς τον ίδιο τρόπο.

3.11 Παρατηρούμε τα εξής:

- Τα δεδομένα του προγράμματος είναι οι κόμβοι x_i, $i = 0, 1, \ldots, k$, της συνάρτησης spline s καθώς και οι τιμές y_i, $i = 0, 1, \ldots, k$, και α_i, β_i, $i = 0, k$.

- Οι παράμετροι m_i, $i = 0, 1, \ldots, k$, της s πληρούν το τριδιαγώνιο γραμμικό σύστημα που προκύπτει από τις εξισώσεις συνέχειας (3.17) και τις δύο συνθήκες άκρων. Για την επίλυση του γραμμικού αυτού σιστήματος χρησιμοποιούμε ένα από τα διαθέσιμα (στη βιβλιογραφία ή στο διαδίκτυο) ειδικά υποπρογράμματα (subroutines) απαλοιφής Gauss ή LU-παραγοντοποίησης για τριδιαγώνια γραμμικά συστήματα. (Βλ.,για παράδειγμα, [2, §3.4] για ένα ειδικό αλγόριθμο LU-παραγοντοποίησης.)
- Για τον υπολογισμό της τιμής της s, σε οποιοδήποτε σημείο x του $[x_0, x_k]$, χρησιμοποιούμε την αναπαράσταση (3.9)-(3.10) (ή, ισοδύναμα, την (3.20)-(3.21)), αφού πρώτα προσδιορίσουμε το υποδιάστημα $[x_{i-1}, x_i]$ στο οποίο το συγκεκριμένο σημείο x ανήκει.

3.12-3.13 Παρατηρούμε τα εξής σχετικά με τις τιμές των α_i και β_i, $i = 0, 1$:

- Οι συνθήκες άκρων της συνάρτησης D1-spline είναι $m_i = y_i^{(1)}$, $i = 0, k$. $\Rightarrow$ $\alpha_i = 0$ και $\beta_i = y_i^{(1)}$, $i = 0, k$.
- Οι συνθήκες άκρων $s_i^{(2)} = y_i^{(2)}$, $i = 0, k$, της συνάρτησης D2-spline μπορούν να εκφραστούν στη μορφή (3.31)-(3.33) με $u_2 = y_0^{(2)}$ και $v_2 = y_k^{(2)}$. $\Rightarrow$

$$\alpha_i = \frac{1}{2}, \quad i = 0, k,$$
$$\beta_0 = \frac{h_1}{4}\{\frac{6}{h_1^2}(y_1 - y_0) - y_0^{(2)}\} \;\; \text{και} \;\; \beta_k = \frac{h_k}{4}\{\frac{6}{h_k^2}(y_k - y_{k-1}) + y_k^{(2)}\},$$

  όπου $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, k$.
- Οι συνθήκες άκρων της φυσικής συνάρτησης spline είναι $s_i^{(2)} = 0$, $i = 0, k$. $\Rightarrow$

$$\alpha_i = \frac{1}{2}, \quad i = 0, k,$$
$$\beta_0 = \frac{3}{2h_1}(y_1 - y_0) \;\; \text{και} \;\; \beta_k = \frac{3}{2h_k}(y_k - y_{k-1}).$$

3.14 Αν οι κόμβοι είναι ισαπέχοντες με $h_i = h$, $i = 1, 2, \ldots, k$, και υποθέσουμε ότι

$$e^{[j]}(k) \approx C_j h^{m_j}, \quad j = 1, 2, 3,$$

όπου οι σταθερές C_j είναι ανεξάρτητες του h, τότε

$$e^{[j]}(2k) \approx C_j (h/2)^{m_j}, \quad \Rightarrow \quad e^{[j]}(k)/e^{[j]}(2k) \approx 2^{m_j}, \quad j = 1, 2, 3,$$

$\Rightarrow$

$$r^{[j]}(k) := \log_2\{e^{[j]}(k)/e^{[j]}(2k)\} \approx m_j, \quad j = 1, 2, 3.$$

Συνεπώς, οι τιμές $r^{[j]}(k)$, $j = 1, 2, 3$, είναι εκτιμήσεις των τάξεων σύγκλισης των τιμών $s^{(j)}(x_i)$, $j = 1, 2, 3$.

Με τον ίδιο τρόπο μπορεί να δειχτεί ότι οι τιμές $R^{[j]}(k)$, $j = 0, 1, 2, 3$, είναι εκτιμήσεις των τάξεων ομοιόμορφης σύγκλισης των συναρτήσεων $s^{(j)}$, $j = 0, 1, 2, 3$.

3.15 Σύμφωνα με τη θεωρία (βλ. Θεώρημα 3.3 και Πόρισμα 3.1), οι τιμές $r^{[j]}(10)$ και $R^{[j]}(10)$ που αντιστοιχούν στις συναρτήσεις D1-spline και D2-spline αναμένονται να είναι ως εξής:

- Για την D1-spline:

$$r^{[1]}(10) \approx 4, \quad r^{[2]}(10) \approx 2 \;\text{ και }\; r^{[3]}(10) \approx 1.$$

- Για την D2-spline:

$$r^{[1]}(10) \approx 3, \quad r^{[2]}(10) \approx 2 \;\text{ και }\; r^{[3]}(10) \approx 1.$$

- Για την D1-spline και την D2-spline:

$$R^{[j]}(10) \approx 4 - j, \quad j = 0, 1, 2, 3.$$

Για τις αναμενόμενες τιμές που αντιστοιχούν στη φυσική συνάρτηση spline, βλ. Παρατήρηση 3.15.

3.16 Οι παράμετροι μ_i, $i = 1, 2, \ldots, k-1$, της σ ικανοποιούν το $(k-1)\times(k-1)$ τριδιαγώνιο γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} &6\mu_1 + 3\mu_2 = d_1 \\ &\mu_{i-1} + 6\mu_i + 3\mu_{i+1} = d_i, \quad i = 2, 3, \ldots, k-2, \\ &3\mu_{k-2} + 6m_{k-1} = d_{k-1} \end{aligned} \tag{3.60}$$

όπου

$$d_1 = \frac{1}{3h}(-10y_0 - 9y_1 + 18y_2 + y_3) - y_0^{(1)},$$

$$d_i = \frac{1}{3h}(-10y_{i-1} - 9y_i + 18y_{i+1} + y_{i+2}), \quad i = 1, 2, \ldots, k-2,$$

και

$$d_{k-1} = \frac{1}{3h}(-y_{k-3} - 18y_{k-2} + 9y_{k-1} + 10y_k) - y_k^{(1)}.$$

Η ύπαρξη και μοναδικότητα της συνάρτησης σ προκύπτει από το γεγονός ότι ο πίνακας του πιο πάνω συστήματος είναι αυστηρά διαγώνια υπέρτερος και συνεπώς αντιστρέψιμος.

Έστω

$$\lambda_i = \mu_i - y_i^{(1)}, \quad i = 0, 1, \ldots, k,$$

και

$$\underline{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k-1}]^T.$$

Τότε $\lambda_0 = \lambda_k = 0$ και

$$A\underline{\lambda} = \underline{\beta},$$

όπου A είναι ο πίνακας του συστήματος (3.60) και

$$\underline{\beta} = [\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{k-1}]^T,$$

με

$$\beta_i = \frac{1}{3h}(-10y_{i-1} - 9y_i + 18y_{i+1} + y_{i+2}) - (y_{i-1}^{(1)} + 6y_i^{(1)} + 3y_{i+1}^{(1)}), \quad i = 1, 2, \ldots, k-1, \tag{3.61}$$

και

$$\beta_{k-1} = \frac{1}{3h}(-y_{k-3} - 18y_{k-2} + 9y_{k-1} + 10y_k) - (3y_{k-2}^{(1)} + 6y_{k-1}^{(1)} + y_k^{(1)}). \tag{3.62}$$

Άρα, επειδή (βλ. Λήμμα 3.1) $||A^{-1}||_\infty \le 1/2$,

$$||\underline{\lambda}||_\infty \le ||A^{-1}||_\infty ||\underline{\beta}||_\infty \le \frac{1}{2}||\underline{\beta}||_\infty. \tag{3.63}$$

Για την εκτίμηση της νόρμας $||\underline{\beta}||_\infty$, αναπτύσσουμε κατά Taylor τα συναρτησιακά (3.61) και (3.62) (στα σημεία x_i και x_{k-1} αντίστοιχα) και βρίσκουμε ότι

$$\beta_i = \frac{1}{60}h^5 y_i^{(6)} + O(h^6), \quad i = 1, 2, \ldots, k-2,$$

και

$$\beta_{k-1} = -\frac{1}{60}h^5 y_{k-1}^{(6)} + O(h^6).$$

Συνεπώς

$$||\underline{\beta}||_\infty \le \frac{1}{60}h^5||y^{(6)}|| + O(h^6).$$

$\Rightarrow$ Από την (3.63),

$$||\underline{\lambda}||_\infty = \max_{1\le i\le k-1} |\mu_i - y_i^{(1)}| \le \frac{1}{120}h^5||y^{(6)}|| + O(h^6). \tag{3.64}$$

Προφανώς το Λήμμα 3.3 ισχύει και για τη συνάτηση σ (δηλ. με $s = \sigma$ και $m_i = \mu_i$). Ιδιαίτερα, η (3.40) (με $j = 0$) σε συνδυασμό με την (3.64) δίνει

$$\begin{aligned} ||\sigma - y|| &\le \frac{1}{4}||\underline{\lambda}||_\infty + \frac{1}{384}||y^{(4)}|| \\ &\le \frac{1}{384}h^4||y^{(4)}|| + \frac{1}{480}h^6||y^{(6)}|| + O(h^7). \end{aligned}$$

Από τις (3.14) και (3.16), για $i = 1, 2, \ldots, k-1$,

$$\begin{aligned} \sigma^{(2)}(x_i+) - \sigma^{(2)}(x_i-) &= -\frac{2}{h}(\mu_{i-1} + 4\mu_i + \mu_{i+1}) \\ &\quad + \frac{6}{h^2}(y_{i+1} - y_{i-1}) \\ &= -\frac{2}{h}(\lambda_{i-1} + 4\lambda_i + \lambda_{i+1}) + \delta_i, \end{aligned} \tag{3.65}$$

όπου

$$\delta_i = \frac{6}{h^2}(y_{i+1} - y_{i-1}) - \frac{2}{h}(y_{i-1}^{(1)} + 4y_i^{(1)} + y_{i+1}^{(1)}).$$

Αναπτύσσοντας κατά Taylor στο σημείο x_i,

$$\delta_i = -\frac{1}{15}h^3 y_i^{(5)} + O(h^5), \quad i = 1, 2, \ldots, k-1. \tag{3.66}$$

$\Rightarrow$ Από τις (3.64)-(3.66), για $i = 1, 2, \ldots, k-1$,

$$\begin{aligned} |\sigma^{(2)}(x_i+) - \sigma^{(2)}(x_i-)| &\leq 12||\underline{\lambda}||_\infty + \max_{1\leq i\leq k-1} |\delta_i| \\ &\leq \frac{1}{15}h^3||y^{(5)}|| + \frac{1}{10}h^4||y^{(6)}|| + O(h^5). \end{aligned}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Θέματα κυβικών συναρτήσεων spline

4.1 Οι εξισώσεις συνέχειας (3.19), σε συνδυασμό με τις $E(3)$ συνθήκες άκρων της s (βλ. (4.3)) οδηγούν στο $(k+1)\times(k+1)$ γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned}
&m_0+3m_1=d_0\\
&m_{i-1}+4m_i+m_{i+1}=d_i,\quad i=1,2,\dots,k-1,\\
&3m_{k-1}+m_k=d_k
\end{aligned}$$

όπου $m_i:=s_i^{(1)}$, $i=0,1,\dots,k$, και

$$\begin{aligned}
d_0&=\frac{1}{6h}\{-17y_0+9y_1+9y_2-y_3\},\\
d_i&=\frac{3}{h}(y_{i+1}-y_{i-1}),\quad i=1,2,\dots,k-1,\\
d_k&=-\frac{1}{6h}\{-17y_k+9y_{k-1}+9y_{k-2}-y_{k-3}\}.
\end{aligned}$$

(i) Από τα πιο πάνω, αν $\lambda_i=m_i-y_i^{(1)}$, $i=0,1,\dots,k$, τότε

$$\begin{aligned}
&\lambda_0+3\lambda_1=\beta_0\\
&\lambda_{i-1}+4\lambda_i+\lambda_{i+1}=\beta_i,\quad i=1,2,\dots,k-1,\\
&3\lambda_{k-1}+\lambda_k=\beta_k
\end{aligned}\tag{4.71}$$

όπου

$$\begin{aligned}
\beta_0&=d_0-y_0^{(1)}-3y_1^{(1)}\\
&=\frac{1}{6h}\{-17y_0+9y_1+9y_2-y_3\}-y_0^{(1)}-3y_1^{(1)},
\end{aligned}\tag{4.72}$$

$$\begin{aligned}
\beta_k&=d_k-y_k^{(1)}-3y_{k-1}^{(1)}\\
&=-\frac{1}{6h}\{-17y_k+9y_{k-1}+9y_{k-2}-y_{k-3}\}-y_k^{(1)}-3y_{k-1}^{(1)},
\end{aligned}\tag{4.73}$$

και β_i, $i = 1, 2, \ldots, k-1$, είναι όπως στο Λήμμα 3.5.

Η απαλοιφή της παραμέτρου λ_0 από τις δυο πρώτες εξισώσεις του συστήματος (4.71) οδηγεί στην εξίσωση $\lambda_1 + \lambda_2 = \beta_1 - \beta_0$, ενώ η απαλοιφή της παραμέτρου λ_1 από τη νέα αυτή εξίσωση και την τρίτη εξίσωση του (4.71) οδηγεί στην $3\lambda_2 + \lambda_3 = \beta_2 - \beta_1 + \beta_0$. Η εφαρμογή της αντίστοιχης διαδικάσιας απαλοιφής στις τρείς τελευταίες εξισώσεις του συστήματος (4.71) οδηγεί στις εξισώσεις $\lambda_{k-2} + \lambda_{k-1} = \beta_{k-1} - \beta_k$ και $\lambda_{k-3} + 3\lambda_{k-2} = \beta_{k-2} - \beta_{k-1} + \beta_k$. $\Rightarrow$ Το γραμμικό σύστημα (4.71) μπορεί να εκφραστεί ως

$$\lambda_0 + 3\lambda_1 = \beta_0, \tag{4.74}$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 = \beta_1 - \beta_0, \tag{4.75}$$

$$\begin{aligned} &3\lambda_2 + \lambda_3 = \beta_2 - \beta_1 + \beta_0 \\ &\lambda_{i-1} + 4\lambda_i + \lambda_{i+1} = \beta_i, \; i = 3, 4, \ldots, k-3, \\ &\lambda_{k-3} + 3\lambda_{k-2} = \beta_{k-2} - \beta_{k-1} + \beta_k \end{aligned} \tag{4.76}$$

$$\lambda_{k-2} + \lambda_{k-1} = \beta_{k-1} - \beta_k, \tag{4.77}$$
$$3\lambda_{k-1} + \lambda_k = \beta_k. \tag{4.78}$$

(ii) Ο $(k-3) \times (k-3)$ τριδιαγώνιος πίνακας A του γραμμικού συσήματος (4.76) είναι αυστηρά διαγώνια υπέρτερος και συνεπώς αντιστρέψιμος. $\Rightarrow$ Το σύστημα έχει μοναδική λύση

$$\underline{\lambda} = [\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{k-2}]^T.$$

Αφού υπολογιστεί το $\underline{\lambda}$, οι (4.75),(4.74), (4.77) και (4.78) δίνουν μονοσήμαντα τις παραμέτρους λ_1, λ_0, λ_{k-1} και λ_k. $\Rightarrow$ Το γραμμικό σύστημα (4.74)-(4.78) έχει μοναδική λύση.

Τα γραμμικά συστήματα για τις παραμέτρους m_i και λ_i, $i = 0, 1, \ldots, k$, έχουν τον ίδιο πίνακα συντελεστών. $\Rightarrow$ Υπάρχει μια μοναδική συνάρτηση $E(3)$-spline που πληροί τις σινθήκες παρεμβολής (4.60).

(iii) (a) Αναπτύσσοντας κατά Taylor τα συναρτησιακά (4.72) και (4.73), στα σημεία x_1 και x_{k-1} αντίστοιχα, βρίσκουμε ότι

$$\beta_0 = \frac{h^4}{720}\{17y^{(5)}(\eta_1) + 9y^{(5)}(\eta_2) - 32y^{(5)}(\eta_3) - 30y^{(5)}(\eta_4)\}$$

και

$$\beta_k = \frac{h^4}{720}\{17y^{(5)}(\xi_1) + 9y^{(5)}(\xi_2) - 32y^{(5)}(\xi_3) - 30y^{(5)}(\xi_4)\},$$

όπου $\eta_i \in [x_0, x_3]$ και $\xi_i \in [x_{k-3}, x_k]$, $i = 1, 2, 3, 4$. $\Rightarrow$

$$|\beta_i| \le \frac{11}{90} h^4 ||y^{(5)}||, \quad i = 0, k.$$

(b) Το γραμμικό σύστημα (4.76) είναι

$$A\underline{\lambda} = \underline{\widehat{\beta}}$$

όπου

$$\underline{\widehat{\beta}} = [\widehat{\beta}_2, \widehat{\beta}_3, \dots, \widehat{\beta}_{k-2}]^T,$$

με $\widehat{\beta}_2 = \beta_2 - \beta_1 - \beta_0$, $\widehat{\beta}_i = \beta_i$, $i = 3, 4, \dots, k-3$, και $\widehat{\beta}_{k-2} = \beta_{k-2} - \beta_{k-1} + \beta_k$.
$\Rightarrow$ Επειδή (βλ Λήμμα 3.1) $||A^{-1}||_\infty \leq 1/2$,

$$\max_{2\leq i\leq k-2} |\lambda_i| = ||\underline{\lambda}||_\infty \leq ||A^{-1}||_\infty ||\underline{\widehat{\beta}}||_\infty \leq \frac{1}{2} ||\underline{\widehat{\beta}}||_\infty.$$

Από το Λήμμα 3.5,

$$|\beta_i| \leq \frac{1}{30} h^4 ||y^{(5)}||, \quad i = 1, 2, \dots, k-1,$$

$\Rightarrow$

$$|\widehat{\beta}_i| = |\beta_i| \leq \frac{1}{30} h^4 ||y^{(5)}||, \quad i = 3, 4, \dots, k-3,$$

ενώ

$$|\widehat{\beta}_2| \leq |\beta_2| + |\beta_1| + |\beta_0| \quad \text{και} \quad |\widehat{\beta}_{k-2}| \leq |\beta_{k-2}| + |\beta_{k-1}| + |\beta_k|.$$

$\Rightarrow$

$$||\underline{\widehat{\beta}}||_\infty \leq (\frac{1}{15} + \frac{11}{90}) h^4 ||y^{(5)}|| = \frac{17}{90} h^4 ||y^{(5)}||.$$

$\Rightarrow$

$$\max_{2\leq i\leq k-2} |\lambda_i| \leq \frac{17}{180} h^4 ||y^{(5)}||.$$

(c) Από την (4.75),

$$\begin{aligned} |\lambda_1| &\leq |\lambda_2| + |\beta_1| + |\beta_0| \\ &\leq (\frac{17}{180} + \frac{1}{30} + \frac{11}{90}) h^4 ||y^{(5)}|| = \frac{45}{180} h^4 |y^{(5)}||. \end{aligned}$$

Με τον ίδιο τρόπο, χρησιμοποιώντας την (4.77) βρίσκουμε ότι

$$|\lambda_{k-1}| \leq \frac{45}{180} h^4 |y^{(5)}||.$$

(d) Από την (4.74),

$$\begin{aligned} |\lambda_0| &\leq 3|\lambda_2| + |\beta_0| \\ &\leq (\frac{135}{180} + \frac{11}{90}) h^4 ||y^{(5)}|| = \frac{157}{180} h^4 |y^{(5)}||. \end{aligned}$$

Με τον ίδιο τρόπο, χρησιμοποιώντας την (4.78) βρίσκουμε ότι

$$|\lambda_{k-1}| \leq \frac{157}{180} h^4 |y^{(5)}||.$$

(iv) Το ζητούμενο αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα από το Λήμμα 3.3 (με $h_i = h$, $i = 1, 2, \ldots, k$, και $j = 0$) χρησιμοποιώντας τα φράγματα για τις παραμέτρους $\lambda_i = m_i - y_i^{(1)}$, $i = 0, 1, \ldots, k$, που υπολογίσαμε στα μέρη (iii) (b), (c) και (d).

4.2 Οι $E(\alpha)$ συνθήκες άκρων (βλ. (4.3)-(4.4)) είναι

$$\begin{aligned} m_0 + \alpha m_1 &= \frac{1}{6h}\{(-11y_0 + 18y_1 - 9y_2 + 2y_3) \\ &\qquad + \alpha(-2y_0 - 3y_1 + 6y_2 - y_3)\}, \end{aligned} \tag{4.79}$$

και

$$\begin{aligned} \alpha m_{k-1} + m_k &= -\frac{1}{6h}\{(-11y_k + 18y_{k-1} - 9y_{k-2} + 2y_{k-3}) \\ &\qquad + \alpha(-2y_k - 3y_{k-1} + 6y_{k-2} - y_{k-3})\}. \end{aligned} \tag{4.80}$$

(i) Πόρισμα 4.1: Το αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα από τις (4.79)-(4.80) γιατί, όπως είναι εύκολο να δειχτεί,

$$\begin{aligned} p_i^{(1)}(x_i) &= \frac{1}{6h}\{-11y_i + 18y_{i+1} - 9y_{i+2} + 2y_{i+3}\}, \\ p_i^{(1)}(x_{i+1}) &= \frac{1}{6h}\{-2y_i - 3y_{i+1} + 6y_{i+2} - y_{i+3}\}, \\ p_i^{(1)}(x_{i+2}) &= \frac{1}{6h}\{y_i - 6y_{i+1} + 3y_{i+2} + 2y_{i+3}\}, \\ p_i^{(1)}(x_{i+3}) &= \frac{1}{6h}\{-2y_i + 9y_{i+1} - 18y_{i+2} + 11y_{i+3}\}. \end{aligned}$$

(ii) Πόρισμα 4.2: Χρησιμοποιώντας τις (3.5) και (3.8), η (4.79) μπορεί να εκφραστεί ως

$$\begin{aligned} -2M_0 - (1+2\alpha)M_1 - \alpha M_2 &= \frac{1}{h^2}\{-(5+2\alpha)(y_0 - 2y_1 + y_2) \\ &\qquad + (2-\alpha)(y_1 - 2y_2 + y_3)\}, \\ &= \frac{1}{6}\{-(5+2\alpha)(M_0 + 4M_1 + M_2) \\ &\qquad + (2-\alpha)(M_1 + 4M_2 + M_3)\}. \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} &(7M_0 - 12M_1 + 3M_2 + 2M_3) + \alpha(-2M_0 + 3M_1 - M_3) = 0, \\ &\Rightarrow (2-\alpha)(-M_0 + 3M_1 - 3M_2 + M_3) + (9-3\alpha)(M_0 - 2M_1 + M_2) = 0, \\ &\Rightarrow (2-\alpha)\triangle^3 M_0 + (9-3\alpha)\triangle^2 M_0 = 0. \end{aligned}$$

Το αντίστοιχο αποτέλεσμα για την (4.80) αποδεικνύεται με ανάλογο τρόπο, χρησιμοποιώντας τις (3.4) και (3.8).

(iii) Πόρισμα 4.3 Από την Άσκηση 3.3,

$$\begin{aligned} d_i &:= s^{(3)}(x_{i+}) - s^{(3)}(x_{i-}) \\ &= \frac{1}{h}\triangle^2 M_{i-1} \\ &= \frac{1}{h}\nabla^2 M_{i+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, k-1. \end{aligned}$$

Το ζητούμενο αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα από αυτό του Πορίσματος 4.2, επειδή

$$\triangle^3 M_0 = \triangle^2 M_1 - \triangle^2 M_0 = h(d_2 - d_1),$$

και

$$\nabla^3 M_k = \nabla^2 M_k - \nabla^2 M_{k-1} = h(d_{k-1} - d_{k-2}).$$

4.3 Στην εφαρμογή του προγράμματος της Άσκησης 3.11 οι τιμές των παραμέτρων α_i, β_i, $i = 0, k$, είναι ως εξής:

$$E(0) - \text{spline}: \ \alpha_0 = \alpha_\text{k} = 0, \qquad \beta_0 = \frac{1}{6h}\{-11y_0 + 18y_1 - 9y_2 + 2y_3\},$$
$$\beta_k = -\frac{1}{6h}\{-11y_k + 18y_{k-1} - 9y_{k-2} + 2y_{k-3}\}.$$

$$E(2) - \text{spline}: \ \alpha_0 = \alpha_\text{k} = 2, \qquad \beta_0 = \frac{1}{6h}\{-15y_0 + 12y_1 + 3y_2\},$$
$$\beta_k = -\frac{1}{6h}\{-15y_k + 12y_{k-1} + 3y_{k-2}\}.$$

$$E(3) - \text{spline}: \ \alpha_0 = \alpha_\text{k} = 3, \qquad \beta_0 = \frac{1}{6h}\{-17y_0 + 9y_1 + 9y_2 - y_3\},$$
$$\beta_k = -\frac{1}{6h}\{-17y_k + 9y_{k-1} + 9y_{k-2} - y_{k-3}\}.$$

4.4 Οι (4.31)-(4.32), με $\mu = 0$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$, και $j = 2$, δίνουν:

$$\begin{aligned} y_i^{(2)} &= s_i^{(2)} + \frac{1}{24}\{s_{i-1}^{(2)} - 2s_i^{(2)} + s_{i+1}^{(2)}\}P^{(2)}(0) + O(h^3) \\ &= s_i^{(2)} + \frac{1}{12}(s_{i-1}^{(2)} - 2s_i^{(2)} + s_{i+1}^{(2)}) + O(h^3) \\ &= \frac{1}{12}(s_{i-1}^{(2)} + 10s_i^{(2)} + s_{i+1}^{(2)}) + O(h^3), \quad i = 1, 2, \ldots, k-1. \end{aligned}$$

Η ίδια διαδικασία, αλλά με $j = 3$, δίνει:

$$\begin{aligned} y_i^{(3)} &= s_{i+}^{(3)} + \frac{1}{24h}\{s_{i-1}^{(2)} - 2s_i^{(2)} + s_{i+1}^{(2)}\}P^{(3)}(0) + O(h^2) \\ &= s_{i+}^{(3)} - \frac{1}{2h}(s_{i-1}^{(2)} - 2s_i^{(2)} + s_{i+1}^{(2)}) + O(h^2), \quad i = 1, 2, \ldots, k-1. \end{aligned}$$

Όμως (βλ. τη λύση της Άσκησης 3.3),

$$s_{i+}^{(3)} = \frac{1}{h}(s_{i+1}^{(2)} - s_i^{(2)}), \quad i = 1, 2, \ldots, k-1.$$

Συνεπώς,

$$y_i^{(3)} = \frac{1}{2h}(s_{i+1}^{(2)} - s_{i-1}^{(2)}) + O(h^2), \quad i = 1, 2, \ldots, k-1.$$

4.5 Οι εξισώσεις συνέχειας της s είναι (βλ. (3.8)),

$$s_{i-1}^{(2)} + 4s_i^{(2)} + s_{i+1}^{(2)} = \frac{6}{h^2}(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}), \quad i = 1, 2, \ldots, k-1.$$

Συνεπώς, για $i = 1, 2, \ldots, k-1$,

$$\kappa_{i-1} + 4\kappa_i + \kappa_{i+1} = \beta_i, \quad \text{και} \quad \nu_{i-1} + 4\nu_i + \nu_{i+1} = \gamma_i,$$

όπου,

$$\begin{aligned} \beta_i &= \frac{6}{h^2}(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) \\ &\quad - (y_{i-1}^{(2)} + 4y_i^{(2)} + y_{i+1}^{(2)}) + \frac{h^2}{12}(y_{i-1}^{(4)} + 4y_i^{(4)} + y_{i+1}^{(4)}), \end{aligned}$$

και

$$\gamma_i = \beta_i - \frac{h^4}{360}(y_{i-1}^{(6)} + 4y_i^{(6)} + y_{i+1}^{(6)}).$$

Τα ζητούμενα αποτελέσματα προκύπτουν αναπτύσσοντας κατά Taylor τα συναρτησιακά β_i και γ_i στο σημείο x_i.

Σημείωση: Για την απλοποίηση των πράξεων χρησιμοποιήστε το πιο κάτω ανάπτυγμα, που ισχύει για $F \in C^8[a,b]$ και $\forall \alpha \in \mathbb{R}$,

$$F_{i-1} + \alpha F_i + F_{i+1} = (\alpha+2)F_i + h^2 F_i^{(2)} + \frac{h^4}{12}F_i^{(4)} + \frac{h^6}{360}F_i^{(6)} + O(h^8).$$

4.6 Από την (3.5), για $i = 0, 1, \ldots, k-1$,

$$\begin{aligned} y_i^{(1)} - s_i^{(1)} &= \frac{h}{6}(2s_i^{(2)} + s_{i+1}^{(2)}) - \frac{1}{h}(y_{i+1} - y_i) + y_i^{(1)} \\ &= \frac{h}{6}(2\kappa_i + \kappa_{i+1}) + E_i \\ &= E_i + O(h^5), \end{aligned}$$

όπου

$$E_i = \frac{h}{6}\{2(y_i^{(2)} - \frac{h^2}{12}y_i^{(4)}) + (y_{i+1}^{(2)} - \frac{h^2}{12}y_{i+1}^{(4)})\} - \frac{1}{h}(y_{i+1} - y_i) + y_i^{(1)}.$$

Αναπτύσσοντας κατά Taylor το συναρτησιακό E_i, στο σημείο x_i, βρίσκουμε ότι

$$E_i = \frac{1}{180}h^4 y_i^{(5)} + 0(h^5).$$

Συνεπώς

$$y_i^{(1)} - s_i^{(1)} = \frac{1}{180}h^4 y_i^{(5)} + 0(h^5), \quad i = 0, 1, \ldots, k-1.$$

Το αντίστοιχο αποτέλεσμα για $i = k$ αποδεικνύεται, με ανάλογο τρόπο, χρησιμοποιώντας την (3.4) αντί την (3.5).

Για $x \in [x_{i-1}, x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$,

$$s^{(2)}(x) = \frac{1}{h}\{s_{i-1}^{(2)}(x_i - x) + s_i^{(2)}(x - x_{i-1})\} \quad \Rightarrow \quad s^{(3)}(x) = \frac{1}{h}(s_i^{(2)} - s_{i-1}^{(2)}),$$

και για $x \in [x_i, x_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$,

$$s^{(2)}(x) = \frac{1}{h}\{s_i^{(2)}(x_{i+1} - x) + s_{i+1}^{(2)}(x - x_i)\} \quad \Rightarrow \quad s^{(3)}(x) = \frac{1}{h}(s_{i+1}^{(2)} - s_i^{(2)}).$$

Συνεπώς, για $i = 0, 1, \ldots, k-1$,

$$\begin{aligned} s_{i+}^{(3)} &= \frac{1}{h}(s_{i+1}^{(2)} - s_i^{(2)}) \\ &= \frac{1}{h}\{(y_{i+1}^{(2)} - \frac{1}{h^2}y_{i+1}^{(4)}) - (y_i^{(2)} - \frac{1}{h^2}y_i^{(4)})\} + O(h^3). \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Αναπτύσσοντας κατά Taylor στο σημείο x_i,

$$\begin{aligned} & s_{i+}^{(3)} = y_i^{(3)} + \frac{1}{2}hy_i^{(4)} + \frac{1}{12}h^2y_i^{(5)} + O(h^3), \\ \Rightarrow \quad & y_i^{(3)} - s_{i+}^{(3)} = -\frac{1}{2}hy_i^{(4)} - \frac{1}{12}h^2y_i^{(5)} + O(h^3), \quad i = 0, 1, \ldots, k-1. \end{aligned}$$

Το αντίστοιχο αποτέλεσμα για $i = 1, 2, \ldots, k$ αποδεικνύεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, αλλά αρχίζοντας από την

$$s_{i-}^{(3)} = \frac{1}{h}(s_i^{(2)} - s_{i-1}^{(2)}).$$

Επειδή $y \in C^6[a, b]$, μπορούμε να θεωρήσουμε α αναπτύγματα Taylor του Λήμματος 4.1 με ένα επιπρόσθετο όρο. Τα αναπτύγματα αυτά είναι:

$$\begin{aligned} y(x_i + \mu h) - s(x_i + \mu h) &= \mu h(y_i^{(1)} - s_i^{(1)}) + \frac{1}{2}\mu^2h^2(y_i^{(2)} - s_i^{(2)}) \\ &\quad + \frac{1}{6}\mu^3h^3(y_i^{(3)} - s_{i+}^{(3)}) + \frac{1}{24}\mu^4h^4y_i^{(4)} + \frac{1}{120}\mu^5h^5y_i^{(5)} + O(h^6), \\ y^{(1)}(x_i + \mu h) - s^{(1)}(x_i + \mu h) &= y_i^{(1)} - s_i^{(1)} + \mu h(y_i^{(2)} - s_i^{(2)}) \\ &\quad + \frac{1}{2}\mu^2h^2(y_i^{(3)} - s_{i+}^{(3)}) + \frac{1}{6}\mu^3h^3y_i^{(4)} + \frac{1}{24}\mu^4h^4yi^{(5)} + O(h^5), \\ y^{(2)}(x_i + \mu h) - s^{(2)}(x_i + \mu h) &= y_i^{(2)} - s_i^{(2)} + \mu h(y_i^{(3)} - s_{i+}^{(3)}) \\ &\quad + \frac{1}{2}\mu^2h^2y_i^{(4)} + \frac{1}{6}\mu^3h^3 + O(h^4), \\ y^{(3)}(x_i + \mu h) - s^{(3)}(x_i + \mu h) &= y_i^{(3)} - s_{i+}^{(3)} + \mu hy_i^{(4)} + \frac{1}{h}\mu^2h^2y_i^{(5)} + O(h^3). \end{aligned}$$

Η αντικατάσταση των όρων $y_i^{(j)} - s_i^{(j)}$, $j = 1, 2$, και $y_i^{(3)} - s_{i+}^{(3)}$, στα πιο πάνω αναπτύγματα, με τους

$$\frac{1}{180}h^4y_i^{(5)} + O(h^5), \quad -\frac{1}{12}h^2y_i^{(4)} + O(h^4) \quad \text{και} \quad -\frac{1}{2}hy_i^{(4)} - \frac{1}{12}h^2y_i^{(5)} + O(h^3),$$

αντίστοιχα, οδήγει άμεσα στο αποτέλεσμα ότι για $0 \le \mu \le 1$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$ και $j = 0, 1, 2, 3$,

$$\begin{aligned} y^{(j)}(x_i + \mu h) &= s^{(j)}(x_i + \mu h) + \frac{1}{24} h^{4-j} \mathcal{P}_0^{(j)}(\mu) y_i^{(4)} \\ &\quad + \frac{1}{120} h^{5-j} \mathcal{P}_1^{(j)}(\mu) y_i^{(5)} + O(h^{6-j}), \qquad (4.81) \end{aligned}$$

όπου $\mathcal{P}_0$ και $\mathcal{P}_1$ είναι τα πολυώνυμα (4.63) και (4.64).

4.7 Από την Άσκηση 4.6,

$$y_i^{(3)} - s_{i+}^{(3)} = -\frac{1}{2} h y_i^{(4)} - \frac{1}{12} h^2 y_i^{(5)} + O(h^3), \quad i = 0, 1, \ldots, k-1,$$

και

$$y_i^{(3)} - s_{i-}^{(3)} = \frac{1}{2} h y_i^{(4)} - \frac{1}{12} h^2 y_i^{(5)} + O(h^3), \qquad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Συνεπώς, για $i = 1, 2, \ldots, k-1$,

$$\begin{aligned} & s_{i+}^{(3)} - s_{i-}^{(3)} = h y_i^{(4)} + O(h^3), \\ \Rightarrow \quad & y_i^{(4)} = \frac{1}{h}(s_{i+}^{(3)} - s_{i-}^{(3)}) + O(h^2), \\ \Rightarrow \quad & (\text{βλ. Άσκηση } 3.3) \;\; y_i^{(4)} = \frac{1}{h^2} \delta^2 s_i^{(2)} + O(h^2). \end{aligned}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} & y_0^{(4)} - 2y_1^{(4)} + y_2^{(4)} = O(h^2), \\ \Rightarrow \quad & y_0^{(4)} = 2\widetilde{y}_1^{(4)} - \widetilde{y}_2^{(4)} + O(h^2), \\ \Rightarrow \quad & y_0^{(4)} = \widetilde{y}_0^{(4)} + O(h^2). \end{aligned}$$

Με τον ίδιο τρόπο, αρχίζοντας από το

$$y_{k-2}^{(4)} - 2y_{k-1}^{(4)} + y_k^{(4)} = O(h^2),$$

βρίσκουμε ότι $y_k^{(4)} = \widetilde{y}_k^{(4)} + O(h^2)$.

Για τις προσεγγίσεις (4.67)-(4.68):

$$\begin{aligned} y_i^{(5)} &= \frac{1}{2h}(y_{i+1}^{(4)} - y_{i-1}^{(4)}) + O(h^2) \\ &= \frac{1}{2h}(\widetilde{y}_{i+1}^{(4)} - \widetilde{y}_{i-1}^{(4)}) + O(h) \\ &= \widetilde{y}_i^{(5)} + O(h), \quad i = 1, 2, \ldots, k-1. \end{aligned}$$

Επίσης,

$$y_0^{(5)} = y^5(x_1 - h) = y_1^{(5)} + O(h) = \widetilde{y}_1^{(5)} + O(h), \;\; \Rightarrow \;\; y_0^{(5)} = \widetilde{y}_0^{(5)} + O(h).$$

Το ζητούμενο αποτέλεσμα (4.69) είναι άμεση συνέπεια του (4.81) και των πιο πάνω αποτελεσμάτων.

4.8 Από την Άσκηση 4.7,

$$y_i^{(2)} = s_i^{(2)} + \frac{1}{24}h^2\mathcal{P}_0^{(2)}(0)\widetilde{y}_i^{(4)} + \frac{1}{120}h^3\mathcal{P}_1^{(2)}(0)\widetilde{y}_i^{(5)} + 0(h^4),$$

για $i = 0, 1, \dots, k-1$, και

$$y_k^{(2)} = s_k^{(2)} + \frac{1}{24}h^2\mathcal{P}_1^{(2)}(1)\widetilde{y}_{k-1}^{(4)} + \frac{1}{120}h^3\mathcal{P}_1^{(2)}(1)\widetilde{y}_{k-1}^{(5)} + 0(h^4),$$

όπου

$$\mathcal{P}_0^{(2)}(\mu) = 12\mu^2 - 12\mu + 2 \quad\Rightarrow\quad \mathcal{P}_0^{(2)}(0) = \mathcal{P}_0^{(2)}(1) = 2$$

και

$$\mathcal{P}_1^{(2)}(\mu) = 20\mu^3 - 10\mu \quad\Rightarrow\quad \mathcal{P}_1^{(2)}(0) = 0 \;\text{ και }\; \mathcal{P}_1^{(2)}(1) = 10.$$

Επίσης

$$\begin{aligned}
\widetilde{y}_i^{(4)} &= \frac{1}{h^2}(s_{i-1}^{(2)} - 2s_i^{(2)} + s_{i+1}^{(2)}), \quad i = 1, 2, \dots, k-1,\\
\widetilde{y}_0^{(4)} &= 2\widetilde{y}_1^{(4)} - \widetilde{y}_0^{(4)} = \frac{1}{h^2}(2s_0^{(2)} - 5s_1^{(2)} + 4s_2^{(2)} - s_3^{(2)})\\
\widetilde{y}_k^{(4)} &= 2\widetilde{y}_{k-1}^{(4)} - \widetilde{y}_k^{(4)} = \frac{1}{h^2}(-s_{k-3}^{(2)} + 4s_{k-2}^{(2)} - 5s_{k-1}^{(2)} + 2s_k^{(2)})\\
\widetilde{y}_{k-1}^{(5)} &= \frac{1}{2h}(\widetilde{y}_k^{(4)} - \widetilde{y}_{k-2}^{(4)}) = \frac{1}{h^3}(-s_{k-3}^{(2)} + 3s_{k-2}^{(2)} - 3s_{k-1}^{(2)} + s_k^{(2)}).
\end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned}
y_0^{(2)} &= s_0^{(2)} + \frac{1}{12}h^2\widetilde{y}_0^{(4)} + O(h^4)\\
&= \frac{1}{12}(14s_0^{(2)} - 5s_1^{(2)} + 4s_2^{(2)} - s_3^{(2)}) + O(h^4),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_i^{(2)} &= s_i^{(2)} + \frac{1}{12}h^2\widetilde{y}_i^{(4)} + O(h^4)\\
&= \frac{1}{12}(s_{i-1}^{(2)} + 10s_i^{(2)} + s_{i+1}^{(2)}) + O(h^4), \quad i = 1, 2, \dots, k-1,
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
y_k^{(2)} &= s_k^{(2)} + \frac{1}{12}h^2\widetilde{y}_{k-1}^{(4)} + \frac{1}{12}h^3\widetilde{y}_{k-1}^{(5)} + 0(h^4)\\
&= \frac{1}{12}(-s_{k-3}^{(2)} + 4s_{k-2}^{(2)} - 5s_{k-1}^{(2)} + 14s_k^{(2)}) + O(h^4).
\end{aligned}$$

4.10 (i) Από τους ορισμούς των $H_{4,i}$ και P προκύπτει αμέσως ότι,

$$P(x) = s(x) + \mathcal{D}_i(x - x_{i-1})^2(x - x_i)^2, \quad x \in I_i, \quad i = 1, 2, \dots, k-1,$$

όπου, για $i = 1, 2, \dots, k-1$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_i &= s[x_{i-1}, x_{i-1}, x_i, x_i, x_{i+1}]\\
&= \frac{1}{4h^4}\{-5y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1} - 2h(s_{i-1}^{(1)} + 2s_i^{(1)})\}, \qquad (4.82)
\end{aligned}$$

ή, χρησιμοποιώντας την (3.5) και στη συνέχεια την (3.8),

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_i &= \frac{1}{24h^4}\{-18(y_{i-1}-2y_i+y_{i+1})+h^2(4s_{i-1}^{(2)}+10s_i^{(2)}+4s_{i+1}^{(2)})\}\\ &= \frac{1}{24h^2}(s_{i-1}^{(2)}-2s_i^{(2)}+s_{i+1}^{(2)})\\ &= \frac{1}{24h^2}\delta^2 s_i^{(2)}, \quad i=1,2,\ldots,k-1. \end{aligned} \tag{4.83}$$

Στο διάστημα I_k, $P=p_{k-1}$. Δηλαδή, το ίδιο πολυωνυμικό τμήμα χρησιμοποιείται για τον ορισμό του P τόσο στο I_{k-1} όσο και στο I_k. Το ότι

$$P(x)=s(x)+\mathcal{D}_{k-1}(x-x_{k-1})^2(x-x_k)^2, \quad x\in I_k, \tag{4.84}$$

μπορεί να δειχτεί ως εξής:

Έστω s_{k-1} και s_k τα πολυωνυμικά τμήματα της s στα διαστήματα I_{k-1} και I_k αντίστοιχα, έστω $H_{4,k}$ το τεταρτοβάθμιο πολυώνυμο Hermite που πληροί τις συνθήκες

$$H_{4,k}(x_j)=y_j, \quad j=k-2,k-1,k, \quad \text{και} \quad H_{4,k}^{(1)}(x_j)=y_j^{(1)}, \quad j=k-1,k,$$

και έστω $\widehat{p}_k$ το πολυώνυμο που προκύπτει από το $H_{4,k}$ αντικαθιστώντας τις παραγώγους $y_{k-1}^{(1)}$ και $y_k^{(1)}$ με $s_{k-1}^{(1)}$ και $s_k^{(1)}$ αντίστοιχα. Τότε

$$p_{k-1}(x)=s_{k-1}(x)+\mathcal{D}_{k-1}(x-x_{k-2})^2(x-x_{k-1})^2,$$

όπου η $\mathcal{D}_{k-1}$ δίνεται από την (4.82) ή, ισοδύναμα, από την (4.83). Επίσης

$$\widehat{p}_k(x)=s_k(x)+\mathcal{D}_k(x-x_{k-1})^2(x-x_k)^2,$$

όπου

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_k &= s[x_{k-2},x_{k-1},x_{k-1},x_k,x_k]\\ &= \frac{1}{4h^4}\{-y_{k-2}+4y_{k-1}-5y_k-2h(2s_{k-1}^{(1)}+s_k^{(1)})\},\end{aligned}$$

ή, επειδή (βλ. 3.19)),

$$s_k^{(1)}=\frac{3}{h}(y_k-y_{k-2})-s_{k-2}^{(1)}-4s_{k-1}^{(1)},$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_k &= \frac{1}{4h^4}\{-5y_{k-2}+4y_{k-1}+y_k-2h(s_{k-2}^{(1)}+2s_{k-1}^{(1)})\}\\ &= \mathcal{D}_{k-1}.\end{aligned}$$

Άρα

$$\widehat{p}_k(x)=s_k(x)+\mathcal{D}_{k-1}(x-x_{k-1})^2(x-x_k)^2.$$

Έστω

$$d(x)=p_{k-1}(x)-\widehat{p}_k(x).$$

Τότε,

$$\begin{aligned} d^{(3)}(x) &= s^{(3)}_{k-1}(x) - s^{(3)}_k(x) + 24h\mathcal{D}_{k-1} \\ &= -\frac{1}{h}\delta^2 s^{(2)}_{k-1} + 24h\mathcal{D}_{k-1}. \end{aligned}$$

Συνεπώς, από την (4.83), $d^{(3)} = 0.$ $\Rightarrow d \in \mathbb{P}_2$. Όμως

$$d(x_j) = 0, \quad j = k-2, k-1, k, \quad \Rightarrow \quad d(x) \equiv 0, \quad \Rightarrow \quad p_{k-1}(x) = \widehat{p}_k(x).$$

Άρα η (4.84) ισχύει.

(ii) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα για το σφάλμα $y(x) - H_4(x)$ της Άσκησης 1.9 είναι εύκολο να δειχτεί ότι

$$|H_{4,i}(x) - y(x)| \le C_0 h^5 ||y^{(5)}||, \quad x \in [x_{i-1}, x_{i+1}], \quad i = 1, 2, \ldots, k-1,$$

όπου $C_0 \in \mathbb{R}$ είναι ανεξάρτητο του h. Πιο γενικά μπορεί να δειχτεί ότι, για $r = 0, 1, 2, 3, 4$,

$$|H^{(r)}_{4,i}(x) - y^{(r)}(x)| \le C_r h^{5-r} ||y^{(5)}||, \quad x \in [x_{i-1}, x_{i+1}], \quad i = 1, 2, \ldots, k-1,$$

όπου οι σταθερές $C_r \in \mathbb{R}$, $r = 0, 1, 2, 3, 4$, είναι ανεξάρτητες του h. Συνεπώς, για $x \in I_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$,

$$\begin{aligned} |P^{(r)}(x) - y^{(r)}(x)| &\le |P^{(r)}(x) - H^{(r)}_{4,i}(x)| + |H^{(r)}_{4,i}(x) - y^{(r)}(x)| \\ &= |P^{(r)}(x) - H^{(r)}_{4,i}(x)| + O(h^{5-r}), \quad r = 0, 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι,

$$P(x) - H_{4,i}(x) = s(x) - H_{3,i}(x) + (\Gamma_i - \mathcal{D}_i)\varphi_i(x), \quad x \in I_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

όπου $H_{3,i}$ είναι το κυβικό πολυώνυμο παρεμβολής Hermite του Λήμματος 3.2,

$$\begin{aligned} &\Gamma_i = y[x_{i-1}, x_{i-1}, x_i, x_i, x_{i+1}], \quad i = 1, 2, \ldots, k-1, \\ &\Gamma_k = y[x_{k-2}, x_{k-1}, x_{k-1}, x_k, x_k], \end{aligned}$$

και

$$\varphi_i(x) = (x - x_{i-1})^2 (x - x_i)^2, \quad i = 1, 2, \ldots, k-1.$$

Άρα, για $x \in I_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, και $r = 0, 1, 2, 3, 4$,

$$|P^{(r)}(x) - y^{(r)}(x)| \le |s^{(r)}(x) - H^{(r)}_{3,i}(x)| + |(\Gamma_i - \mathcal{D}_i)||\varphi^{(r)}_i(x)| + O(h^{5-r}).$$

Από αυτό προκύπτει ότι

$$||P^{(r)} - y^{(r)}|| = O(h^{5-r}), \quad r = 0, 1, 2, 3, 4,$$

επειδή:

- Από την απόδειξη του Λήμματος 3.3,

  $$||s^{(r)} - H^{(r)}_{3,i}|| \le A_r h^{1-r} \max_{0 \le i \le k} |s^{(1)}_i - y^{(1)}_i|, \quad r = 0, 1, 2, 3,$$

  όπου A_r, $r = 0, 1, 2, 3$, είναι οι σταθερές (3.41).

- Όπως είναι εύκολο να δειχτεί

  $$\max_{x\in I_i}|\varphi_i^{(r)}(x)| = O(h^{4-r}), \quad r = 0,1,2,3,4,$$

  και

  $$\max_{1\le i\le k}|(\Gamma_i - \mathcal{D}_i)| \le 1.5h^3 \max_{0\le i\le k}|s_i^{(1)} - y_i^{(1)}|.$$

4.11 Έστω $x = x_{i-1} + \mu h$, $0 \le \mu \le 1$. Τότε, με τους συμβολισμούς της Άσκησης 4.10,

$$P(x_{i-1}+\mu h) = s(x_{i-1}+\mu h) + h^4\mathcal{D}_i Q(\mu), \quad i = 1,2,\ldots,k,$$

όπου

$$Q(\mu) = \mu^2(\mu-1)^2.$$

(Δηλαδή το Q συμπίπτει με το πολυώνυμο (4.24) του Λήμματος 4.4.) Συνεπώς, για $j = 0,1,2,3,4$,

$$P^{(j)}(x_{i-1}+\mu h) = s^{(j)}(x_{i-1}+\mu h) + h^{4-j}\mathcal{D}_i Q^{(j)}(\mu), \quad i = 1,2,\ldots,k, \tag{4.85}$$

όπου $Q^{(j)} = d^jQ/d\mu^j$. Τα ζητούμενα αποτελέσματα προκύπτουν από την (4.85) ως εξής:

- Οι ρίζες των πολυωνύμων $Q^{(j)}$, $j = 0,1,2,3$, είναι αντίστοιχα

  $$\mu_0 = 0,1, \quad \mu_1 = 0,1/2,1, \quad \mu_2 = (3\pm\sqrt{3})/6, \quad \text{και} \quad \mu_3 = 1/2.$$

  Συνεπώς

  $$P^{(j)}(x_{i-1}+\mu_j h) = s^{(j)}(x_{i-1}+\mu_j h), \quad j = 0,1,2,3,4, \quad i = 1,2,\ldots,k.$$

  (Βλ., επίσης, Πόρισμα 4.5.)

- Η (4.85), με $\mu = 1$ και $j = 2$ και σε συνδυασμό με την (4.83), δίνει

  $$\begin{aligned} P^{(2)}(x_i) &= s_i^{(2)} + \frac{1}{24}Q^{(2)}(0)\delta^2 s_i^{(2)} \\ &= \frac{1}{12}(s_{i-1}^{(2)} + 10s_i^{(2)} + s_{i+1}^{(2)}), \quad i = 1,2,\ldots,k-1. \end{aligned}$$

  (Βλ., επίσης, Άσκηση 4.4.)

- Η (4.85), με $\mu = 1$ και $j = 3$ και σε συνδυασμό με την (4.83), δίνει,

  $$\begin{aligned} P^{(3)}(x_i) &= s_{i-}^{(2)} + \frac{1}{24h}Q^{(3)}(0)\delta^2 s_i^{(2)} \\ &= s_{i-}^{(3)} + \frac{1}{2h}(s_{i-1}^{(2)} - 2s_i^{(2)} + s_{i+1}^{(2)}), \quad i = 1,2,\ldots,k-1. \end{aligned}$$

  Όμως,

  $$s_{i-}^{(3)} = \frac{1}{h}(s_i^{(2)} - s_{i-1}^{(2)}), \quad i = 1,2,\ldots,k.$$

Συνεπώς

$$P^{(3)}(x_i) = \frac{1}{2h}(s_{i+1}^{(2)} - s_{i-1}^{(2)}).$$

(Βλ., επίσης, Άσκηση 4.4.)

- Η (4.85), με $\mu = 1$ και $j = 4$ και σε συνδυασμό με την (4.83), δίνει,

$$\begin{aligned} P^{(4)}(x) &= \mathcal{D}_i Q^{(4)}(0) \\ &= 24\mathcal{D}_i \\ &= \frac{1}{h^2}(s_{i-1}^{(2)} - 2s_i^{(2)} + s_{i+1}^{(2)}), \quad x \in I_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k-1. \end{aligned}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Πεμπτοβάθμιες συναρτήσεις spline

5.1 Αν $S \in S_3(\Delta_k)$, όπου

$$\Delta_k : \; x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \ldots, k, \quad h = (b-a)/k,$$

τότε (βλ. (3.4),(3.5),(3.14), (3.16) και (3.19)):

$$\begin{aligned}
S_i^{(1)} &= \frac{h}{6} S_{i-1}^{(2)} + \frac{h}{3} S_i^{(2)} + \frac{1}{h}(S_i - S_{i-1}), \quad i = 1, 2, \ldots, k, \\
S_i^{(1)} &= -\frac{h}{3} S_{i-1}^{(2)} - \frac{h}{6} S_{i+1}^{(2)} + \frac{1}{h}(S_{i+1} - S_i), \quad i = 0, 1, \ldots, k-1, \\
S_i^{(2)} &= \frac{2}{h}(S_{i-1}^{(1)} + 2S_i^{(1)}) + \frac{6}{h^2}(S_{i-1} - S_i), \quad i = 1, 2, \ldots, k, \\
S_i^{(2)} &= -\frac{2}{h}(2S_i^{(1)} + S_{i+1}^{(1)}) + \frac{6}{h^2}(S_{i+1} - S_i), \quad i = 0, 1, \ldots, k-1, \\
S_{i-1}^{(1)} + 4S_i^{(1)} + S_{i+1}^{(1)} &= \frac{3}{h}(S_{i+1} - s_{i-1}), \quad i = 1, 2, \ldots, k-1.
\end{aligned}$$

Επίσης (βλ. Άσκηση 3.3),

$$S^{(3)}(x_i+) - S^{(3)}(x_i-) = \frac{1}{h}\{S_{i-1}^{(2)} - 2S_i^{(2)} + S_{i+1}^{(2)}\}, \quad i = 1, 2, \ldots, k-1.$$

Επειδή $s^{(2)} \in S_3(\Delta_k)$, όλα τα ζητούμενα αποτελέσματα προκύπτουν από τα πιο πάνω θέτοντας $S = s^{(2)}$.

5.2 Παρόλο που η διαδικάσια της κατά Taylor ανάπτυξης του συναρτησιακού

$$\begin{aligned}
\beta_i \;\; = \;\; & \frac{5}{h}\{-y_{i-2} - 10y_{i-1} + 10y_{i+1} + y_{i+2}\} \\
& - \{y_{i-2}^{(1)} + 26y_{i-1}^{(1)} + 66y_i^{(1)} + 26y_{i+1}^{(1)} + y_{i+2}^{(1)}\}
\end{aligned}$$

είναι απλή, οι απαιτούμενες αριθμητικές πράξεις είναι αρκετά επίπονες. Για την απλοποίηση των πράξεων, εκφράστε το συναρτησιακό β_i στη μορφή

$$\begin{aligned}\beta_i &= \frac{5}{h}\{10(y_{i+1} - y_{i-1}) + (y_{i+2} - y_{i-2})\}\\ &\quad - \{66y_i^{(1)} + 26(y_{i+1}^{(1)} + y_{i-1}^{(1)}) + (y_{i+2}^{(1)} + y_{i-2}^{(1)})\},\end{aligned}$$

και χρησιμοποιήστε τα αναπτύγματα των

$$y_{i+1} - y_{i-1}, \quad y_{i+2} - y_{i-2}, \quad y_{i+1}^{(1)} + y_{i-1}^{(1)} \quad \text{και} \quad y_{i+2}^{(1)} - y_{i-2}^{(1)},$$

στο σημείο x_i.

5.3 Από την (5.16), για $i = 2, 3, \ldots, k-2$,

$$\begin{aligned}M_i &= \frac{1}{32h}(\lambda_{i-2} + 32\lambda_{i-1} - 32\lambda_{i+1} - \lambda_{i+2}) + \beta_i\\ &= \beta_i + O(h^{m-1}), \quad m \geq 5, \quad i = 2, 3, \ldots, k-2,\end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned}\beta_i &= \frac{1}{32h}(y_{i-2}^{(1)} + 32y_{i-1}^{(1)} - 32y_{i+1}^{(1)} - y_{i+2}^{(1)})\\ &\quad + \frac{5}{32h^2}(y_{i-2} + 16y_{i-1} - 34y_i + 16y_{i+1} + y_{i+2})\\ &= \frac{1}{32h}\{-32(y_{i+1}^{(1)} - y_{i-1}^{(1)}) - (y_{i+2}^{(1)} - y_{i-2}^{(1)}))\\ &\quad + \frac{5}{32h^2}\{-34y_i + 16(y_{i+1} + y_{i-1}) + (y_{i+2} + y_{i-2})\}.\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Αναπτύσσοντας κατά Taylor το συναρτησιακό β_i στο σημείο x_i (βλ. τα πιο πάνω σχόλια για τη λύση της Άσκησης 5.2), βρίσκουμε ότι

$$\beta_i = y_i^{(2)} + O(h^4), \quad i = 2, 3, \ldots, k-2.$$

Άρα

$$\mu_i := M_i - y_i^{(2)} = O(h^4), \quad i = 2, 3, \ldots, k-2. \tag{5.61}$$

Για $i = 0, 1, k-1$ και k, το αποτέλεσμα αποδεικνύεται με ανάλογο τρόπο, χρησιμοποιώντας την (5.14) (με $i = 1, 2, k-2$ και $k-1$ αντίστοιχα) σε συνδυασμό με την (5.61).

5.4 Από το Θεώρημα 5.4 (με $\mu = 0$ και $j = 2, 4, 5$ αντίστοιχα) έχουμε ότι για $i = 1, 2 \ldots, k-1$,

$$\begin{aligned}y_i^{(2)} &= s_i^{(2)} + \frac{1}{720}h^4 P^{(2)}(0) \times \frac{1}{h^2}\delta^2 s_i^{(4)} + O(h^5),\\ y_i^{(4)} &= s_i^{(4)} + \frac{1}{720}h^2 P^{(4)}(0) \times \frac{1}{h^2}\delta^2 s_i^{(4)} + O(h^3),\\ y_i^{(5)} &= s_{i+}^{(5)} + \frac{1}{720}hP^{(5)}(0) \times \frac{1}{h^2}\delta^2 s_i^{(4)} + O(h^2),\end{aligned}$$

όπου $P(\mu) = (2\mu^6 - 6\mu^5 + 5\mu^4 - \mu^2)/2$. Άρα

$$P^{(2)}(0) = -1, \quad P^{(4)}(0) = 60, \quad \text{και} \quad P^{(5)}(0) = -360.$$

Συνεπώς, για $i = 1, 2, \ldots, k-1$,

$$\begin{aligned} y_i^{(2)} &= s_i^{(2)} - \frac{1}{720}h^2\delta^2 s_i^{(4)} + O(h^5), &(5.62)\\ y_i^{(4)} &= s_i^{(4)} + \frac{1}{12}\delta^2 s_i^{(4)} + O(h^3) \\ &= \frac{1}{12}(s_{i-1}^{(4)} + 10s_i^{(4)} + s_{i+1}^{(4)}) + O(h^3), \\ y_i^{(5)} &= s_{i+}^{(5)} - \frac{1}{2h}\delta^2 s_i^{(4)} + O(h^5), &(5.63) \end{aligned}$$

και, επειδή (βλ. (5.2)) για $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$,

$$s^{(5)}(x) = \frac{1}{h}(s_{i+1}^{(4)} - s_i^{(4)}) \quad \Rightarrow \quad s_{i+}^{(5)} = \frac{1}{h}(s_{i+1}^{(4)} - s_i^{(4)}),$$

η (5.63) μπορεί να εκφραστεί ως

$$y_i^{(5)} = \frac{1}{h}(s_{i+1}^{(4)} - s_{i-1}^{(4)}) + O(h^2).$$

Χρησιμοποιώντας την (5.49),

$$\frac{1}{h^2}\delta^2 s_i^{(2)} = \frac{1}{h^2}\delta^2 y_i^{(2)} + \frac{1}{720}h^2\delta^2 y_i^{(6)} + O(h^3), \quad i = 1, 2, \ldots, k-1.$$

$\Rightarrow$ Αναπτύσσοντας κατά Taylor στο σημείο x_i,

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2}\delta^2 s_i^{(2)} &= \frac{1}{h^2}(h^2 y_i^{(4)} + \frac{1}{12}h^4 y_i^{(6)} + O(h^7)) + \frac{1}{720}h^2(O(h)) \\ &= y_i^{(4)} + \frac{1}{12}h^2 y_i^{(6)} + O(h^3), \quad i = 1, 2, \ldots, k-1. \end{aligned}$$

Άρα, από την (5.51),

$$s_i^{(4)} = \frac{1}{h^2}\delta^2 s_i^{(2)} + O(h^3), \quad i = 1, 2, \ldots, k-1. \tag{5.64}$$

Τέλος, η (5.62) σε συνδυασμό με το πιο πάνω αποτέλεσμα δίνει ότι, για $i = 2, 3, \ldots, k-2$,

$$\begin{aligned} s_i^{(4)} &= s_i^{(2)} - \frac{1}{720}\delta^4 s_i^{(2)} + O(h^5) \\ &= \frac{1}{720}\{-s_{i-2}^{(2)} + 4s_{i-1}^{(2)} + 714s_i^{(2)} + 4s_{i+1}^{(2)} - s_{i+2}^{(2)}\} + O(h^5). \end{aligned}$$

Σημείωση: Από τις (5.55) και (5.64) προκύπτει επίσης ότι

$$y_i^{(6)} = \frac{1}{h^4}\delta^4 s_i^{(2)} + O(h), \quad i = 2, 3, \ldots, k-2.$$

$\Rightarrow$ Στην (5.58) οι προσεγγίσεις $\widetilde{y}_i^{(6)}$, που δίνονται από την (5.59), μπορούν να αντικατασταθούν, για $i = 2, 3, \ldots, k-2$, από τις

$$\widetilde{y}_i^{(6)} = \frac{1}{h^4}\delta^4 s_i^{(2)}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Συναρτήσεις B-spline

6.1 Για $n = 1$,

$$\begin{aligned} F[x_0, x_1] &= (f_1 g_1 - f_0 g_0)/(x_1 - x_0) \\ &= \{f_0(g_1 - g_0) + (f_1 - f_0)g_1\}/(x_1 - x_0) \\ &= f(x_0)g[x_0, x_1] + f[x_0, x_1]g(x_1). \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Ο τύπος ισχύει για $n = 1$.

Υποθέτουμε ότι ο τύπος ισχύει για $n = k$. Τότε

$$F[x_0, x_1, \dots, x_{k+1}] = \frac{1}{x_{k+1} - x_0}\{F[x_1, x_2, \dots, x_{k+1}] - F[x_0, x_1, \dots, x_k]\},$$

όπου, από την επαγωγική υπόθεση,

$$F[x_0, x_1, \dots, x_k] = \sum_{r=0}^{k} f[x_o, x_1, \dots, x_r]g[x_r, x_{r+1}, \dots, x_k],$$

και

$$\begin{aligned} F[x_1, x_2, \dots, x_{k+1}] &= \sum_{r=1}^{k+1} f[x_1, x_2, \dots, x_r]g[x_r, x_{r+1}, \dots, x_{k+1}] \\ &= \sum_{r=0}^{k} f[x_1, x_2, \dots, x_{r+1}]g[x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_{k+1}]. \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$F[x_0, x_1, \dots, x_{k+1}] = \{\sum_{r=0}^{k+1} d_r\}/(x_{k+1} - x_0),$$

όπου

$$\begin{aligned}
d_r &= f[x_1,x_2,\ldots,x_{r+1}]g[x_{r+1},x_{r+2},\ldots,x_{k+1}] - f[x_0,x_1,\ldots,x_r]g[x_r,x_{r+1},\ldots,x_k] \\
&= f[x_0,x_1,\ldots,x_r]\{g[x_{r+1},x_{r+2}\ldots,x_{k+1}] - g[x_r,x_{r+1},\ldots,x_k]\} \\
&\quad + g[x_{r+1},x_{r+2}\ldots,x_{k+1}]\{f[x_1,x_2,\ldots,x_{r+1}] - f[x_0,x_1,\ldots,x_r]\} \\
&= f[x_0,x_1,\ldots,x_r]g[x_r,x_{r+1},\ldots,x_{k+1}](x_{k+1}-x_r) \\
&\quad + f[x_0,x_1,\ldots,x_{r+1}]g[x_{r+1},x_{r+2},\ldots,x_{k+1}](x_{r+1}-x_0) \\
&= (x_{k+1}-x_r)c_r + (x_{r+1}-x_0)c_{r+1},
\end{aligned}$$

με

$$c_r = f[x_0,x_1,\ldots,x_r]g[x_r,x_{r+1},\ldots,x_{k+1}].$$

Άρα,

$$\begin{aligned}
F[x_0,x_1,\ldots,x_{k+1}] &= \{\sum_{r=0}^{k} d_r\}/(x_k - x_0) \\
&= \{\sum_{r=0}^{k}[(x_{k+1}-x_r)c_r + (x_{r+1}-x_0)c_{r+1}]\}/(x_{k+1}-x_0) \\
&= \sum_{r=0}^{k+1} c_r = \sum_{r=0}^{k+1} f[x_0,x_1,\ldots,x_r]g[x_r,x_{r+1},\ldots,x_{k+1}].
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Ο τύπος ισχύει για $n = k+1$. $\Rightarrow$ Ο τύπος ισχύει $\forall n \in \mathbb{N}$.

6.2

$$F(x,t) := \int_{x_0}^{x} f(\xi,t)d\xi$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
F[x;x_0,x_1,\ldots,x_n] &= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k F(x,x_k) \\
&= \int_{x_0}^{x}\{\sum_{k=0}^{n}\alpha_k f(\xi,x_k)\}d\xi \\
&= \int_{x_0}^{x} f[\xi;x_0,x_1,\ldots,x_n]d\xi,
\end{aligned}$$

βλ. Παρατήρηση 6.10.

(i)

$$\begin{aligned}
\int_{x_i}^{x} M_n(\xi;t)d\xi &= \int_{x_i}^{x}(t-\xi)_+^{n-1}d\xi \\
&= -\frac{1}{n}\{(t-x)_+^n - (t-x_i)^n\}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\int_{x_i}^{x} M_{n,i}(\xi)d\xi \quad &\equiv \quad \frac{1}{n}\ [\text{η } n \text{ διηρημένη διαφορά της συνάρτησης} \\ &\quad (t-x_i)^n - (t-x)_+^n = (t-x_i)^n - M_{n+1}(x;t), \\ &\quad \text{ως προς τη μεταβλητή } t, \text{ στα σημεία } x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n}].\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\int_{x_i}^{x} M_{n,i}(\xi)d\xi = \frac{1}{n}\{1 - M_{n+1}[x; x_i, \dots, x_{i+n}]\}.$$

(ii) $M_{n+1}(x;t) = (t-x)M_n(x;t) \Rightarrow$ Εφαρμόζοντας τον τύπο Leibniz:

$$\begin{aligned}M_{n+1}[x; x_i, , \dots, x_{i+n}] \quad &= \quad (x_i - x)M_n[x; x_i, \dots, x_{i+n}] + 1 \cdot M_n[x; x_{i+1}, \dots, x_{i+n}] \\ &= \quad (x_i - x)M_{n,i}(x) + M_n[x; x_{i+1}, \dots, x_{i+n}]. \qquad (6.39)\end{aligned}$$

Με τον ίδιο τρόπο,

$$\begin{aligned}&M_n[x; x_{i+1}, \dots, x_{i+n}] = (x_{i+1} - x)M_{n-1,i+1}(x) + M_{n-1}[x; x_{i+2}, \dots, x_{i+n}], \\ &M_{n-1}[x; x_{i+2}, \dots, x_{i+n}] = (x_{i+2} - x)M_{n-2,i+2}(x) + M_{n-2}[x; x_{i+3}, \dots, x_{i+n}], \\ &\text{κ.λ.π.}\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Η αναδρομική εφαρμογή του (6.39) δίνει:

$$\begin{aligned}M_{n+1}[x; x_i, \dots, x_{i+n}] \quad &= \quad (x_i - x)M_{n,i}(x) + (x_{i+1} - x)M_{n-1,i+1}(x) \\ &\qquad + \cdots + (x_{i+n-1} - x)M_{1,i+n-1}(x) + M_1(x; x_{i+n}) \\ &= \quad \sum_{r=1}^{n}(x_{i+n-r} - x)M_{r,i+n-r}(x) + 1,\end{aligned}$$

επειδή $M_1(x; x_{i+n}) = (x_{i+n} - x)_+^0 = 1$.

(iii) Το ζητούμενο αποτέλεσμα προκύπτει αμέσως από τα αποτελέσματα των (i) και (ii).

6.3 Για $x \in (x_i, x_{i+1})$,

$$M_{1,i}(x) = \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \neq 0.$$

Υποθέτουμε ότι $M_{n-1,j} \neq 0$, για $x \in (x_j, x_{j+n-1})$. Τότε η (6.30) $\Rightarrow$

$$M_{n,i}(x) = \frac{1}{x_{i+n} - x_i}\{(x - x_i)M_{n-1,i}(x) + (x_{i+n} - x)M_{n-1,i+1}(x)\} > 0,$$

για $x \in (x_i, x_{i+n})$, επειδή: (i) $(x - x_i) > 0$ και $(x_{i+n} - x) > 0$, για $x \in (x_{i+n}, x_i)$, και (ii) από την επαγωγική υπόθεση,

$$M_{n-1,i}(x) > 0, \text{ για } x \in (x_i, x_{i+n-1}), \text{ και } M_{n-1,i+1}(x) > 0, \text{ για } x \in (x_{i+1}, x_{i+n}).$$

$\Rightarrow$ Για $n \geq 1$, $M_{n,i}(x) > 0$, $x \in (x_i, x_{i+n})$.

6.4 Για $n = 1$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} M_{1,i}(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{x_{i+1} - x_i} dx = 1.$$

$\Rightarrow$ Το αποτέλεσμα ισχύει για $n = 1$.

Υποθέτουμε ότι το αποτέλεσμα ισχύει για $n = k - 1$, $k > 1$. Τότε, χρησιμοποιώντας τον αναδρομικό τύπο (6.30),

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} M_{k,i}(x)dx &= \int_{x_i}^{x_{i+k}} M_{k,i}(x)dx \\
&= \frac{1}{x_{i+k} - x_i} \int_{x_i}^{x_{i+k}} \{(x - x_i)M_{k-1,i}(x) \\
&\qquad + (x_{i+k} - x)M_{k-1,i+1}(x)\}dx \\
&= \frac{1}{x_{i+k} - x_i} \{ \int_{-\infty}^{\infty} [x_{i+k} M_{k-1,i+1}(x) - x_i M_{k-1,i}(x)]dx \\
&\qquad + \int_{x_i}^{x_{i+k}} x[M_{k-1,i}(x) - M_{k-1,i+1}(x)]dx \}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, από την επαγωγική υπόθεση και τον τύπο (6.35),

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} M_{k,i}(x)dx &= \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k-1} \int_{x_i}^{x_{i+k}} x M_{k,i}^{(1)}(x)dx \\
&= \frac{1}{k-1} \{1 + [x M_{k,i}(x)]_{x_i}^{x_{i+k}} - \int_{x_i}^{x_{i+k}} M_{k,i}(x)dx\} \\
&= \frac{1}{k-1} \{1 - \int_{-\infty}^{\infty} M_{k,i}(x)dx\},
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\int_{-\infty}^{\infty} M_{k,i}(x)dx = 1/k.$$

$\Rightarrow$ Το αποτέλεσμα ισχύει για $n = k$ $\Rightarrow$ Το αποτέλεσμα ισχύει $\forall n \in \mathbb{N}$.

6.5 Ο αναδρομικός τύπος (6.30) είναι

$$M_{n,i}(x) = \frac{1}{x_{i+n} - x_i} \{(x - x_i)M_{n-1,i}(x) + (x_{i+n} - x)M_{n-1,i+1}(x)\}.$$

Άρα, αν $M_{n,i}(x) = N_{n,i}(x)/(x_{i+n} - x_i)$, τότε

$$\frac{N_{n,i}(x)}{x_{i+n} - x_i} = \frac{1}{x_{i+n} - x_i} \{ \frac{x - x_i}{x_{i+n-1} - x_i} N_{n-1,i}(x) + \frac{x_{i+n} - x}{x_{i+n} - x_{i+1}} N_{n-1,i+1}(x)\},$$

$\Rightarrow$

$$N_{n,i}(x) = p_i(x) N_{n-1,i}(x) + q_i(x) N_{n-1,i+1}(x),$$

όπου

$$p_i(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+n-1} - x_i} \quad \text{και} \quad q_i(x) = \frac{x_{i+n} - x}{x_{i+n} - x_{i+1}}.$$

Συνεπώς

$$\sum_{i=-n+1}^{0} c_i N_{n,i}(x) =$$

$$\begin{aligned} & c_{-n+1}p_{-n+1}(x)N_{n-1,-n+1}(x) + c_{-n+1}q_{-n+1}(x)N_{n-1,-n+2}(x) \\ & + c_{-n+2}p_{-n+2}(x)N_{n-1,-n+2}(x) + c_{-n+2}q_{-n+2}(x)N_{n-1,-n+3}(x) \\ & + c_{-n+3}p_{-n+3}(x)N_{n-1,-n+3}(x) + c_{-n+3}q_{-n+3}(x)N_{n-1,-n+4}(x) \\ & + \cdots + \cdots + \cdots + \cdots + c_0p_0(x)N_{n-1,0}(x) + c_0q_0(x)N_{n-1,1}(x). \end{aligned}$$

Όμως αν $x \in [x_0, x_1)$, τότε $N_{n-1,-n+1}(x) = N_{n-1,1}(x) = 0$. Άρα

$$\begin{aligned} \sum_{i=-n+1}^{0} c_i N_{n,i}(x) &= \sum_{i=-n+2}^{0} \{c_i p_i(x) + c_{i-1}q_{i-1}(x)\} N_{n-1,i}(x) \\ &= \sum_{i=-n+2}^{0} c_i^{[1]} N_{n-1,i}(x), \end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned} c_i^{[1]}(x) &= c_i p_i(x) + c_{i-1}q_{i-1}(x) \\ &= \frac{(x - x_i)c_i + (x_{i+n-1} - x)c_{i-1}}{x_{i+n-1} - x_i}. \end{aligned}$$

Η αναδρομική εφαρμογή του πιο πάνω αποτελέσματος δίνει

$$\begin{aligned} \sum_{i=-n+1}^{0} c_i N_{n,i}(x) &= \sum_{i=-n+2}^{0} c_i^{[1]} N_{n-1,i}(x) \\ &= \sum_{i=-n+3}^{0} c_i^{[2]} N_{n-2,i}(x) \\ &= \cdots = \cdots = \cdots \\ &= \sum_{i=-n+r+1}^{0} c_i^{[r]}(x) N_{n-r,i}(x), \quad x \in [x_0, x_1), \end{aligned}$$

όπου, για $r = 1, 2, \ldots, n-1$,

$$c_i^{[r]}(x) = \frac{(x - x_i)c_i^{[r-1]}(x) + (x_{i+n-r} - x)c_{i-1}^{[r-1]}(x)}{x_{i+n-r} - x_i}.$$

6.6 Για $x \in [x_j, x_{j+1})$,

$$\begin{aligned} s(x) &= \sum_{i=j-n+1}^{j} c_i N_{n,i}(x) \\ &= \sum_{i=j-n+r+1}^{j} c_i^{[r]}(x) N_{n-r,i}(x), \quad 1 \le r \le n-1. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Με $r = n-1$,

$$\begin{aligned} s(x) &= \sum_{i=j}^{j} c_i^{[n-1]}(x) N_{1,i}(x) \\ &= c_j^{[n-1]}(x) N_{1,j}(x) \\ &= c_j^{[n-1]}(x), \end{aligned}$$

επειδή $N_{1,j}(x) = 1$, για $x \in [x_j, x_{j+1})$, και $N_{1,j}(x) = 0$, για $x \notin [x_j, x_{j+1})$.

6.7 Από την (6.35),

$$M_{n,i}^{(1)}(x) = -\frac{(n-1)}{nh}\{M_{n-1,i+1}(x) - M_{n-1,i}(x)\}.$$

Συνεπώς, αν $s(x) = \sum_{i=-n+1}^{k} c_i M_{n,i}(x)$, τότε

$$s^{(1)}(x) = \sum_{i=-n+1}^{k} c_i M_{n,i}^{(1)}(x) = -\frac{(n-1)}{nh} \sum_{i=-n+1}^{k} c_i \{M_{n-1,i+1}(x) - M_{n,i}(x)\}.$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} s^{(1)}(x) &= -\frac{(n-1)}{nh}\{c_{-n+1}M_{n-1,-n+2}(x) - c_{-n+1}M_{n-1,-n+1}(x) \\ &\qquad + c_{-n+2}M_{n-1,-n+3}(x) - c_{-n+2}M_{n-1,-n+2} \\ &\qquad + c_{-n+3}M_{n-1,-n+4}(x) - c_{-n+3}M_{n-1,-n+3}(x) \\ &\qquad + \cdots - \cdots \\ &\qquad c_k M_{n-1,k+1}(x) - c_k M_{n-1,k}(x)\}. \end{aligned}$$

Όμως $M_{n-1,-n+1}(x) = M_{n-1,k+1}(x) = 0$ για $x \in [x_0, x_k]$. Άρα

$$\begin{aligned} s^{(1)}(x) &= \frac{(n-1)}{nh}\{(c_{-n+2} - c_{-n+1})M_{n-1,-n+2}(x) \\ &\qquad + (c_{-n+3} - c_{-n+2})M_{n-1,-n+3}(x) \\ &\qquad + \cdots \\ &\qquad + (c_k - c_{k-1})M_{n-1,k}(x)\}. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$s^{(1)}(x) = \frac{(n-1)}{nh} \sum_{i=-n+2}^{k} (\nabla c_i) M_{n-1,i}(x).$$

$\Rightarrow$ Το αποτέλεσμα ισχύει για $r = 1$.

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο μπορούμε να δείξουμε, πιο γενικά, ότι αν

$$t(x) = \sum_{i=-n+l}^{k} \alpha_i M_{n-l+1,i}(x),$$

τότε

$$t^{(1)}(x) = \frac{(n-l)}{(n-l+1)h} \sum_{i=-n+l+1}^{k} (\nabla \alpha_i) M_{n-l,i}(x). \tag{6.40}$$

Υποθέτουμε τώρα ότι το αποτέλεσμα ισχύει για $r = k-1$, δηλαδή ότι

$$s^{(k-1)}(x) = \frac{(n-k+1)}{nh^{k-1}} \sum_{i=-n+k}^{k} (\nabla^{k-1} c_i) M_{n-k+1,i}(x).$$

Τότε, από την επαγωγική υπόθεση και το αποτέλεσμα (6.40),

$$\begin{aligned} s^{(k)}(x) &= \frac{(n-k+1)}{nh^{k-1}} \sum_{i=-n+k+1}^{k} \frac{(n-k)}{(n-k+1)h} \nabla(\nabla^{k-1} c_i) M_{n-k,i}(x) \\ &= \frac{(n-k)}{nh^k} \sum_{i=-n+k+1}^{k} (\nabla^k c_i) M_{n-k,i}(x). \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Το αποτέλεσμα ισχύει για $r = k$ $\Rightarrow$ Το αποτέλεσμα ισχύει για $r = 1, 2, \ldots, n-1$.

Αν

$$s(x) = \sum_{i=-5}^{k} c_i M_{6,i}(x),$$

τότε

$$s^{(2)}(x) = \frac{4}{6h^2} \sum_{i=-3}^{k} (c_i - 2c_{i-1} + c_{i-2}) M_{4,i}(x),$$

και

$$s^{(4)}(x) = \frac{2}{6h^4} \sum_{i=-1}^{k} (c_i - 4c_{i-1} + 6c_{i-2} - 4c_{i-3} + c_{i-4}) M_{2,i}(x).$$

$\Rightarrow$ Χρησιμοποιώντας τις τιμές των $M_{n,i}(x_j)$, $n = 2, 4, 6$,

$$\begin{aligned} s_i &= \frac{1}{720h}\{c_{i-1} + 26c_{i-2} + 66c_{i-3} + 26c_{i-4} + c_{i-5}\} \\ s_i^{(2)} &= \frac{1}{36h^3}\{c_{i-1} + 2c_{i-2} - 6c_{i-3} + 2c_{i-4} + c_{i-5}\} \\ s_i^{(4)} &= \frac{1}{6h^5}\{c_{i-1} - 4c_{i-2} + 6c_{i-3} - 4c_{i-4} + c_{i-5}\}. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} &-\frac{h^2}{120}\{s_{i-1}^{(4)} + 8s_i^{(4)} + s_{i+1}^{(4)}\} + \frac{1}{h^2}\{s_{i-1} - 2s_i + s_{i+1}\} \\ &\qquad = \frac{1}{36h^3}\{c_{i-1} + 2c_{i-2} - 6c_{i-3} + 2c_{i-4} + c_{i-5}\} \\ &\qquad = s_i^{(2)}, \quad i = 1, 2, \ldots, k-1. \end{aligned}$$

6.8 Η B-spline αναπαράσταση της s είναι:

$$s(x) = \sum_{j=-3}^{k} c_{4+j} M_{4,j}(x), \quad x \in [x_0, x_{k+1}].$$

$\Rightarrow$ Επειδή

$$M_{4,i-1}(x_i) = 1/24h, \quad M_{4,i-2}(x_i) = 4/24h, \quad M_{4,i-3}(x_i) = 1/24h,$$

και $M_{4,j}(x_i) = 0$ για $j < i - 3$ και $j > i$, οι συνθήκες παρεμβολής οδηγούν στις πιο κάτω $k + 2$ εξισώσεις:

$$c_{i+1} + 4c_{i+2} + c_{i+3} = 24hy_i, \quad i = 0, 1, \ldots, k+1.$$

Επίσης, από την (6.36),

$$M_{4,j}^{(2)}(x) = \frac{1}{2h^2}\{M_{2,j+2}(x) - 2M_{2,j+1}(x) + M_{2,j}(x)\}$$
$$\Rightarrow s^{(2)}(x) = \frac{1}{2h^2}\sum_{j=-3}^{k} c_{4+j}\{M_{2,j+2}(x) - 2M_{2,j+1}(x) + M_{2,j}(x)\}.$$

Άρα (επειδή $M_{2,i-1}(x_i) = 1/2h$ και $M_{2,j}(x_i) = 0$, για $j \neq i - 1$),

$$s^{(2)}(x_i) = \frac{1}{4h^3}\{c_{i+1} - 2c_{i+2} + c_{i+3}\}, \quad i = 0, 1, \ldots, k+1.$$

$\Rightarrow$ Οι συνθήκες άκρων οδήγουν στις εξισώσεις

$$c_1 - 2c_2 + c_3 = 4h^3\alpha \ \text{ και } \ c_{k+2} - 2c_{k+3} + c_{k+4} = 4h^3\beta.$$

$\Rightarrow$ Οι συνθήκες παρεμβολής και άκρων οδηγούν σε ένα $(k+4)\times(k+4)$ γραμμικό σύστημα για τον υπολογισμό των $k + 4$ παραμέτρων c_i, $i = 1, 2, \ldots, k+4$, της αναπαράστασης της s. Το σύστημα αυτό μπορεί να εκφραστεί στη μορφή:

$$\begin{aligned}
&c_1 - 2c_2 + c_3 = 4h^3\alpha \\
&c_2 = 4hy_0 - \frac{2}{3}h^3\alpha \\
&4c_3 + c_4 = 24hy_1 - 4hy_0 + \frac{2}{3}h^3\alpha \\
&c_{i+1} + 4c_{i+2} + c_{i+3} = 24hy_i, \quad i = 2, 3, \ldots, k-1, \\
&c_{k+1} + 4c_{k+2} = 24hy_k - 4hy_{k+1} + \frac{2}{3}h^3\beta \\
&c_{k+3} = 4hy_{k+1} - \frac{2}{3}h^3\beta \\
&c_{k+2} - 2c_{k+3} + c_{k+4} = 4h^3\beta.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Το κύριο κόστος κατασκευής της s είναι το κόστος επίλυσης ενός $k \times k$ τριδιαγώνιου γραμμικού συστήματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Η επίλυση προβλημάτων συνοριακών τιμών

7.1 Η αναπαράσταση B-spline της $\widetilde{s}$ είναι

$$\widetilde{s}(x) = \sum_{j=-3}^{k-1} c_{4+j} M_{4,j}(x), \quad x \in [x_0, x_k].$$

$\Rightarrow$ Από τη λύση της Άσκησης 6.8,

$$\widetilde{s}_i = \frac{1}{24h}\{c_{i+1} + 4c_{i+2} + c_{i+3}\}, \quad i = 0, 1, \ldots, k, \tag{7.82}$$

$$\widetilde{s}_i^{(2)} = \frac{1}{4h^3}\{c_{i+1} - 2c_{i+2} + c_{i+3}\}, \quad i = 0, 1, \ldots, k. \tag{7.83}$$

Επίσης, από την (6.33),

$$M_{4,j}^{(1)}(x) = \frac{3}{4h}\{M_{3,j+1}(x) - M_{3,j}(x)\}$$

$$\Rightarrow \widetilde{s}^{(1)}(x) = \frac{3}{4h} \sum_{j=-3}^{k} c_{4+j}\{M_{3,j+1}(x) - M_{3,j}(x)\}. \tag{7.84}$$

Άρα, επειδή

$M_{3,i-1}(x_i) = 1/6h = M_{3,i-2}(x_i)$ και $M_{3,j}(x_i) = 0$ για $j < i-2$ και $j > i-1$,

$$\widetilde{s}_i^{(1)} = \frac{1}{8h^2}\{c_{i+1} - c_{i+3}\}, \quad i = 0, 1, \ldots, k.$$

Η $\widetilde{s}$ πληροί τις συνθήκες

$$\begin{aligned} &\widetilde{s}_0 = 0 \\ &\widetilde{s}_i^{(2)} + p_i \widetilde{s}_i^{(1)} + q_i \widetilde{s}_i = r_i, \quad i = 0, 1, \ldots, k, \\ &\widetilde{s}_k = 0. \end{aligned}$$

Συνεπώς (χρησιμοποιώντας τις (7.82)-(7.84)), το γραμμικό σύστημα για τον προσδιορισμό των $k+3$ συντελεστών c_j, $j = 1, 2, \dots, k+3$, είναι

$$\begin{aligned}
&c_1 + 4c_2 + c_3 = 0 \\
&\alpha_i c_{i+1} + \beta_i c_{i+2} + \gamma_i c_{i+3} = \delta_i, \quad i = 0, 1, \dots, k, \\
&c_{k+1} + 4c_{k+2} + c_{k+3} = 0
\end{aligned}$$

όπου

$\alpha_i = 6 + 3hp_i + h^2 q_i$, $\beta_i = -4(3 - h^2 q_i)$, $\gamma_i = 6 - 3hp_i + h^2 q_i$ και $\delta_i = 24h^3 r_i$.

Παρατηρούμε ότι το πιο πάνω γραμμικό σύστημα μπορεί να εκφραστεί στη μορφή

$$c_1 + 4c_2 + c_3 = 0$$

$$\begin{aligned}
&(\beta_0 - 4\alpha_0)c_2 + (\gamma_0 - \alpha_0)c_3 = \delta_0 \\
&\alpha_i c_{i+1} + \beta_i c_{i+2} + \gamma_i c_{i+3} = \delta_i, \quad i = 1, 2, \dots, k-1, \\
&(\alpha_k - \gamma_k)c_{k+1} + (\beta_k - 4\gamma_k)c_{k+2} = \delta_k
\end{aligned}$$

$$c_{k+1} + 4c_{k+2} + c_{k+3} = 0$$

$\Rightarrow$ Το κύριο κόστος κατασκευής της $\widetilde{s}$ είναι το κόστος επίλυσης ενός $(k+1)\times(k+1)$ τριδιαγωνίου γραμμικού συστήματος.

7.2 Για $i = 0, 1, \dots, k-1$,

$$s_{i+}^{(3)} = \frac{1}{h}(s_{i+1}^{(2)} - s_i^{(2)}), \quad \text{και} \quad \widetilde{s}_{i+}^{(3)} = \frac{1}{h}(\widetilde{s}_{i+1}^{(2)} - \widetilde{s}_i^{(2)}).$$

Πιο γενικά, για $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, k-1$,

$$s^{(3)}(x) = \frac{1}{h}(s_{i+1}^{(2)} - s_i^{(2)}), \quad \text{και} \quad \widetilde{s}^{(3)}(x) = \frac{1}{h}(\widetilde{s}_{i+1}^{(2)} - \widetilde{s}_i^{(2)}). \tag{7.85}$$

$\Rightarrow$ Χρησιμοποιώντας την (7.66),

$$\widetilde{s}_{i+}^{(3)} - s_{i+}^{(3)} = \frac{1}{h}\{(\widetilde{s}_{i+1}^{(2)} - s_{i+1}^{(2)}) + (\widetilde{s}_i^{(2)} - s_i^{(2)})\} = O(h^3), \ i = 0, 1, \dots, k-1,$$

και πιο γενικά (λόγω της (7.85)),

$$||\widetilde{s}^{(3)} - s^{(3)}|| == O(h^3).$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
||\widetilde{s}^{(3)} - y^{(3)}|| &= ||\widetilde{s}^{(3)} - s^{(3)} + s^{(3)} - y^{(3)}|| \\
&\leq ||\widetilde{s}^{(3)} - s^{(3)}|| + ||s^{(3)} - y^{(3)}|| = O(h),
\end{aligned}$$

επειδή

$$||s^{(3)} - y^{(3)}|| = O(h).$$

Έχουμε δείξει ότι

$$s^{(3)}(x) - \widetilde{s}^{(3)}(x) = O(h^3), \quad x \in [a,b].$$

Επίσης, η (7.72) με $j = 3 \Rightarrow$

$$y^{(3)}(x) - Y^{(3)}(x) = O(h^3), \quad x \in [a,b].$$

$\Rightarrow$ Ακολουθώντας τη διαδικασία που οδήγησε στο αποτέλεσμα (7.75) καταλήγουμε εύκολα στο συμπέρεσμα ότι

$$y^{(3)}(x) = \widetilde{Y}^{(3)}(x) + O(h^3), \quad x \in [a,b].$$

7.3 (i) Η διαφορική εξίσωση $\Rightarrow$

$$y_i^{(4)} + q_i y_i = r_i, \quad i = 0, 1, \ldots, k.$$

Άρα, οι συνοριακές συνθήκες $y_0 = y_k = 0 \Rightarrow y_i^{(4)} = r_i$, $i = 0, k$. Επίσης, οι συνοριακές συνθήκες $y_0^{(2)} = y_k^{(2)} = 0$ σε συνδυασμό με τις συνθήκες άκρων της s $\Rightarrow s_i^{(2)} = -h^2 y_i^{(4)}/12$, $i = 0, k$. Συνεπώς,

$$s_i^{(2)} = -\frac{h^2}{12} r_i, \quad i = 0, k. \tag{7.86}$$

Από την Άσκηση 4.7,

$$y_i^{(4)} = \frac{1}{h^2}\delta^2 s_i^{(2)} + O(h^2), \quad i = 1, 2, \ldots, k-1.$$

$\Rightarrow$ Η s πληροί τις συνθήκες

$$\frac{1}{h^2}\delta^2 s_i^{(2)} + q_i y_i = r_i + O(h^2), \quad i = 1, 2, \ldots, k-1,$$

ή (χρησιμοποιώντας τις (7.86))

$$\begin{aligned}
&-2s_1^{(2)} + s_2^{(2)} + h^2 q_1 y_1 = h^2(\frac{1}{12} r_0 + r_1) + \varepsilon_1, \\
&\delta^2 s_i^{(2)} + h^2 q_i y_i = h^2 r_i + \varepsilon_i, \quad i = 2, 3, \ldots, k-2, \\
&s_{k-2}^{(2)} - 2s_{k-1}^{(2)} + h^2 q_{k-1} y_{k-1} = h^2(\frac{1}{12} r_k + r_{k-1}) + \varepsilon_{k-1},
\end{aligned}$$

όπου $\varepsilon_i = O(h^4)$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Το σύστημα αυτό μπορεί να εκφραστεί σε μορφή πινάκων ως

$$B\underline{s}^{(2)} + h^2 Q\underline{y} = h^2\underline{r} + \underline{\varepsilon}, \tag{7.87}$$

όπου $B, Q \in \mathbb{R}^{k-1,k-1}$ είναι αντίστοιχα ο δεύτερος τριδιαγώνιος πίνακας της (7.34) και ο διαγώνιος πίνακας $Q := \mathrm{diag}(\mathrm{q}_1, \mathrm{q}_2, \ldots, \mathrm{q}_{\mathrm{k}-1})$, και $\underline{s}^{(2)}, \underline{y}, \underline{r}, \underline{\varepsilon} \in \mathbb{R}^{k-1}$ τα διανύσματα

$$\begin{aligned}
&\underline{s}^{(2)} := [s_1^{(2)}, s_2^{(2)}, \ldots, s_{k-1}^{(2)}]^T, \quad \underline{y} := [y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}]^T = [s_1, s_2, \ldots, s_{k-1}]^T, \\
&\underline{r} := [\frac{1}{12} r_0 + r_1, r_2, \ldots, r_{k-2}, \frac{1}{12} r_k + r_{k-1}]^T, \text{ και } \underline{\varepsilon} := [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{k-1}]^T.
\end{aligned}$$

(ii) Η συνάρτηση $\widetilde{s}$ ορίζεται από το γραμμικό σύστημα

$$B\underline{\tilde{s}}^{(2)} + h^2 Q\underline{\tilde{s}} = h^2\underline{r}, \tag{7.88}$$

όπου

$$\underline{\tilde{s}}^{(2)} := [\widetilde{s}_1^{(2)}, \widetilde{s}_2^{(2)}, \dots, \widetilde{s}_{k-1}^{(2)}]^T \quad \text{και} \quad \underline{\tilde{s}} := [\widetilde{s}_1, \widetilde{s}_2, \dots, \widetilde{s}_{k-1}]^T.$$

Οι συναρτήσεις s και $\widetilde{s}$ πληρούν επίσης τις εξισώσεις συνέχειας (7.32), οι οποίες (λόγω της (7.86)) μπορούν να εκφραστούν σε μορφή πινάκων ως

$$A\underline{s}^{(2)} = \frac{6}{h^2}B\underline{y} + h^2\underline{\rho}, \tag{7.89}$$

και

$$A\underline{\tilde{s}}^{(2)} = \frac{6}{h^2}B\underline{\tilde{s}} + h^2\underline{\rho}, \tag{7.90}$$

όπου $A, B \in \mathrm{I\!R}^{k-1,k-1}$ είναι οι τριδιαγώνιοι πίνακες (7.34) και $\underline{\rho} \in \mathrm{I\!R}^{k-1}$ το διάνυσμα

$$\underline{\rho} := [\frac{1}{12}r_0, 0, \dots, 0, \frac{1}{12}r_k]^T.$$

Από την Ενότητα 7.4(ii) γνωρίζουμε ότι ο πίνακας B είναι αντιστρέψιμος και

$$||B^{-1}||_\infty \le (b-a)^2/8h^2.$$

Συνεπώς, από την (7.87),

$$\underline{s}^{(2)} = -h^2B^{-1}Q\underline{y} + h^2B^{-1}\underline{r} + B^{-1}\underline{\varepsilon}.$$

Άρα, από την (7.89),

$$\begin{aligned} -h^2AB^{-1}Q\underline{y} + h^2AB^{-1}\underline{r} + AB^{-1}\underline{\varepsilon} &= \frac{6}{h^2}B\underline{y} + h^2\underline{\rho}, \\ \Rightarrow (I + \frac{h^4}{6}B^{-1}AB^{-1}Q)\underline{y} &= \frac{h^4}{6}(B^{-1}AB^{-1}\underline{r} - B^{-1}\underline{\rho}) \\ &\quad + \frac{h^2}{6}B^{-1}AB^{-1}\underline{\varepsilon}. \end{aligned} \tag{7.91}$$

Με ανάλογο τρόπο, οι (7.88) και (7.90) $\Rightarrow$

$$(I + \frac{h^4}{6}B^{-1}AB^{-1}Q)\underline{\tilde{s}} = \frac{h^4}{6}(B^{-1}AB^{-1}\underline{r} - B^{-1}\underline{\rho}) \tag{7.92}$$

Έστω $C := h^4B^{-1}AB^{-1}Q/6$. Τότε

$$\begin{aligned} ||C||_\infty &\le \frac{h^4}{6}||B^{-1}||_\infty||A||_\infty||B^{-1}||_\infty||Q||_\infty \\ &\le \frac{h^4}{6} \times \frac{(b-a)^4}{64h^4} \times 6 \times ||q|| = \frac{(b-a)^4}{64}||q||. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Αν

$$||q|| < 64/(b-a)^4, \tag{7.93}$$

τότε $||C||_\infty < 1$. $\Rightarrow$ Ο πίνακας $I + C$ ειναι αντιστρέψιμος και

$$||(I+C)^{-1}||_\infty = ||(I + \frac{h^4}{6}B^{-1}AB^{-1}Q)^{-1}||_\infty \leq \frac{64}{64-(b-a)^4||q||}.$$

Συνεπώς, αν η συνάρτηση q πληροί τη συνθήκη (7.93), τότε το γραμμικό σύστημα (7.92) έχει τη μοναδική λύση

$$\underline{\tilde{s}} = \frac{h^4}{6}(I + \frac{h^4}{6}B^{-1}AB^{-1}Q)^{-1}(B^{-1}AB^{-1}\underline{r} - B^{-1}\underline{\rho}).$$

Άρα και το διάνυσμα $\underline{\tilde{s}}^{(2)}$ ορίζεται μονοσήμαντα από την (7.88). Τα πιο πάνω αποδεικνύουν τη μοναδική ύπαρξη της προσεγγιστικής συνάρτησης spline $\widetilde{s}$. (Βλ. Ενότητα 3.2.)

Οι (7.91) και (7.92) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} &\underline{y} - \underline{\tilde{s}} = \frac{h^2}{6}(I + \frac{h^4}{6}B^{-1}AB^{-1}Q)^{-1}B^{-1}AB^{-1}\varepsilon \\ \Rightarrow\ &||\underline{y} - \underline{\tilde{s}}||_\infty \leq \frac{h^2}{6} \times \frac{64}{64-(b-a)^4||q||} \times \frac{(b-a)^2}{8h^2} \times 6 \times \frac{(b-a)^2}{8h^2}||\varepsilon||_\infty, \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$||\underline{y} - \underline{\tilde{s}}||_\infty = O(h^2) \quad \Rightarrow \quad \widetilde{s}_i - y_i = O(h^2),\ i = 0, 1, \ldots, k.$$

Επίσης, οι (7.87) και (7.88) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} &\underline{s}^{(2)} - \underline{\tilde{s}}^{(2)} = -h^2B^{-1}Q(\underline{y} - \underline{\tilde{s}}) + B^{-1}\underline{\varepsilon}, \\ \Rightarrow\ &||\underline{s}^{(2)} - \underline{\tilde{s}}^{(2)}||_\infty \leq h^2||B^{-1}||_\infty||Q||_\infty||(\underline{y} - \underline{\tilde{s}})||_\infty + ||B^{-1}||_\infty||\underline{\varepsilon}||_\infty. \end{aligned}$$

Άρα,

$$||\underline{s}^{(2)} - \underline{\tilde{s}}^{(2)}||_\infty = O(h^2) \quad \Rightarrow \quad \widetilde{s}_i^{(2)} - s_i^{(2)} = O(h^2),\ i = 0, 1, \ldots, k.$$

$\Rightarrow$ Ακολουθώντας τη διαδικασία που οδήγησε από τα αποτελέσματα (7.43)-(7.44) στα αποτελέσματα (7.45)-(7.46) (βλ. Παρατήρηση 7.3), καταλήγουμε στο ζητούμενο συμπέρασμα ότι

$$||\widetilde{s}^{(j)} - y^{(j)}|| = O(h^2), \quad j = 0, 1, 2.$$

Σημείωση: Αν $y \in C^8[a, b]$ και οι συνθήκες άκρων της s είναι τέτοιες ώστε (βλ. Παρατήρηση 4.8 και Άσκηση 4.5)

$$\nu_i := s_i^{(2)} - y_i^{(2)} + \frac{h^2}{12}y_i^{(4)} - \frac{h^4}{360}y_i^{(6)} = O(h^6),\ i = 0, 1, \ldots, k,$$

τότε είναι εύκολο να δειχτεί ότι

$$y_i^{(4)} = \frac{1}{h^2}\delta^2 s_i^{(2)} + O(h^4), \quad i = 1, 2, \ldots, k-1.$$

(Βλ. π.χ. [32, σελ. 494] και [40, σελ. 89-90].) $\Rightarrow$ Η εφαρμογή κατάλληλων συνθηκών άκρων σε συνδυασμό με το πιο πάνω αποτέλεσμα οδηγεί σε μια, κάπως πιο πολύπλοκη, διαδικασία προσδιοροσμού της προσεγγιστικής συυνάρτησης spline $\widetilde{s}$, έτσι ώστε

$$||\widetilde{s}^{(j)} - y^{(j)}|| = O(h^{4-j}), \quad j = 0, 1, 2.$$

(Βλ. N. Papamichael and A.J. Worsey, *A cubic spline method for the solution of a linear fourth-order two-point boundary value problem*, J. Comput. Appl. Math. **7** (1981), 187-189.)