Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής

Αριθμητική Ανάλυση ΙΙ
(ΜΑΣ 271)

Χειμερινό Εξάμηνο 2004-05
Διδάσκων: Νικόλας Παπαμιχαήλ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Προκαταρκτικά

1.1 Συμβολισμοί

- $\mathbb{N}$: σύνολο φυσικών αριθμών,
- $\mathbb{N}_0$: σύνολο φυσικών αριθμών μαζί με το μηδέν,
- $\mathbb{Z}$: σύνολο ακέραιων αριθμών,
- $\mathbb{R}$: σύνολο πραγματικών αριθμών,
- $\mathbb{R}^n$: γραμμικός χώρος των n-διάστατων διανυσμάτων $\underline{x} = (x_i)$ με $x_i \in \mathbb{R}$,
- $\mathbb{R}^{n,n}$: γραμμικός χώρος των $n \times n$ πινάκων $A = (a_{i,j})$ με $a_{i,j} \in \mathbb{R}$,
- $\mathbb{C}$: σύνολο μιγαδικών αριθμών,
- $\mathbb{C}^n$: γραμμικός χώρος των n-διάστατων διανυσμάτων $\underline{x} = (x_i)$ με $x_i \in \mathbb{C}$,
- $\mathbb{C}^{n,n}$: γραμμικός χώρος των $n \times n$ πινάκων $A = (a_{i,j})$ με $a_{i,j} \in \mathbb{C}$,
- $\underline{o}$: μηδενικό διάνυσμα των $\mathbb{C}^n$ και $\mathbb{R}^n$,
- $\mathcal{O}$: μηδενικός πίνακας των $\mathbb{C}^{n,n}$ και $\mathbb{R}^{n,n}$,
- I: μοναδιαίος (ταυτοτικός) πίνακας των $\mathbb{C}^{n,n}$ και $\mathbb{R}^{n,n}$,
- $\mathbb{P}_n$: σύνολο πραγματικών πολυωνύμων βαθμού $\leq n$,
- $C^n[a,b]$: σύνολο πραγματικών συναρτήσεων μιας μεταβλητής με n συνεχείς παραγώγους στο διάστημα $[a,b]$,
- $y^{(n)}$: η n παράγωγος μιας συνάρτησης y, δηλαδή

$$y^{(n)}(x) := \frac{d^n y}{dx^n}.$$

1.2 Γραμμική Άλγεβρα - Βασικοί ορισμοί και θεωρήματα

Ορισμός 1.1 Έστω k ο αριθμός των γραμμικώς ανεξαρτήτων ιδιοδιανυσμάτων ενός πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n,n}$. (i) Αν $k = n$, τότε ο A λέγεται "μη-ελλιπής" (non-defective). (ii) Αν $k < n$, τότε ο A λέγεται "ελλιπής" (defective).

Θεώρημα 1.1 *Αν ο $A \in C^{n,n}$ έχει n διακεκριμένες ιδιοτιμές, τότε ο A είναι μη-ελλιπής.*

Ορισμός 1.2 (i) Ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ είναι "όμοιος" με ένα πίνακα $B \in \mathbb{C}^{n,n}$ αν $\exists$ ένας αντιστρέψιμος πίνακας $P \in \mathbb{C}^{n,n}$ τέτοιος ώστε $B = PAP^{-1}$. (ii) Ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ λέγεται "διαγωνίσιμος" αν είναι όμοιος με ένα διαγώνιο πίνακα.

Θεώρημα 1.2 *Δύο όμοιοι πίνακες έχουν ακριβώς τις ίδιες ιδιοτιμές.* (Βλ. Άσκηση 1.1)

Θεώρημα 1.3 *Ένας πίνακας $A \in C^{n,n}$ είναι διαγωνίσιμος αν και μόνο αν είναι μη-ελλιπής.* (Βλ. Άσκηση 1.2.)

Θεώρημα 1.4 *Έστω $A \in C^{n,n}$ ένας ερμιτιανός πίνακας.* (Δηλ. $A^H = A$ όπου $A^H = \overline{A}^T$ και $\overline{A}$ είναι ο συζυγής του A.) *Τότε:*

(i) *Οι ιδιοτιμές του A είναι πραγματικές.* (Βλ. Άσκηση 1.3 (i).)

(ii) *Τα ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν σε διακεκριμένες ιδιοτιμές είναι ορθογώνια.* (Δηλ. αν $A\underline{x}^{(1)} = \lambda_1\underline{x}^{(1)}$ και $A\underline{x}^{(2)} = \lambda_2\underline{x}^{(2)}$, με $\lambda_1 \neq \lambda_2$, τότε $(\underline{x}^{(1)}, \underline{x}^{(2)}) = 0$, όπου $(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{u}^H\underline{v}$ ειναι το "εσωτερικό γινόμενο" δύο διανυσμάτων $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Βλ. Άσκηση 1.3 (ii).)

(iii) *Ο A έχει ένα πλήρες "ορθοκανονικό" σύνολο ιδιοδιανυσμάτων.* (Δηλ. στις n πραγματικές ιδιοτιμές λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, του A αντιστοιχούν n ιδιοδιανύσματα $\underline{x}^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, τέτοια ώστε $(\underline{x}^{(i)}, \underline{x}^{(j)}) = \delta_{i,j}$.)

Ορισμός 1.3 Ένας ερμιτιανός πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ λέγεται "θετικά ορισμένος" (positive definite) αν $\underline{x}^H Ax > 0$, $\forall \underline{x} \in C^n$, $\underline{x} \neq \underline{0}$. Ο A λέγεται "μη-αρνητικά ορισμένος " (non-negative definite) αν $\underline{x}^H Ax \geq 0$, $\forall \underline{x} \in \mathbb{C}^n$.

Ορισμός 1.4 Ένας συμμετρικός πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ λέγεται θετικά ορισμένος αν $\underline{x}^T A\underline{x} > 0$, $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $x \neq \underline{0}$. Ο A λέγεται μη-αρνητικά ορισμένος αν $\underline{x}^T A\underline{x} \geq 0$, $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$.

Θεώρημα 1.5 *Αν $A = (a_{i,j}) \in C^{n,n}$ είναι ερμιτιάνος και θετικά ορισμένος (μη-αρνητικά ορισμένος), τότε $a_{i,i} > 0$ ($a_{i,i} \geq 0$), $i = 1, 2, \ldots, n$.* (Βλ. Άσκηση 1.6.)

Θεώρημα 1.6 *Ένας ερμιτιανός πίνακας $A \in C^{n,n}$ είναι θετικά ορισμένος (μη-αρνητικά οριμσένος) αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές του είναι θετικές (μη-αρνητικές).* (Βλ. Άσκηση 1.7.)

Πόρισμα 1.1 *Έστω $A \in C^{n,n}$ ένας ερμιτιανός και θετικά ορισμένος πίνακας. Τότε:*

(i) $\det A > 0$. (Συνεπώς ο A είναι αντιστρέψιμος.)

(ii) *Ο A^{-1} είναι ερμιτιανός και θετικά ορισμένος.*

(iii) *Οι κύριοι υποπίνακες $A_k \in C^{k,k}$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, του A είναι ερμιτιανοί και θετικά ορισμένοι.*

(Βλ. Άσκηση 1.8.)

Παρατήρηση 1.1 Είναι άμεσα προφανές ότι: (i) Τα αποτελέσματα του Θεωρήματος 1.4 ισχύουν και στην περίπτωση που ο $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ είναι συμμετρικός. (ii) Τα αποτελέσματα των Θεωρήματων 1.5 και 1.6 καθώς και του Πορίσματος 1.1 ισχύουν και στην περίπτωση που ο $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ είναι συμμετρικός και θετικά (μη-αρνητικά) ορισμένος.

Ασκήσεις

1.1 Έστω $A, B \in \mathbb{C}^{n,n}$ δύο όμοιοι πίνακες. (Δηλ. $B = PAP^{-1}$ για κάποιο πίνακα $P \in \mathbb{C}^{n,n}$.) Δείξτε ότι: (i) Οι A, B έχουν ακριβώς τις ίδιες ιδιοτιμές. (ii) Αν $\underline{x}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ του A, τότε $P\underline{x}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ του B.

1.2 Δείξτε οτι ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ είναι διαγωνίσιμος αν και μονο αν είναι μη-ελλιπής.

1.3 Δείξτε ότι αν ο $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ είναι ερμιτιανός, τότε: (i) Οι ιδιοτιμές του A είναι πραγματικές. (ii) Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διακεκριμένες ιδιοτιμές του A είναι ορθογώνια.

1.4 Δείξτε ότι κάθε ορθογώνιο σύνολο διανυσμάτων $\underline{x}_i \in \mathbb{C}^n$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $\underline{x}_i \neq \underline{0}$, είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

1.5 Έστω $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ένας ερμιτιανός πίνακας. Δείξτε ότι $\exists$ ένας unitary (ορθοκανονικός) πίνακας P (δηλ. $P^H P = PP^H = I$) τέτοιος ώστε

$$P^H A P = \mathrm{diag}(\lambda_i),$$

όπου λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, είναι οι ιδιοτιμές του A. (**Υπόδειξη:** Βλ. Άσκηση 1.2 και Θεώρημα 1.4 (iii))

1.6 Έστω $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{C}^{n,n}$ ένας ερμιτιανός και θετικά (μη-αρνητικά) ορισμένος πίνακας. Δείξτε ότι $a_{i,i} > 0$ ($a_{i,i} \geq 0$), $i = 1, 2, \ldots, n$.

1.7 Δείξτε ότι ένας ερμιτιανός πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ είναι θετικά (μη-αρνητικά) ορισμένος αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές του είνα θετικές (μη-αρνητικές).

1.8 Έστω $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ένας ερμιτιανός και θετικά ορισμένος πίνακας. Δείξτε ότι:

(i) $\det A > 0$.

(ii) Ο A^{-1} είναι ερμιτιανός και θετικά ορισμένος.

(iii) Οι κύριοι υποπίνακες του A είναι ερμιτιανοί και θετικά ορισμένοι.

1.9 Δείξτε ότι, για κάθε $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, ο πίνακας $A^H A$ είναι ερμιτιανός και μη-αρνητικά ορισμένος. Δείξτε επίσης ότι ο $A^H A$ είνα θετικά ορισμένος αν και μόνο αν $\det A \neq 0$.

1.10 Δείξτε οτι αν ο $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ είναι ερμιτιανός και θετικά (μη-αρνητικά) ορισμένος, τότε $\exists$ ένας ερμιτιανός και θετικά (μη-αρνητικά) ορισμένος πίνακας $B \in \mathbb{C}^{n,n}$ τέτοιος ώστε $A = B^2$.

1.11 Έστω $A = P + iQ \in \mathbb{C}^{n,n}$, όπου $P, Q \in \mathbb{R}^{n,n}$. Δείξτε ότι ο A είναι ερμιτιανός αν και μόνο αν ο P είναι συμμετρικός και ο Q αντισυμμετρικός (δηλ. $Q^T = -Q$). Δείξτε επίσης ότι αν ο A είναι ερμιτιανός και θετικά ορισμένος, τότε ο P είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος.

1.12 Προσδιορίστε τις τρεις ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του συμμετρικού πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Στη συνέχεια, προσδιορίστε ένα ορθογώνιο πίνακα X τέτοιο ώστε $X^T A X = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

1.13 Δείξτε ότι η επίλυση ενός $n \times n$ μιγαδικού γραμμικού συστήματος της μορφής

$$(P + iQ)(\underline{x} + i\underline{y}) = \underline{b} + i\underline{c},$$

όπου $P, Q \in \mathbb{R}^{n,n}$ και $\underline{b}, \underline{c}, \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$, μπορεί να αναχθεί στην επίλυση ενός $2n \times 2n$ πραγματικού γραμμικού συστήματος.

Έστω C ο 2×2 μιγαδικός πίνακας

$$C = \begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ -2 & -1+i \end{bmatrix}.$$

Προσδιορίστε την LU-παραγοντοποίηση του αντίστοιχου 4×4 πραγματικού πίνακα και στη συνέχεια προσδιορίστε την πρώτη στήλη του C^{-1}.

Λύσεις Ασκήσεων

1.1 Έστω λ_i και $\underline{x}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, οι ιδιοτιμές και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του A. Τότε:

$$\begin{aligned} & B = PAP^{-1} \Rightarrow BP = PA \Rightarrow BP\underline{x}_i = PA\underline{x}_i, \ i = 1, 2, \ldots, n, \\ & \Rightarrow B(P\underline{x}_i) = \lambda_i(P\underline{x}_i), \ i = 1, 2 \ldots, n. \end{aligned}$$

Συνεπώς ο B έχει ιδιοτιμές λ_i με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $P\underline{x}_i$.

1.2 Έστω λ_i και $\underline{x}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, οι ιδιοτιμές και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του A. Τότε:

$$A\underline{x}_i = \lambda_i \underline{x}_i, \ i = 1, 2, \ldots, n, \Rightarrow AX = X\mathrm{diag}(\lambda_i),$$

όπου $X := [\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n] \in \mathbb{C}^{n,n}$ είναι ο πίνακας που έχει ως στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A. Επομένως: Ο A είναι μη-ελλίπης $\Rightarrow$ Τα $\underline{x}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, είναι γραμμικά ανεξάρτητα $\Rightarrow$ Ο X είναι αντιστρέψιμος $\Rightarrow$ $X^{-1}AX = \mathrm{diag}(\lambda_i) \Rightarrow$ Ο A είναι διαγωνίσιμος.

Αντιστρόφως: Ο A είναι διαγωνίσιμος $\Rightarrow \exists$ ένας αντιστρέψιμος πίνακας $V = [\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n] \in \mathbb{C}^{n,n}$ τ.ω. $V^{-1}AV = \mathrm{diag}(d_i) \Rightarrow AV = V\mathrm{dia}(d_i) \Rightarrow A\underline{v}_i = d_i\underline{v}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n \Rightarrow d_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, είναι οι ιδιοτιμές και $\underline{v}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του A. Όμως τα $\underline{v}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, είναι γραμμικά ανεξάρτητα επειδή ο V είναι αντιστρέψιμος $\Rightarrow$ Ο A είναι μη-ελλιπής.

1.3 (i) Έστω λ μια ιδιοτιμή και $\underline{x}$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα του A. Τότε:

$$\begin{aligned} & A\underline{x} = \lambda\underline{x} \Rightarrow \underline{x}^H A^H = \overline{\lambda}\underline{x}^H \Rightarrow \underline{x}^H A = \overline{\lambda}\underline{x}^H \\ & \Rightarrow \underline{x}^H A\underline{x} = \overline{\lambda}\underline{x}^H\underline{x} \Rightarrow \lambda\underline{x}^H\underline{x} = \overline{\lambda}\underline{x}^H\underline{x} \Rightarrow (\lambda - \overline{\lambda})\underline{x}^H\underline{x} = 0. \end{aligned}$$

Συνεπώς: $A^H = A \Rightarrow \lambda = \overline{\lambda}$, διότι $\underline{x}^H\underline{x} > 0 \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$.

(ii) Έστω λ_1, λ_2 δύο διακεκριμένες ιδιοτιμές και $\underline{x}_1, \underline{x}_2$ τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του A. Τότε:

$$\begin{aligned} & A\underline{x}_1 = \lambda_1\underline{x}_1, \ A\underline{x}_2 = \lambda_2\underline{x}_2 \Rightarrow \underline{x}_1^H A = \lambda_1\underline{x}_1^H \\ & \Rightarrow \underline{x}_1^H A\underline{x}_2 = \lambda_1\underline{x}_1^H\underline{x}_2 \Rightarrow \lambda_2\underline{x}_1^H\underline{x}_2 = \lambda_1\underline{x}_1^H\underline{x}_2. \end{aligned}$$

Συνεπώς $\underline{x}_1^H\underline{x}_2 = 0$, διότι $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

1.4 Έστω $\alpha_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Τότε:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\underline{x}_j = \underline{o} \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\underline{x}_i^H\underline{x}_j = 0, \ i = 1, 2, \ldots, n,$$

$\Rightarrow \alpha_i\underline{x}_i^H\underline{x}_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, διότι $\underline{x}_i^H\underline{x}_j = 0$, $i \neq j \Rightarrow \alpha_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, διότι $\underline{x}_i^H\underline{x}_i > 0$.

1.6 Ο A θετικά ορισμένος $\Rightarrow \underline{x}^H A\underline{x} > 0$, $\forall \underline{x} \neq \underline{o} \in \mathbb{C}^n \Rightarrow$ Ιδιαίτερα, αν $\underline{e}_i \equiv$ η i στήλη του I, τότε $0 < \underline{e}_i^H A\underline{e}_i = a_{i,i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. (Η ίδια ακριβώς διαδικασία δίνει $a_{i,i} \geq 0$, στην περίπτωση που ο A είναι μη-αρνητικά ορισμένος.)

1.7 Έστω λ_i και $\underline{x}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, οι ιδιοτιμές και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του A. Τότε: Ο A θετικά ορισμένος $\Rightarrow 0 < \underline{x}_i^H A \underline{x}_i = \lambda_i \underline{x}_i^H \underline{x}_i \Rightarrow \lambda_i > 0$, διότι $\underline{x}_i^H \underline{x}_i > 0$.

Αντιστρόφως: Ο A είναι ερμιτιανός και $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $\Rightarrow \exists$ ένας unitary πίνακας $P \in \mathbb{C}^{n,n}$ τ.ω. $A = PDP^H$, όπου $D := \mathrm{diag}(\lambda_i)$ (βλ. Άσκ. 1.5) $\Rightarrow$ Για $\underline{x} \in \mathbb{C}^n$,

$$\underline{x}^H A \underline{x} = \underline{x}^H PDP^H \underline{x} = \underline{y}^H D \underline{y},$$

όπου $\underline{y} := P^H \underline{x} \neq \underline{o}$, $\forall \underline{x} \neq \underline{o}$, διότι ο P είναι αντιστρέψιμος $\Rightarrow$

$$\underline{x}^H A \underline{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |y_i|^2 > 0, \quad \forall \underline{x} \neq \underline{o},$$

διότι $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $\Rightarrow$ Ο A είναι θετικά ορισμένος. (Ομοίως για την περίπτωση που ο A είναι μη-αρνητικά ορισμένος.)

1.8 (i) $\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$, όπου λ_i οι ιδιοτιμές του $A \Rightarrow \det A > 0$, διότι $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

(ii) $A = A^H \Rightarrow A^{-1} = (A^H)^{-1} = (A^{-1})^H \Rightarrow$ Ο A^{-1} είναι ερμιτιανός. Επίσης, οι ιδιοτιμές του A^{-1} είναι $\mu_i = 1/\lambda_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, όπου $\lambda_i > 0$ είναι οι ιδιοτιμές του $A \Rightarrow \mu_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n \Rightarrow$ Ο A^{-1} είναι θετικά ορισμένος.

(iii) Έστω $A_k \in \mathbb{C}^{k,k}$ $(1 \leq k \leq n)$ ο k κύριος υποπίνακας του A. Προφανώς: Ο A ερμιτιανός $\Rightarrow$ Ο A_k είναι ερμιτιανός.

Ο A είναι θετικά ορισμένος $\Rightarrow \underline{x}^H A \underline{x} > 0$, $\forall \underline{x} \neq \underline{o}$. Ιδιαίτερα, αν

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{x}_k \\ \underline{o}_{n-k} \end{bmatrix},$$

όπου $\underline{x}_k \neq \underline{o}_k \in \mathbb{C}^k$ και $\underline{o}_k$ το μηδενικό διάνυσμα του $\mathbb{C}^k$, τότε

$$0 < \underline{x}^H A \underline{x} = \underline{x}_k^H A_k \underline{x}_k,$$

$\Rightarrow \underline{x}_k^H A_k \underline{x}_k > 0$, $\forall \underline{x}_k \neq \underline{o} \Rightarrow$ Ο A_k είναι θετικά ορισμένος.

1.9 $(A^H A)^H = A^H A$ και $\underline{x}^H A^H A \underline{x} = (A\underline{x})^H A \underline{x} \geq 0$, $\forall \underline{x} \neq \underline{o} \Rightarrow$ ο $A^H A$ είναι ερμιτιανός και μη-αρνητικά ορισμένος.

Ο $A^H A$ θετικά ορισμένος $\Leftrightarrow \underline{x}^H A^H A \underline{x} = (A\underline{x})^H A \underline{x} > 0$, $\forall \underline{x} \neq \underline{o} \Leftrightarrow A\underline{x} \neq \underline{o}$, $\forall \underline{x} \neq \underline{o} \Leftrightarrow$ Ο A είναι αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow \det A \neq 0$.

1.10 Ο A ερμιτιανός και θετικά ορισμένος $\Rightarrow \exists$ ένας unitary πίνακας P τ.ω. $PAP^H = D$ όπου $D = \mathrm{diag}(\lambda_i)$ και $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, είναι οι ιδιοτιμές του $A \Rightarrow$

$$A = PDP^H = PD^{1/2} D^{1/2} P^H = PD^{1/2} PP^H D^{1/2} P^H$$

$\Rightarrow A = B^2$ όπου $B = PD^{1/2} P^H$ και $D^{1/2} = \mathrm{diag}(\lambda^{1/2})$.

Ο B είναι ερμιτιανός διότι:

$$B^H = (PD^{1/2}P^H)^H = PD^{1/2}P^H = B.$$

Επίσης:

$$\underline{x}^H B\underline{x} = \underline{x}^H PD^{1/2}P^H\underline{x} = \underline{y}^H D^{1/2}\underline{y},$$

όπου $\underline{y} = P^H\underline{x} \neq \underline{o}$, $\forall \underline{x} \neq \underline{o}$, διότι ο P είναι αντιστρέψιμος. Συνεπώς $\underline{x}^H B\underline{x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{1/2}|y_i|^2 > 0$, $\forall \underline{x} \neq \underline{o} \Rightarrow$ O A είναι θετικά ορισμένος. (Ομοίως για την περίπτωση που ο A είναι μη-αρνητικά ορισμένος.)

1.11 Ο A ερμιτιανός $\Leftrightarrow$

$$(P + iQ) = (P + iQ)^H = P^T - iQ^T$$

$\Leftrightarrow P = P^T$ και $Q = -Q^T \Leftrightarrow$ ο P είναι συμμετρικός και ο Q αντισυμμετρικός.

Ο A θετικά ορισμένος $\Rightarrow \underline{x}^H A\underline{x} > 0$, $\forall \underline{x} \neq \underline{o} \in \mathbb{C}^n$. Ιδιαίτερα, $\underline{x}^T A\underline{x} = \underline{x}^T(P + iQ)\underline{x} > 0$, $\forall \underline{x} \neq \underline{o} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \underline{x}^T P\underline{x} > 0$, $\forall \underline{x} \neq \underline{o} \in \mathbb{R}^n$, διότι

$$\underline{x}^T Q\underline{x} = (\underline{x}^T Q\underline{x})^T = \underline{x}^T Q^T\underline{x} = -\underline{x}^T Q\underline{x} \;\Rightarrow\; \underline{x}^T Q\underline{x} = 0.$$

1.12 Βλ. Άσκηση 1.2.

1.13 $(P + iQ)(\underline{x} + i\underline{y}) = \underline{b} + i\underline{c} \Rightarrow P\underline{x} - Q\underline{y} = \underline{b}$ και $Q\underline{x} + P\underline{y} = \underline{c} \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} P & -Q \\ Q & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{b} \\ \underline{c} \end{bmatrix},$$

$\Rightarrow A\underline{\chi} = \underline{\beta}$ όπου $A \in \mathbb{R}^{2n,2n}$ και $\underline{\beta}, \underline{\chi} \in \mathbb{R}^{2n}$.

Ο πίνακας $A \in \mathbb{R}^{4,4}$ που αντιστοιχεί στον C είναι

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

$\Rightarrow A = LU$, όπου

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Έστω

$$\underline{z} = \begin{bmatrix} x_1 + iy_1 \\ x_2 + iy_2 \end{bmatrix}$$

η πρώτη στήλη του C^{-1}. Τότε

$$C\underline{z} = \left[\begin{array}{c} 1+i0 \\ 0+i0 \end{array} \right].$$

$\Rightarrow A\underline{\chi} = \underline{\beta}$, όπου $\underline{\chi} = [x_1, x_2, y_1, y_2]^T$ και $\underline{\beta} = [1,0,0,0]^T$. $\Rightarrow$ Εφαρμόζοντας προς τα εμπρός και προς τα πίσω αντικαταστάσεις στο σύστημα $LU\underline{\chi} = \underline{\beta}$ βρίσκουμε ότι $\underline{\chi} = [-0.5, 0, -0.5, 1]^T$. $\Rightarrow$ Η πρώτη στήλη του πίνακα C^{-1} είναι

$$\left[\begin{array}{c} -0.5(1+i) \\ i \end{array} \right].$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Νόρμες διανυσμάτων και πινάκων

Ασκήσεις

2.1 Δείξτε ότι

$$||A^H A||_2 = ||A||_2^2 \quad \text{και} \quad ||A||_2^2 \leq ||A||_1 ||A||_\infty \ ,$$

όπου $A \in \mathbb{C}^{n,n}$.

2.2 Έστω $S \in C^{n,n}$ ένας unitary πίνακας. Δείξτε ότι

$$||S\underline{x}||_2 = ||\underline{x}||_2, \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{C}^n \ ,$$

και

$$||SA||_2 = ||AS||_2 = ||S^H AS||_2 = ||A||_2 \ , \quad \forall A \in \mathbb{C}^{n,n} \ .$$

2.3 Έστω $R \in \mathbb{R}^{3,3}$ ένας ορθογώνιος πίνακας με ιδιοτιμές $e^{i\alpha}$, $e^{-i\alpha}$ και 1. Δείξτε ότι

$$||R - R^T||_2 = 2\sin\alpha \quad \text{και} \quad ||R - I||_2 = 2\sin(\alpha/2) \ .$$

2.4 Έστω $A = (a_{i,j}) \in C^{n,n}$ ένας πίνακας με $|a_{i,j}| < 1$. Δείξτε ότι

$$||A - \lambda I||_2 \leq 2n \ ,$$

για κάθε ιδιοτιμή λ του A. (**Υπόδειξη:** Κάνετε χρήση των $|\lambda| \leq ||A||_2$ και $||A||_2 \leq ||A||_E$.)

2.5 Έστω $||\cdot||$ μια νόρμα πινάκων, $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ και $\mathcal{O}$ ο μηδενικός $n \times n$ πίνακας. Δείξτε ότι αν $||A|| < 1$, τότε

$$\lim_{k\to\infty} A^k = \mathcal{O}.$$

2.6 Έστω $A \in \mathbb{C}^{n.n}$ ένας μη-ελλιπής πίνακας και $\mathcal{O}$ ο $n \times n$ μηδενικός πίνακας. Δείξτε ότι

$$\lim_{k \to \infty} A^k = \mathcal{O},$$

αν και μόνο αν $\varrho(A) < 1$, όπου $\varrho(A)$ είναι η "φασματική ακτίνα" (spectral radius) του πίνακα A. (**Σημείωση:** Το αποτέλεσμα ισχύει, πιό γενικά, για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n,n}$.)

2.7 Έστω $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ και $||\cdot||$ μια επαγόμενη νόρμα πινάκων. Δείξτε ότι αν $||A|| < 1$, τότε οι πίνακες $I \pm A$ είναι αντιστρέψιμοι και

(i)

$$\frac{1}{1 + ||A||} \leq ||(I \pm A)^{-1}|| \leq \frac{1}{1 - ||A||} \ ,$$

(ii)

$$||(I \pm A)^{-1} - I|| \leq \frac{||A||}{1 - ||A||} \ .$$

2.8 Έστω $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $C \in \mathbb{R}^{n,n}$ μια αριθμητική προσέγγιση του A^{-1} και $R \in \mathbb{R}^{n,n}$ ο "πίνακας υπολοίπου" (residual matrix) $R := I - AC$. Δείξτε ότι αν $||R|| < 1$ (όπου $||\cdot||$ είναι μια επαγόμενη νόρμα πινάκων), τότε οι πίνακες A και C είναι αντιστρέψιμοι και

(i)

$$||A^{-1}|| \leq \frac{||C||}{1 - ||R||},$$

(ii)

$$||C - A^{-1}|| \leq \frac{||C||||R||}{1 - ||R||} \ .$$

(**Σημείωση:** Τα φράγματα στα δεξιά των δυο ανισοτήτων μπορούν να υπολογιστούν.)

2.9 Έστω $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ένας αντιστρέψιμος πίνακας και $\delta A \in \mathbb{R}^{n,n}$ μια διαταραχή του A (δηλ. ένας πίνακας "μικρών μεταβολών" (perturbations) του A) τέτοια ώστε

$$||A^{-1}||||\delta A|| < 1,$$

όπου $||\cdot||$ μια επαγόμενη νόρμα πινάκων. Δείξτε τα πιο κάτω:

(i) Ο διαταραγμένος πίνακας $A + \delta A$ είναι αντιστρέψιμος.

(ii) Αν $\underline{x}$ είναι η ακριβής λύση του γραμμικού συστήματος

$$A\underline{x} = \underline{b}\ , \quad \underline{b} \in \mathbb{R}^n\ ,$$

και $\underline{x} + \delta\underline{x}$ η ακριβής λύση του διαταραγμένου συστήματος

$$(A + \delta A)(\underline{x} + \delta\underline{x}) = \underline{b} + \delta\underline{b}\ , \quad \delta\underline{b} \in \mathbb{R}^n\ ,$$

τότε

$$\frac{||\delta\underline{x}||}{||\underline{x}||} \le \frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A)\frac{||\delta A||}{||A||}}\left(\frac{||\delta\underline{b}||}{||\underline{b}||} + \frac{||\delta A||}{||A||}\right)\ ,$$

όπου

$$\kappa(A) := ||A||||A^{-1}||$$

είναι ο "αριθμός (δείκτης) κατάστασης" (condition number) του πίνακα A.

2.10 Η μέθοδος "επαναληπτικής βελτίωσης" (iterative refinement) μιας προσεγγιστικής λύσης $\underline{x}^{(0)}$ ενός γραμμικού συστήματος

$$A\underline{x} = \underline{b}, \quad A \in \mathbb{R}^{n,n}, \quad \underline{b} \in \mathbb{R}^n, \quad \det A \neq 0,$$

περιγράφεται θεωρετικά από την

$$(A + \delta A)\underline{x}^{(k+1)} = \underline{b} + \delta A\underline{x}^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots\ .$$

Δείξτε ότι αν $||A^{-1}\delta A|| < 1/2$, όπου $||\cdot||$ είναι μια επαγόμενη νόρμα πινάκων, τότε

$$\underline{x} - \underline{x}^{(k+1)} = (I + A^{-1}\delta A)^{-1}A^{-1}\delta A(x - x^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots\ ,$$

και

$$\lim_{k\to\infty} \underline{x}^{(k)} = \underline{x}.$$

2.11 Έστω $B = (b_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ ένας τριδιαγώνιος πίνακας με μη-μηδενικά στοιχεία

$$b_{i,i} = 1, \quad b_{i,i-1} = b_{i+1,i} = 1/4, \quad i = 1.2, \dots, n,$$

και $E \in \mathbb{R}^{n,n}$ ένας πίνακας με $||E||_\infty = \varepsilon < 1/2$. Δείξτε ότι αν $\underline{x}$ και $\underline{y}$ είναι οι λύσεις των συστημάτων

$$B\underline{x} = \underline{b} \quad \text{και} \quad (B + E)\underline{y} = \underline{b},$$

τότε

$$||\underline{y}||_\infty \le \frac{2}{1 - 2\varepsilon}||\underline{b}||_\infty \quad \text{και} \quad ||\underline{y} - \underline{x}||_\infty \le \frac{4\varepsilon}{1 - 2\varepsilon}||\underline{b}||_\infty\ .$$

Λύσεις Ασκήσεων

2.1

$$||A^HA||_2^2 = \varrho\{(A^HA)^H(A^HA)\} = \varrho\{(A^HA)^2\} = \{\varrho(A^HA)\}^2 = ||A||_2^4,$$
$$\Rightarrow ||A^HA||_2 = ||A||_2^2.$$

$$||A||_2^2 = \varrho(A^HA) \le ||A^HA||_\infty \le ||A^H||_\infty ||A||_\infty = ||A||_1 ||A||_\infty.$$

2.2

$$||S\underline{x}||_2^2 = \underline{x}^H S^H S\underline{x} = \underline{x}^H \underline{x} = ||\underline{x}||_2^2 \;\Rightarrow\; ||S\underline{x}||_2 = ||\underline{x}||_2.$$

$$||SA||_2^2 = \varrho\{(SA)^H SA\} = \varrho\{A^H S^H SA\} = \varrho(A^HA) = ||A||_2^2.$$

$$||AS||_2^2 = \varrho\{(AS)^H AS\} = \varrho\{S^H A^H AS\} = \varrho(A^HA) = ||A||_2^2,$$

διότι οι πίνακες S^HA^HAS και A^HA είναι όμοιοι $\Rightarrow$ έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

$$\begin{aligned} ||S^HAS||_2^2 &= \varrho\{(S^HAS)^H S^HAS\} = \varrho\{S^HA^HS^HAS\} = \varrho\{S^HA^HAS\} \\ &= \varrho(A^HA) = ||A||_2^2. \end{aligned}$$

Ομοίως,

$$||SA||_E = ||AS||_E = ||S^HAS||_E = ||A||_E,$$

διότι

$$||SA||_E^2 = \text{trace}\{(SA)^H SA\} = \text{trace}\{A^HS^HSA\} = \text{trace}(A^HA) = ||A||_E^2, \quad \text{κ.λ.π.}$$

2.3 $||R - R^T||_2^2 = \varrho(A)$, όπου

$$\begin{aligned} A &= (R - R^T)^T(R - R^T) = (R^T - R)(R - R^T) \\ &= R^TR - (R^T)^2 - R^2 + RR^T = 2I - (R^{-1})^2 - R^2. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Στις ιδιοτιμές $e^{i\alpha}$, $e^{-i\alpha}$ και 1 του R αντιστοιχούν οι πιο κάτω ιδιοτιμές του A:

$$\begin{aligned} &2 - e^{-2i\alpha} - e^{2i\alpha} = 2 - 2\cos\alpha = 4\sin^2\alpha, \\ &2 - e^{2i\alpha} - e^{-2i\alpha} = 2 - 2\cos\alpha = 4\sin^2\alpha, \\ &2 - 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\varrho(A) = 4\sin^2\alpha \quad \Rightarrow \quad ||R - R^T||_2 = 2\sin\alpha.$$

Ομοίως $||R - I||_2^2 = \varrho(B)$, όπου

$$B = (R - I)^T(R - I) = 2I - R^{-1} - R, \; \text{κ.λ.π.}$$

2.4

$$||A-\lambda I||_2 \leq ||A||_2 + |\lambda|||I||_2 = ||A||_2 + |\lambda| \leq 2||A||_2 \leq 2||A||_E,$$

όπου

$$||A||_E^2 = \sum_i \sum_j |a_{i,j}|^2 < n^2 \quad \Rightarrow \quad ||A||_E < n.$$

Άρα

$$||A-\lambda I||_2 < 2n.$$

2.5 $||A^k|| \leq \{||A||\}^k \Rightarrow$ Αν $||A|| < 1$, τότε

$$\lim_{k\to\infty} ||A^k|| = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} A^k = \mathcal{O}.$$

2.6 Έστω λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, οι ιδιοτιμές του A. O A είναι μη-ελλιπής $\Rightarrow \exists$ ένας αντιστρέψιμος πίνακας X τ.ω.

$$X^{-1}AX = D, \quad \text{όπου} \;\; D = \mathrm{diag}(\lambda_i).$$

$\Rightarrow$

$$A = XDX^{-1} \Rightarrow A^2 = XD^2X^{-1}, A^3 = XD^3X^{-1}, \cdots, A^m = XD^mX^{-1},$$

όπου $D^m = \mathrm{diag}(\lambda_i^m)$. $\Rightarrow A^m \to \mathcal{O}$ ανν $D^m \to \mathcal{O} \Rightarrow$ ανν $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$ $\Rightarrow$ ανν $\varrho(A) < 1$.

2.7 $|\lambda_i| \leq ||A||$, όπου λ_i οι ιδιοτιμές του $A \Rightarrow$ Αν $||A|| < 1$, τότε $|\lambda_i| < 1 \Rightarrow \lambda_i \neq \pm 1 \Rightarrow \det(I \pm A) \neq 0 \Rightarrow$ οι πίνακες $I \pm A$ είναι αντιστρέψιμοι.

Έστω $G = (I \pm A)^{-1}$. Τότε:

(i)

$$\begin{aligned} I = G(I \pm A) \;&\Rightarrow\; I = G + (\pm G)A \;\Rightarrow\; ||I|| \leq ||G|| + ||G||||A|| \\ &\Rightarrow\; 1 \leq ||G||(1 + ||A||) \;\Rightarrow\; 1/\{1 + ||A||\} \leq ||G||. \end{aligned}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} I = G - (\mp G)A \;&\Rightarrow ||I|| \geq ||G|| - ||G||||A|| \\ &\Rightarrow\; 1 \geq ||G||(1 - ||A||) \;\Rightarrow ||G|| \leq 1/\{1 - ||A||\}. \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} &(I \pm A)^{-1} - I = G - I = G - G(I \pm A) = \mp GA \\ &\Rightarrow ||(I \pm A)^{-1} - I|| \leq ||G||||A|| \leq ||A||/\{1 - ||A||\}. \end{aligned}$$

2.8 $R = I - AC \Rightarrow AC = I - R$. Συνεπώς, $||R|| < 1 \Rightarrow |\lambda_i| < 1$, όπου λ_i οι ιδιοτιμές του $R \Rightarrow \det(I-R) \neq 0 \Rightarrow \det AC \neq 0 \Rightarrow \det A \neq 0$ και $\det C \neq 0 \Rightarrow$ Οι A και C είναι αντιστρέψιμοι.

(i) $AC = I - R \Rightarrow A = (I-R)C^{-1} \Rightarrow A^{-1} = C(I-R)^{-1} \Rightarrow ||A^{-1}|| \leq ||C||||(I-R)^{-1}||$. Συνεπώς, χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα (i) της Άσκησης 2.7,

$$||A^{-1}|| \leq \frac{||C||}{1-||R||} \ .$$

(ii) $C - A^{-1} = C - C(I-R)^{-1} = C\{I-(I-R)^{-1}\} \Rightarrow ||C-A^{-1}|| \leq ||C||||I-(I-R)^{-1}||$. Συνεπώς, χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα (ii) της Άσκησης 2.7,

$$||C-A^{-1}|| \leq \frac{||C||||R||}{1-||R||} \ .$$

2.9 (i) Έστω μ_i οι ιδιοτιμές του $A^{-1}\delta A$. Τότε, $||A^{-1}||||\delta A|| < 1 \Rightarrow |\mu_i| \leq ||A^{-1}\delta A|| \leq ||A^{-1}||||\delta A|| < 1 \Rightarrow \det(I + A^{-1}\delta A) \neq 0 \Rightarrow \det\{A^{-1}(A+\delta A)\} \neq 0$ $\Rightarrow \det(A+\delta A) \neq 0 \Rightarrow$ Ο $A + \delta A$ είναι αντιστρέψιμος.

(ii)

$$\begin{aligned}
& (A+\delta A)(\underline{x}+\delta\underline{x}) = \underline{b}+\delta\underline{b} \\
\Rightarrow\ & A\delta\underline{x} + \delta A\underline{x} + \delta A\delta\underline{x} = \delta\underline{b}, \text{ επειδή } A\underline{x} = \underline{b} \\
\Rightarrow\ & \delta\underline{x} + A^{-1}\delta A\underline{x} + A^{-1}\delta A\delta\underline{x} = A^{-1}\delta\underline{b} \\
\Rightarrow\ & (I + A^{-1}\delta A)\delta\underline{x} = -A^{-1}\delta A\underline{x} + A^{-1}\delta\underline{b} \\
\Rightarrow\ & \delta\underline{x} = (I + A^{-1}\delta A)^{-1}(-A^{-1}\delta A\underline{x} + A^{-1}\delta\underline{b}) \\
\Rightarrow\ & ||\delta\underline{x}|| \leq ||(I + A^{-1}\delta A)^{-1}||(||A^{-1}||||\delta A||||\underline{x}|| + ||A^{-1}||||\delta\underline{b}||)
\end{aligned}$$

Άρα, χρησιμοπιώντας το αποτέλεσμα (i) της Άσκησης 2.7,

$$\begin{aligned}
\frac{||\delta\underline{x}||}{||\underline{x}||} &\leq \frac{1}{1-||A^{-1}||||\delta A||}(||A^{-1}||||\delta A|| + ||A^{-1}||\frac{||\delta\underline{b}||}{||\underline{x}||}) \\
&= \frac{1}{1-||A||||A^{-1}||\frac{||\delta A||}{||A||}}(||A||||A^{-1}||\frac{||\delta A||}{||A||} + ||A||||A^{-1}||\frac{||\delta\underline{b}||}{||A||||\underline{x}||}) \\
&\leq \frac{\kappa(A)}{1-\kappa(A)\frac{||\delta A||}{||A||}}(\frac{||\delta A||}{||A||} + \frac{||\delta\underline{b}||}{||\underline{b}||}), \text{ επειδή } ||\underline{b}|| \leq ||A||||\underline{x}||.
\end{aligned}$$

2.10 $(A+\delta A)\underline{x}^{(k+1)} = \underline{b} + \delta A\underline{x}^{(k)} \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
(A+\delta A)(\underline{x}-\underline{x}^{(k+1)}) &= (A+\delta A)\underline{x} - A\underline{x} - \delta A\underline{x}^{(k)} \\
&= \delta A(\underline{x}-\underline{x}^{(k)}).
\end{aligned}$$

Συνεπώς, επειδή ο $A + \delta A$ είναι αντιστρέψιμος (βλ. Άσκηση 2.9),

$$\begin{aligned}
\underline{x}-\underline{x}^{(k+1)} &= (A+\delta A)^{-1}\delta A(\underline{x}-\underline{x}^{(k)}) \\
&= (I + A^{-1}\delta A)^{-1}A^{-1}\delta A(x - x^{(k)}).
\end{aligned}$$

Έστω $\underline{e}^{(k)} = \underline{x} - \underline{x}^{(k)}$. Τότε $\underline{e}^{(k+1)} = B\underline{e}^{(k)}$, όπου

$$B = (I + A^{-1}\delta A)^{-1} A^{-1}\delta A.$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \underline{e}^{(k)} = B\underline{e}^{(k-1)} = B^2\underline{e}^{(k-2)} = \cdots = B^k\underline{e}^{(0)} \\
&\Rightarrow \quad ||\underline{e}^{(k)}|| \leq ||B^k||||\underline{e}^{(0)}|| \leq ||B||^k||\underline{e}^{(0)}|| \\
&\Rightarrow \quad \text{Αν } ||B|| < 1, \text{ τότε } \lim_{k\to\infty} ||\underline{e}^{(k)}|| = 0, \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \underline{e}^{(k)} = \underline{o} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \underline{x}^{(k)} = \underline{x}.
\end{aligned}$$

Όμως,

$$\begin{aligned}
||B|| &= ||(I + A^{-1}\delta A)^{-1} A^{-1}\delta A|| \\
&\leq ||(I + A^{-1}\delta A)^{-1}||||A^{-1}\delta A|| \\
&\leq \frac{||A^{-1}\delta A||}{1 - ||A^{-1}\delta A||}, \text{ βλ. Άσκηση 2.7 (i).}
\end{aligned}$$

Άρα, αν $||A^{-1}\delta A|| < 1/2$, τότε $||B|| < 1 \Rightarrow$ Αν $||A^{-1}\delta A|| < 1/2$, τότε $\lim_{k\to\infty} \underline{x}^{(k)} = \underline{x}$.

2.11 Ο πίνακας B μπορεί να εκφραστεί ως $B = I + A$, όπου ο $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ είναι τριδιαγώνιος με $a_{i,i} = 0$ και $a_{i,i-1} = a_{i,i+1} = 1/4 \Rightarrow ||A||_\infty = 1/2 \Rightarrow$

$$||B^{-1}||_\infty = ||(I + A)^{-1}||_\infty \leq \frac{1}{1 - ||A||_\infty} = 2, \text{ βλ. Άσκηση 2.7(i).}$$

Ο πίνακας $B+E$ είναι αντιστρέψιμος, επειδή $B+E = B(1+B^{-1}E)$ και $||B^{-1}E||_\infty \leq ||B^{-1}||_\infty||E||_\infty \leq 2\varepsilon \leq 1$. Συνεπώς,

$$(B + E)\underline{y} = \underline{b} \;\Rightarrow\; \underline{y} = (B + E)^{-1}\underline{b} = (I + B^{-1}E)^{-1}B^{-1}\underline{b}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
||\underline{y}||_\infty &\leq ||(I + B^{-1}E)^{-1}||_\infty||B^{-1}||_\infty||\underline{b}||_\infty \\
&\leq \frac{||B^{-1}||_\infty}{1 - ||B^{-1}||_\infty||E||_\infty}||\underline{b}||_\infty, \\
&\leq \frac{2}{1 - 2\varepsilon}||\underline{b}||_\infty.
\end{aligned}$$

Τέλος, $(B + E)\underline{y} = B\underline{x} \Rightarrow B(\underline{y} - \underline{x}) = -E\underline{y} \Rightarrow \underline{y} - \underline{x} = -B^{-1}E\underline{y}$. Άρα

$$\begin{aligned}
||\underline{y} - \underline{x}||_\infty &\leq ||B^{-1}||_\infty||E||_\infty||\underline{y}||_\infty \\
&\leq \frac{4\varepsilon}{1 - 2\varepsilon}||\underline{b}||_\infty.
\end{aligned}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Μέθοδοι υπολογισμού ιδιοσυστημάτων

3.1 Μέθοδοι μετασχηματισμών ομοιότητας

(i) Η μέθοδος Givens για συμμετρικούς πίνακες

Ορισμός 3.1 Ένας πίνακας $R_{p,q} = (r_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ με στοιχεία

$$\begin{aligned} &r_{i,i} = 1, \ \forall i, \ i \neq p, q, \\ &r_{p,p} = \cos\theta, \quad r_{p,q} = -\sin\theta, \\ &r_{q,p} = \sin\theta, \quad r_{q,q} = \cos\theta, \end{aligned}$$

και τα υπόλοιπα στοιχεία $r_{i,j} = 0$ λέγεται "πίνακας περιστροφής" (rotation matrix) στο επίπεδο p, q. (Προφανώς ο $R_{p,q}$ είναι ορθογώνιος, δηλαδή $R_{p,q}^T R_{p,q} = R_{p,q} R_{p,q}^T = I$.)

Έστω $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ ένας συμμετρικός πίνακας και $T = (t_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ ο πίνακας που προκύπτει από τον ορθογώνιο μετασχηματισμό ομοιότητας (orthogonal similarity transformation)

$$A \to R_{p,q}^T A R_{p,q}, \quad \text{δηλ.} \ \ T = R_{p,q}^T A R_{p,q}.$$

Τότε είναι εύκολο να δειχτεί ότι

$$\begin{aligned} &t_{i,j} = a_{i,j}, \quad i \neq p, q, \ j \neq p, q, \\ &t_{i,p} = t_{p,i} = \mathrm{c}a_{i,p} + \mathrm{s}a_{i,q}, \quad i \neq p, q \\ &t_{i,q} = t_{q,i} = -\mathrm{s}a_{i,p} + \mathrm{c}a_{i,q}, \quad i \neq p, q \\ &t_{p,p} = \mathrm{c}^2 a_{p,p} + 2\mathrm{sc}a_{p,q} + \mathrm{s}^2 a_{q,q}, \\ &t_{q,q} = \mathrm{s}^2 a_{p,p} - 2\mathrm{sc}a_{p,q} + \mathrm{c}^2 a_{q,q}, \\ &t_{p,q} = t_{q,p} = -\mathrm{sc}(a_{p,p} - a_{q,q}) + (\mathrm{c}^2 - \mathrm{s}^2) a_{p,q}, \end{aligned}$$

όπου $\mathrm{c} := \cos\theta$ και $\mathrm{s} := \sin\theta$. $\Rightarrow$ Ο μετασχηματισμός επιρεάζει μόνο τα στοιχεία των p και q γραμμών και στηλών του A.

Η μέθοδος Givens ανάγει τον A σε ένα τριδιαγώνιο συμμετρικό πίνακα $A^{(N)}$ (που έχει τις ίδιες ιδιοτιμές με τον A) εφαρμόζοντας ένα πεπερασμένο αριθμό μετασχηματισμών ομοιότητας της μορφής:

$$\begin{aligned} A^{(0)} &= A, \\ A^{(k)} &= R_k^T A^{(k-1)} R_k, \quad k = 1, 2, \dots, N, \end{aligned}$$

όπου

• $N = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$.

• Για κάθε k, ο πίνακας R_k είναι ένας πίνακας περιστροφής $R_{p,q}$ με το θ επιλεγμένο έτσι ώστε

$$a^{(k)}_{p-1,q} = a^{(k)}_{q,p-1} = 0.$$

Οι μετασχηματισμοί εφαρμόζονται με την ακόλουθη σειρά, ώστε να μηδενιστούν διαδοχικά (κατά γραμμές και στήλες) όλα τα μη-τριδιαγώνια στοιχεία του αρχικού πίνακα.

Επίπεδο περιστροφής	Μηδενιζόμενο στοιχείο
$(2,3)(2,4)\cdots(2,n)$	$(1,3)(1,4)\cdots(1,n)$
$(3,4)\cdots(3,n)$	$(2,4)\cdots(2,n)$
$\backslash \quad \vert$	$\backslash \quad \vert$
$\backslash \quad \vert$	$\backslash \quad \vert$
$\backslash \quad \vert$	$\backslash \quad \vert$
$\cdots$	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$
$(n-1,n)$	$(n-2,n)$

Αν η διαδικασία εφαρμοστεί με την πιο πάνω σειρά, τότε είναι εύκολο να δειχτεί ότι τα μη-τριδιαγώνια στοιχεία που μηδενίζονται δεν επηρεάζονται, στη συνέχεια, από τους επόμενους μετασχηματισμούς. $\Rightarrow$ Ύστερα από

$$N = (n-2) + (n-3) + \cdots + 2 + 1 = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

μετασχηματισμούς, ο αρχικός πίνακας A ανάγεται σε ένα τριδιαγώνιο συμμετρικό πίνακα της μορφής

$$A^{(N)} = \begin{bmatrix} a_1 & b_2 & & & \\ b_2 & a_2 & b_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & b_n \\ & & & b_n & a_n \end{bmatrix},$$

που έχει τις ίδιες ιδιοτιμές με τον A.

(ii) Η μέθοδος Householder για συμμετρικούς πίνακες

Θεωρούμε το k βήμα της εφαρμογής της μεθόδου Householder στο συμμετρικό πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1,n} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2,n} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{3,n} \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Από τους προηγούμενους μετασχηματισμούς ο αρχικός πίνακας A έχει αναχθεί σε ένα συμμετρικό πίνακα της μορφής

$$A_{k-1} = \begin{bmatrix} x & x & & & | & & & \\ x & x & x & & | & & & \\ & x & x & x & | & & & \\ & & x & x & | & x & x & x \\ - & - & - & - & | & - & - & - \\ & & & x & | & x & x & x \\ & & & x & | & x & x & x \\ & & & x & | & x & x & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_k & | & C_k^T \\ -- & | & -- \\ C_k & | & B_k \end{bmatrix},$$

όπου ο $T_k \in \mathbb{R}^{k,k}$ είναι τριδιαγώνιος και οι $B_k \in \mathbb{R}^{n-k,n-k}$ και $C_k \in \mathbb{R}^{n-k,k}$ είναι αντίστοιχα οι πίνακες

$$B_k = \begin{bmatrix} a_{k+1,k+1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{k+1,n} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ a_{k+1,n} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n,n} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad C_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & a_{k,k+1} \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & a_{k,k+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & a_{k,n} \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$C_k = \begin{bmatrix} \mathcal{O} & | & \underline{c}_k \end{bmatrix}, \quad \text{όπου} \quad \underline{c}_k = [a_{k,k+1}, a_{k,k+2}, \cdots, a_{k,n}]^T.$$

Έστω

$$P_k = \begin{bmatrix} I & | & \mathcal{O}^T \\ -- & | & ---- \\ \mathcal{O} & | & I - 2\underline{w}\underline{w}^T \end{bmatrix} \quad \text{όπου} \quad \underline{w} \in \mathbb{R}^{n-k} \quad \text{με} \quad \underline{w}^T\underline{w} = 1.$$

Τότε

$$A_k = P_k A_{k-1} P_k = \begin{bmatrix} T_k & | & \widehat{C}_k^T \\ -- & | & -- \\ \widehat{C}_k & | & \widehat{B}_k \end{bmatrix},$$

όπου

$$\widehat{B}_k = (I - 2\underline{w}\underline{w}^T) B_k (I - 2\underline{w}\underline{w}^T),$$

και

$$\widehat{C}_k = (I - 2\underline{w}\underline{w}^T)C_k = \left[\begin{array}{ccc} \mathcal{O} & | & \widehat{\underline{c}}_k \end{array}\right], \text{ με } \widehat{\underline{c}}_k = (I - 2\underline{w}\underline{w}^T)\underline{c}_k.$$

$\Rightarrow$ Αν το $\underline{w}$ επιλεγεί έτσι ώστε

$$\widehat{\underline{c}}_k = (I - 2\underline{w}\underline{w}^T)\underline{c}_k = \alpha\underline{e}_1 = [\alpha, 0, \ldots, 0]^T,$$

τότε

$$A_k = \left[\begin{array}{ccc} T_{k+1} & | & C_{k+1}^T \\ -- & | & -- \\ C_{k+1} & | & B_{k+1} \end{array}\right],$$

όπου $T_{k+1} \in \mathrm{I\!R}^{k+1,k+1}$ είναι τριδιαγώνιος. $\Rightarrow$ Η ακολουθία των μετασχηματισμών Householder οδηγεί στο

$$P_{n-2}P_{n-3}\cdots P_2P_1 \; A \; P_1P_2\cdots P_{n-3}P_{n-2} = A_{n-2},$$

όπου ο A_{n-2} είναι συμμετρικός και τριδιαγώνιος.

Παρατήρηση 3.1 Αν ο πίνακας $A \in \mathrm{I\!R}^{n,n}$ δεν είναι συμμετρικός, τότε η πιο πάνω διαδικασία μετασχηματισμών Householder ανάγει τον A σε ένα όμοιο πίνακα A_{n-2} της μορφής άνω Hessemberg

$$\begin{bmatrix} x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x & x \\ 0 & o & x & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & x \end{bmatrix}.$$

$\Rightarrow$ Δηλαδή $A_{n-2} = (a_{i,j})$, όπου $a_{i,j} = 0$ για $i > j + 1$.

(iii) Η μέθοδος QR - Προσδιορισμός των πινάκων $\mathbf{Q_k}$ και $\mathbf{R_K}$

Για $A \in \mathrm{I\!R}^{n,n}$, η μέθοδος QR (στη βασική της μορφή) είναι:

$$\begin{aligned} &A_1 = A, \\ &A_k = Q_kR_k, \quad A_{k+1} = R_kQ_k, \quad k = 1, 2, \ldots \;, \end{aligned}$$

όπου, για κάθε k, ο $Q_k \in \mathrm{I\!R}^{n,n}$ είναι ορθογώνιος και ο $R_k \in \mathrm{I\!R}^{n,n}$ είναι άνω τριγωνικός. $\Rightarrow$ Στο k βήμα της μεθόδου απαιτείται ο προσδιορισμός ενός ορθογωνίου πίνακα Q_k τέτοιου ώστε

$$Q_k^T A_k = R_k,$$

όπου ο R_k είναι άνω τριγωνικός. $\Rightarrow$ Ο πίνακας Q_k μπορεί να προσδιοριστεί ως το γινόμενο πινάκων περιστροφής ή πινάκων Householder. Στην περίπτωση πινάκων περιστροφής, ο μηδενισμός των κάτω τριγωνικών στοιχείων του A_k επιτυγχάνεται εφαρμόζοντας τον κανόνα:

“ Επίπεδο περιστροφής $(p, q) \rightarrow$ Μηδενιζόμενο στοιχείο (q, p) ”

Οι περιστροφές εφαρμόζονται με την εξής σειρά:

Επίπεδο περιστροφής	Μηδενιζόμενο στοιχείο
$(1,2)(1,3)\cdots(1,n)$ $(2,3)\cdots(2,n)$ $\backslash \quad \vert$ $\backslash \quad \vert$ $\backslash \quad \vert$ $\cdots$ $\cdots$ $(n-1,n)$	$(2,1)(3,1)\cdots(n,1)$ $(3,2)\cdots(n,2)$ $\backslash \quad \vert$ $\backslash \quad \vert$ $\backslash \quad \vert$ $\cdots$ $\cdots$ $(n,n-1)$

Δηλαδή, αν

$$N = \frac{1}{2}n(n-1) \ \text{ και } \ S_1 := R_{1,2},\ S_2 := R_{1,3},\ \ldots,\ S_N := R_{n-1,n},$$

τότε

$$S_N S_{N-1} \cdots S_2 S_1 A_k = R_k \Rightarrow Q^T = S_N S_{N-1} \cdots S_2 S_1.$$

Συνεπώς,

$$A_{k+1} = R_k Q_k = R_k S_1^T S_2^T \cdots S_{N-1}^T S_N^T.$$

Παρατήρηση Η μέθοδος διατηρεί την άνω Hessemberg (ή τριδιαγώνια) μορφή ενός πίνακα $\Rightarrow$ Αν ό αρχικός πίνακας A (και επομένως κάθε πίνακας A_k) είναι άνω Hessemberg (ή τριδιαγώνιος), τότε, για κάθε k, ο ορθογώνιος πίνακας Q_k είναι το γινόμενο $n-1$ πινάκων περιστροφής. Δηλαδή, στην περίπτωση αυτή,

$$Q_k^T = R_{n-1,n}^T \cdots R_{2,3}^T R_{1,2}^T \ \Rightarrow \ A_{k+1} = R_k(R_{1,2}R_{2,3}\cdots R_{n-1,n}).$$

3.2 Παραδείγματα

Παράδειγμα 3.1 Βελτιώστε το φράγμα

$$|\lambda^* - 1.0| \leq 10^{-3},$$

για τη μικρότερη ιδιοτιμή λ^* του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & & \\ 1 & 5 & 1 & \\ & 1 & 4 & 10^{-3} \\ & & 10^{-3} & 1 \end{bmatrix}.$$

Λύση: Ο A είναι συμμετρικός $\Rightarrow$ Οι ιδιοτιμές του A είναι πραγματικές.

Οι δίσκοι Gerschgorin του A είναι:

$$\begin{aligned} &D_1 : |\lambda - 6| \leq 1, \quad D_2 : |\lambda - 5| \leq 2, \\ &D_3 : |\lambda - 4| \leq 1 + 10^{-3} \quad \text{και} \quad D_4 : |\lambda - 1| \leq 10^{-3} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Ο δίσκος D_4 είναι διαχωρισμένος από τους άλλους $\Rightarrow$ Ο D_4 περιέχει τη μικρότερη ιδιοτιμή λ^* του $A \Rightarrow$

$$|\lambda^* - 1| \leq 10^{-3} \quad \Rightarrow \quad 1 - 10^{-3} \leq \lambda^* \leq 1 + 10^{-3}.$$

Έστω $D = \text{diag}(1, 1, 1, k)$, με $k \neq 0$. Τότε $D^{-1} = \text{diag}(1, 1, 1, 1/k)$ και ο πίνακας

$$DAD^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & & \\ 1 & 5 & 1 & \\ & 1 & 4 & 10^{-3}/k \\ & & 10^{-3}k & 1 \end{bmatrix}$$

έχει ακριβώς τις ίδιες ιδιοτιμές με τον A.

Οι δίσκοι Gerschgorin του DAD^{-1} είναι D_1, D_2 και:

$$\widehat{D}_3 : |\lambda - 4| \leq 1 + 10^{-3}/k, \quad \widehat{D_4} : |\lambda - 1| \leq 10^{-3}k$$

$\Rightarrow$ Με $k = 10^{-3}$, ο $\widehat{D}_4$ παραμένει διαχωρισμένος από τους D_1, D_2 και $\widehat{D}_3 \Rightarrow$ Ο $\widehat{D}_4$ περιέχει τη μικρότερη ιδιοτιμή λ^* των DAD^{-1} και $A \Rightarrow$

$$|\lambda^* - 1| \leq 10^{-6} \quad \Rightarrow 1 - 10^{-6} \leq \lambda^* \leq 1 + 10^{-6}.$$

Παράδειγμα 3.2 Έστω λ μια ιδιοτιμή του τριδιαγώνιου πίνακα

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 10^{-2} & \\ 10^{-2} & 3^{-1} & 10^{-3} \\ & 10^{-3} & 3^{-2} \end{bmatrix}$$

και $\underline{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$, με $||\underline{x}||_2 = 1$, το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. Δείξτε ότι αν μ_R είναι το πηλίκο Rayleigh του πίνακα

$$A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 10^{-2} & & & \\ 10^{-2} & 3^{-1} & 10^{-3} & & \\ & 10^{-3} & 3^{-2} & 10^{-4} & \\ & & 10^{-4} & 3^{-3} & 10^{-5} \\ & & & 10^{-5} & 3^{-4} \end{bmatrix},$$

ως προς το διάνυσμα

$$\underline{v} = [x_1, x_2, x_3, 0, 0]^T,$$

τότε $\mu_R = \lambda$. Στη συνέχεια βρείτε την ελάχιστη τιμή της νόρμας

$$||A_5\underline{v} - \mu\underline{v}||_2, \quad \mu \in \mathbb{R},$$

ως προς το μ.

Λύση: Επειδή $\underline{v}^T\underline{v} = 1$, το ζητούμενο πηλίκο Rayleigh είναι $\mu_R = \underline{v}^T A\underline{v} \Rightarrow$

$$\mu_R = [\underline{x}^T, \underline{o}_2^T] \begin{bmatrix} A_3 & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{o}_2 \end{bmatrix},$$

όπου

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 10^{-4} & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10^{-4} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3^{-3} & 10^{-5} \\ 10^{-5} & 3^{-4} \end{bmatrix},$$

και $\underline{o}_2 = [0, 0]^T \Rightarrow$

$$\mu_R = [\underline{x}^T, \underline{o}_2^T] \begin{bmatrix} A_3\underline{x} \\ C\underline{x} \end{bmatrix} = \underline{x}^T A_3 \underline{x} = \lambda \underline{x}^T \underline{x} = \lambda.$$

$\Rightarrow$ Η $||A_5\underline{v} - \mu\underline{v}||_2$ ελαχιστοποιείται όταν $\mu = \mu_R = \lambda$. $\Rightarrow$ Η ελάχιστη τιμή της νόρμας είναι $||A_5\underline{v} - \lambda\underline{v}||_2$, όπου

$$A_5\underline{v} - \lambda\underline{v} = \begin{bmatrix} A_3\underline{x} \\ C\underline{x} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{o}_2 \end{bmatrix} = [0, 0, 0, 10^{-4}x_3, 0]^T.$$

$\Rightarrow$ Η ελάχιστη τιμή της νόρμας είναι $||A_5\underline{v} - \lambda\underline{v}||_2 = 10^{-4}|x_3|$. (Δηλαδή, η ιδιοτιμή λ του A_3 είναι μια "καλή" προσέγγιση μιας ιδιοτιμής του A_5.)

Παράδειγμα 3.3 Εφαρμόστε (με ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφείων) τις τρεις πρώτες απαναλήψεις της μεθόδου δυνάμεως στον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix},$$

με $\underline{y}_0 = [1, 1, 1]^T$.

Λύση: Με τους συνήθεις συμβολισμούς:

1:

$$A\underline{y}_0 = [6, 0, 4]^T \quad \Rightarrow \quad m_0 = 6, \quad \underline{y}_1 = [1, 0, 0.667]^T.$$

2:

$$A\underline{y}_1 = [4.667, 0.333, 3.668]^T \quad \Rightarrow \quad m_1 = 4.667, \quad \underline{y}_2 = [1, 0.071, 0.790]^T.$$

3:

$$A\underline{y}_2 = [4.861, 0.210, 4.089]^T, \quad \Rightarrow \quad m_2 = 4.861, \quad \underline{y}_3 = [1, 0.043, 0.841]^T.$$

$\Rightarrow$ Αν λ_1 είναι η επικρατέστερη ιδιοτιμή του A και $\underline{x}_1$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα, τότε

$$\lambda_1 \approx 4.861 \ \text{ και } \ \underline{x}_1 \approx [1, 0.043, 0.841]^T.$$

Οι ακριβείς τιμές είναι

$$\lambda_1 = 5 \ \text{ και } \ \underline{x}_1 = [1, 0, 1]^T.$$

Παράδειγμα 3.4 Εφαμόστε δύο βήματα της μεθόδου αντίστροφης επανάληψης για τον υπολογισμό της πλησιέστερης στο 2 ιδιοτιμής του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Λύση: Αντίστροφη επανάληψη:

$$(A - 2I)\underline{u}_{k+1} = \underline{y}_k,$$
$$\underline{y}_{k+1} = \frac{1}{m_k}\underline{u}_{k+1}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

όπου $m_k \equiv$ συνιστώσα μεγίστου μέτρου του $\underline{u}_{k+1}$.

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = LU.$$

Η επαναληπτική διαδικασία εφαρμόζεται ως εξής:

$$L\underline{v}_{k+1} = \underline{y}_k, \quad U\underline{u}_{k+1} = \underline{v}_{k+1}, \quad \underline{y}_{k*1} = \frac{1}{m_k}\underline{u}_{k+1}, \quad k = 0, 1 \ldots, .$$

Αρχικό διάνυσμα $\underline{u}_0$: $U\underline{u}_0 = [1, 1, 1]^T \Rightarrow$

$$\underline{u}_0 = [-5/2, 2, 1]^T, \quad \underline{y}_0 = [1, -4/5, -2/5]^T.$$

Συνεπώς:

1:

$$\underline{v}_1 = [1, -9/5, -16/5]^T, \quad \underline{u}_1 = [87/10, -25/5, -16/5]^T,$$
$$\Rightarrow \quad m_0 = 87/10, \quad \underline{y}_1 = [1, -50/87, -32/87]^T.$$

$\Rightarrow$ 1^η προσέγγιση: $\lambda^{(1)} = 2 + 1/m_0 = 2.1149$.

2:

$$\underline{v}_2 = [1, -137/87, -256/87]^T, \quad \underline{u}_2 = [1385/174, -393/87, -256/87]^T,$$
$$\Rightarrow \quad m_1 = 1385/174, \quad \underline{y}_2 = [1, -786/1385, -512/1385]^T.$$

$\Rightarrow$ 2^η προσέγγιση: $\lambda^{(2)} = 2 + 1/m_1 = 2.1256$. Η προσέγγιση για το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι $[1, -0.5675, -0.3697]^T$.

Οι ακριβείς τιμές (σε 4 δ.ψ.) είναι:

$$\lambda = 2.1260 \quad \text{και} \quad [1, -0.5673, -0.3698]^T.$$

Παράδειγμα 3.5 Η τιμή $\widetilde{\lambda} = 8.99$ είναι μια προσέγγιση μιας ιδιοτιμής λ του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 5 & -1 & -5 \\ 0 & -5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Εφαρμόστε το πρώτο βήμα της μεθόδου αντίστροφης επανάληψης για τον υπολογισμό του αντίστοιχου ιδιοδιανύσματος $\underline{x}$.

Λύση Με αριθμητική 4 σημαντικών ψηφίων:

$$\begin{aligned} A - 8.99I &= \begin{bmatrix} -4.990 & 5 & 0 \\ 5 & -9.990 & -5 \\ 0 & -5 & -4.990 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1.002 & 1 & 0 \\ 0 & 1.004 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4.990 & 5 & 0 \\ 0 & -4.980 & -5 \\ 0 & 0 & 0.030 \end{bmatrix} =: LU. \end{aligned}$$

Αρχική προσέγγιση:

$$\begin{aligned} &U\underline{u}_0 = [1, 1, 1]^T \Rightarrow \\ &\underline{u}_0 = [-33.90, -33.63, 33.33]^T \Rightarrow \underline{y}_0 = [1, 0.9920, -09832]^T. \end{aligned}$$

Πρώτη προσέγγιση:

$$\begin{aligned} &L\underline{v}_1 = \underline{y}_0 \Rightarrow \underline{v}_1 = [1, 1.994, -2.985]^T \\ &L\underline{u}_1 = \underline{v}_1 \Rightarrow \underline{u}_1 = [99.50, 99.50, -99.50]^T \quad \text{και} \quad m_0 = 99.50 \\ &\underline{y}_1 = \frac{1}{m_0}\underline{u}_1 \Rightarrow \underline{y}_1 = [1.000, 1.000, -1.000]^T. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Η προσέγγιση για το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι $\underline{\widetilde{x}} = [1.000, 1.000, -1.000]^T$. Ταυτόχρονα η μέθοδος δίνει τη "βελτιωμένη" προσέγγιση

$$\lambda \approx \widetilde{\lambda} + \frac{1}{m_0} = 8.99 + \frac{1}{99.50} = 9.000,$$

για την ιδιοτιμή λ.

Οι ακριβείς τιμές είναι $\lambda = 9$ και $\underline{x} = [1, 1, -1]^T$.

Παράδειγμα 3.6 Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ οι ιδιοτιμές και $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3$ τα αντίστοιχα ιδιοδανύσματα του πίνακα

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 10 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}.$$

Αν $\lambda_1 = 11$ και $\underline{x}_1 = [1/2, 1, 3/4]^T$ προσδιορίστε, με τη μέθοδο υποβάθμισης πινάκων, ένα πίνακα $B \in \mathbb{R}^{2,2}$ με ιδιοτιμές λ_2, λ_3. Υπολογίστε τις ιδιοτίμες λ_2, λ_3 και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\underline{u}_2, \underline{u}_3$ του B και στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τα $\underline{u}_2, \underline{u}_3$, προσδιορίστε τα ιδιοδιανύσματα $\underline{x}_2, \underline{x}_3$ του A.

Λύση: Αν $\underline{e}_2 = [0,1,0]^T$, τότε $\underline{e}_2^T \underline{x}_1 = 1$. Συνεπώς, ο πίνακας

$$\begin{aligned} A_1 &= A - \underline{x}_1 \underline{e}_2^T A = A - \underline{x}_1 r_2(A) \\ &= \begin{bmatrix} -3 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -9/2 & 15/4 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

έχει ιδιοτιμές $0, \lambda_2, \lambda_3$ και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\underline{x}_1$ και $\underline{x}_i - \underline{e}_2^T \underline{x}_i \underline{x}_1$, $i = 2,3$ $\Rightarrow$ Ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -9/2 & -2 \end{bmatrix}$$

έχει ιδιοτιμές $\lambda_2, \lambda_3 \Rightarrow \lambda_2 = -3$ και $\lambda_3 = -2 \Rightarrow$ τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του B είναι

$$\underline{u}_2 = [2,9]^T \quad \text{και} \quad \underline{u}_3 = [0,1]^T$$

$\Rightarrow$ Τα ιδιοδιανύσματα του A_1 που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $\lambda_2 = -3$ και $\lambda_3 = -2$ είναι

$$\underline{y}_2 = [2,0,9]^T \quad \text{και} \quad \underline{y}_3 = [0,0,1]^T.$$

$\Rightarrow$

$$\underline{x}_2 - \underline{e}_2^T \underline{x}_2 \underline{x}_1 = c\underline{y}_2.$$

Υποθέτουμε τώρα ότι το $\underline{x}_2$ έχει κανονικοποιηθεί ώστε $(\underline{x}_2)_2 = 1$, όπου $(\underline{x}_i)_k \equiv$ η k συνιστώσα του $\underline{x}_i$. Τότε $\underline{e}_2^T \underline{x}_2 = 1 \Rightarrow$

$$\underline{x}_2 - \underline{x}_1 = c\underline{y}_2.$$

Επίσης

$$\begin{aligned} & r_2(A)(\underline{x}_2 - \underline{x}_1) = \lambda_2 (\underline{x}_2)_2 - \lambda_1 (\underline{x}_1)_2 \\ \Rightarrow \quad & r_2(A)(\underline{x}_2 - \underline{x}_1) = \lambda_2 - \lambda_1 \Rightarrow c r_2(A)\underline{y}_2 = \lambda_2 - \lambda_1 \\ \Rightarrow \quad & c = (\lambda_2 - \lambda_1)/r_2(A)\underline{y}_2 = 1/4 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\underline{x}_2 = \underline{x}_1 + \frac{1}{4}\underline{y}_2 = [0,1,-3/2]^T.$$

Με τον ίδιο τρόπο: $\underline{x}_3 = [1/2, 1, -5/2]^T$.

Παρατήρηση: Η πιο πάνω διαδικασία εύρεσης ενός ιδιοδιανύσματος $\underline{x}_i$ του A από το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\underline{y}_i$ του A_1, μέσω της

$$\underline{x}_i - \underline{e}_k^T \underline{x}_i \underline{x}_1 = c\underline{y}_i,$$

προφανώς θα αποτύχει αν $(\underline{x}_i)_k = 0$. Αυτή είναι η μόνη περίπτωση για την οποία δεν ευσταθεί η υπόθεση $(\underline{x}_i)_k = 1$. $\Rightarrow$ Η υπόθεση θα οδηγήσει σε κάποιο άτοπο αποτέλεσμα (π.χ. $1 = 0$!!!!) και στο συμπέρασμα ότι $(\underline{x}_i)_k = 0 \Rightarrow \underline{e}_k^T \underline{x}_i = 0 \Rightarrow \underline{x}_i = c\underline{y}_i$.

Παράδειγμα 3.7 Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο Givens για το μετασχηματισμό σε τριδιαγώνια μορφή του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 12 & 16 & -15 \\ 12 & 288 & 309 & 185 \\ 16 & 309 & 312 & 80 \\ -15 & 185 & 80 & -600 \end{bmatrix}.$$

Λύση: Με $s = \sin\theta$ και $c = \cos\theta$:

1: Μετασχηματισμός $R_{23}^T A R_{23}$, όπου

$$R_{23}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ 16 \\ -15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & s & 0 \\ 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ 16 \\ -15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 12c + 16s \\ -12s + 16c \\ -15 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Το θ επιλέγεται έτσι ώστε $-12s + 16c = 0 \Rightarrow \tan\theta = s/c = 4/3 \Rightarrow s = 4/5$ και $c = 3/5 \Rightarrow$

$$R_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & -4/5 & 0 \\ 0 & 4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$A_1 = R_{23}^T A R_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 20 & 0 & -15 \\ 20 & 600 & -75 & 175 \\ 0 & -75 & 0 & -100 \\ -15 & 175 & -100 & -600 \end{bmatrix}.$$

Έλεγχος: $\mathrm{trace}(A_1) = 0 = \mathrm{trace}(A)$.

2: Μετασχηματισμός $R_{24}^T A_1 R_{24}$, όπου

$$R_{24}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \\ -15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & s \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -s & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \\ -15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 20c - 15s \\ 0 \\ -20s - 15c \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Το θ επιλέγεται έτσι ώστε $-20s - 15c = 0 \Rightarrow s = -3/5$ και $c = 4/5 \Rightarrow$

$$A_2 = R_{24}^T A_1 R_{24} = \begin{bmatrix} 0 & 25 & 0 & 0 \\ 25 & 0 & 0 & 625 \\ 0 & 0 & 0 & -125 \\ 0 & 625 & -125 & 0 \end{bmatrix}.$$

Έλεγχος: $\mathrm{trace}(A_2) = 0 = \mathrm{trace}(A)$

3: Μετασχηματισμός $R_{34}^T A_1 R_{34}$, όπου

$$R_{34}^T \begin{bmatrix} 25 \\ 0 \\ 0 \\ 625 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 \\ 0 \\ 0 \\ 625 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 0 \\ 625s \\ 625c \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Το θ επιλέγεται έτσι ώστε $625c = 0 \Rightarrow c = 0$ και $s = 1 \Rightarrow$

$$A_3 = R_{34}^T A_2 R_{34} = \begin{bmatrix} 0 & 25 & 0 & 0 \\ 25 & 0 & 625 & 0 \\ 0 & 625 & 0 & 125 \\ 0 & 0 & 125 & 0 \end{bmatrix}.$$

Έλεγχος: $\mathrm{trace}(A_3) = 0 = \mathrm{trace}(A)$.

Παράδειγμα 3.8 Έστω $\underline{x}_1 = [2, 1, -2]^T$ και $\underline{x}_2 = [0, 3]^T$. Βρείτε δύο πίνακες Householder $H_1 \in \mathbb{R}^{3,3}$ και $H_2 \in \mathbb{R}^{2,2}$ τ.ω,

$$H_1 \underline{x}_1 = [k_1, 0, 0]^T \quad \text{και} \quad H_2 \underline{x}_2 = [k_2, 0]^T,$$

για κατάλληλα $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο Householder για το μετασχηματισμό σε τριδιαγώνια μορφή του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -9 & -9 \\ -2 & 1 & -9 & 1 \end{bmatrix}.$$

Λύση: Έστω $H_1 = I - 2\underline{w}\underline{w}^T$, όπου $\underline{w} \in \mathbb{R}^3$ με $\underline{w}^T \underline{w} = 1$. Τότε για τον προσδιορισμό των $k_1 \in \mathbb{R}$ και $\underline{w} \in \mathbb{R}^3$ έχουμε:

$$\begin{aligned} &H_1 \underline{x}_1 = (I - 2\underline{w}\underline{w}^T)\underline{x}_1 = [k_1, 0, 0]^T \quad \Rightarrow \\ &k_1^2 = (H_1 \underline{x}_1)^T (H_1 \underline{x}_1) = \underline{x}_1^T \underline{x}_1 = 9. \end{aligned}$$

Επιλέγουμε $k_1 = 3$. Επίσης

$$2\underline{w}\underline{w}^T \underline{x}_1 = \underline{x}_1 - [3, 0, 0]^T =: \underline{u}$$

$\Rightarrow \alpha \underline{w} = \underline{u}$, όπου $\alpha = 2\underline{w}^T \underline{x}_1 \Rightarrow \alpha^2 = \underline{u}^T \underline{u} = 6$, επειδή $\underline{w}^T \underline{w} = 1$. Συνεπώς

$$\begin{aligned} H_1 &= I - 2\underline{w}\underline{w}^T = I - \frac{2}{\alpha^2}(\alpha \underline{w})(\alpha \underline{w})^T \\ &= I - \frac{1}{3}\underline{u}\underline{u}^T = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Με τον ίδιο τρόπο, για τον προσδιορισμό του $H_2 \in \mathbb{R}^{2,2}$, βρίσκουμε ότι:

$$k_2 = 3, \quad \underline{u} = [-3, 3]^T, \quad \alpha^2 = 18 \;\; \text{και} \;\; H_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(**Παρατήρηση:** Για τον προσδιορισμό του H_2 θα μπορούσαμε να αποφύγουμε την πιο πάνω χρονοβόρα διαδικασία αναγνωρίζοντας ότι $E_{1,2}\underline{x}_2 = [3, 0]^T$, όπου $E_{1,2} \in \mathbb{R}^{2,2}$ είναι ο στοιχειώδης πίνακας που αντιστοιχεί στη εναλλαγή των γραμμών $1, 2$.)

Εφαρμογή της μεθόδου Householder:

1: Ο πίνακας A είναι

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \underline{x}_1^T \\ \underline{x}_1 & B_1 \end{bmatrix} \quad \text{με} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -9 & -9 \\ 1 & -9 & 1 \end{bmatrix}.$$

Συνεπώς, με

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & \underline{o}_3^T \\ \underline{o}_3 & H_1 \end{bmatrix},$$

όπου $\underline{o}_k \equiv$ μηδενικό διάνυσμα του $\mathbb{R}^k$,

$$\begin{aligned} A_1 &= P_1 A P_1 = \begin{bmatrix} 1 & \underline{o}_3^T \\ \underline{o}_3 & H_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & \underline{x}_1^T \\ \underline{x}_1 & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \underline{o}_3^T \\ \underline{o}_3 & H_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & k_1 \underline{e}_1^T \\ k_1 \underline{e}_1 & H_1 B_1 H_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -11 & -7 \\ 0 & 3 & -7 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Έλεγχος: $\mathrm{trace}(A_1) = -5 = \mathrm{trace}(A)$.

2: Ο πίνακας A_1 είναι

$$A_1 = \begin{bmatrix} C & D \\ D & B_2 \end{bmatrix} \quad \text{με } C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \; D = [\underline{o}_2 \; \underline{x}_2] \text{ και } B_2 = \begin{bmatrix} -11 & -7 \\ -7 & 1 \end{bmatrix}.$$

Συνεπώς, με

$$P_1 = \begin{bmatrix} I & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & H_2 \end{bmatrix},$$

όπου I και $\mathcal{O}$ είναι αντίστοιχα ο ταυτοικός και μηδενικός πίνακας του $\mathbb{R}^{2,2}$,

$$A_2 = P_2 A_1 P_2 = \begin{bmatrix} A & E^T \\ E & H_2 B_2 H_2 \end{bmatrix}, \text{ με } E = [\underline{o}_2 \; k_2 \underline{e}_2]$$

$\Rightarrow$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & -7 & -11 \end{bmatrix}$$

Έλεγχος: $\mathrm{trace}(A_2) = -5 = \mathrm{trace}(A)$.

(**Παρατήρηση:** Θα μπορούσαμε να αποφύγουμε την πιο πάνω διαδικασία για τον προσδιορισμό του A_2 παρατηρώντας ότι ο A_1 μπορεί να αναχθεί σε τριδιαγώνιο δια της εναλλαγής των γραμμών και στηλών $3, 4$ του A_1 (δηλ. με $P_2 = E_{3,4} \in \mathbb{R}^{4,4}$).)

Παράδειγμα 3.9 Εφαρμόστε ένα πλήρες βήμα της μεθόδου QR στον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 375 & 500 & 0 & 0 \\ 500 & 0 & 300 & 0 \\ 0 & 300 & -135 & 15 \\ 0 & 0 & 15 & 10 \end{bmatrix}.$$

Λύση: Με $A_1 = A$, $s = \sin\theta$ και $c = \cos\theta$:

- Μηδενισμός του στοιχείου $(2,1)$:

$$R_{12}^T \begin{bmatrix} 375 \\ 500 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 375 \\ 500 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 375c + 500s \\ -375s + 500c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Το θ επιλέγεται έτσι ώστε $-375s + 500c = 0 \Rightarrow c = 3/5$ και $s = 4/5 \Rightarrow$

$$R_{12}^T A_1 = \begin{bmatrix} 625 & 300 & 240 & 0 \\ 0 & -400 & 180 & 0 \\ 0 & 300 & -135 & 15 \\ 0 & 0 & 15 & 10 \end{bmatrix}.$$

- Μηδενισμός του στοιχείου $(3,2)$:

$$R_{23}^T \begin{bmatrix} 300 \\ -400 \\ 300 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & s & 0 \\ 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 300 \\ -400 \\ 300 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 \\ -400c + 300s \\ 400s + 300c \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Το θ επιλέγεται έτσι ώστε $400s + 300c = 0 \Rightarrow c = -4/5$ και $s = 3/5 \Rightarrow$

$$R_{23}^T R_{12}^T A_1 = \begin{bmatrix} 625 & 300 & 240 & 0 \\ 0 & 500 & -225 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 15 & 10 \end{bmatrix}.$$

- Μηδενισμός του στοιχείου $(4,3)$:

$$R_{34}^T \begin{bmatrix} 240 \\ -225 \\ 0 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 240 \\ -225 \\ 0 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 240 \\ -225 \\ 15s \\ 15c \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Το θ επιλέγεται έτσι ώστε $15c = 0 \Rightarrow c = 0$ και $s = 1 \Rightarrow$

$$R_{34}^T R_{23}^T R_{12}^T A_1 = \begin{bmatrix} 625 & 300 & 240 & 0 \\ 0 & 500 & -225 & 9 \\ 0 & 0 & 15 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix} = R_1 ,$$

όπου ο R_1 είναι άνω τριγωνικός $\Rightarrow$

$$A_1 = (R_{12}R_{23}R_{34})R_1 = Q_1 R_1,$$

όπου ο $Q_1 = R_{12}R_{23}R_{34}$ είναι ορθογώνιος.

Συνεπώς το πρώτο βήμα της μεθόδου QR οδηγεί στον τριδιαγώνιο πίνακα

$$\begin{aligned} A_2 = R_1 Q_1 &= R_1(R_{12}R_{23}R_{34}) \\ &= \begin{bmatrix} 615 & 400 & 0 & 0 \\ 400 & -375 & 9 & 0 \\ 0 & 9 & 10 & 12 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Έλεγχος: $\mathrm{trace}(A_2) = 250 = \mathrm{trace}(A)$.

Ασκήσεις

3.1 Δείξτε ότι αν ο $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{C}^{n,n}$ είναι ερμιτιανός και αυστηρά διαγώνια υπέρτερος με $a_{i,i} > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, τότε ο A είναι θετικά ορισμένος.

3.2 Δείξτε (εκφράζοντας τις εξισώσεις σε κατάλληλη μορφή) ότι το $n \times n$ $(n \geq 6)$ γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} &x_1 + 3x_2 = 1, \\ &x_{i-1} + 4x_i + x_{i+1} = 1, \quad i = 2, 3, \ldots, n-1, \\ &3x_{n-1} + x_n = 1, \end{aligned}$$

έχει μοναδική λύση. Δείξτε επίσης ότι

$$|x_1| \leq 5/2, \qquad \max_{2 \leq i \leq n-1} |x_i| \leq 1/2, \qquad |x_n| \leq 5/2.$$

(**Υπόδειξη:** Στο δεύτερο μέρος μπορείτε να κάνετε χρήση του αποτελέσματος (i) της Άσκησης 2.7.)

3.3 Έστω λ^* η μικρότερη ιδιοτιμή του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 1 & & & \\ 1 & 7 & 1 & & \\ & 1 & 6 & 1 & \\ & & 1 & 5 & 10^{-3} \\ & & & 10^{-3} & 1 \end{bmatrix}.$$

Δείξτε ότι $\lambda^* = 1 + \varepsilon$ όπου $|\varepsilon| \leq 10^{-6}$.

3.4 Έστω λ μια ιδιοτιμή ενός συμμετρικού τριδιαγώνιου πίνακα $A_n \in \mathbb{R}^{n,n}$ $(n > 1)$ της μορφής

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & & & \\ \alpha_1 & 1 & \alpha_2 & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \alpha_{n-2} & 1 & \alpha_{n-1} \\ & & & & \alpha_{n-1} & 1 \end{bmatrix},$$

και $\underline{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$, με $||\underline{x}||_2 = 1$, το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. Δείξτε ότι αν μ_R είναι το πηλίκο Rayleigh του πίνακα A_{n+1} ως προς το διάνυσμα

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} \underline{x} \\ 0 \end{bmatrix},$$

τότε $\mu_R = \lambda$. Στη συνέχεια δείξτε ότι η ελάχιστη τιμή της νόρμας

$$||A_{n+1}\underline{v} - \mu\underline{v}||_2 \ , \quad \mu \in \mathbb{R},$$

ως προς το μ, είναι $|\alpha_n x_n|$.

3.5 Έστω $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ένας ερμιτιανός πίνακας με ιδιοτιμές

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n \ .$$

Δείξτε ότι

$$\lambda_n \leq \mu_R \leq \lambda_1 \ ,$$

όπου μ_R είναι το πηλίκο Rayleigh του A ως προς οποιοδήποτε $\underline{x} \in \mathbb{C}^n$, $\underline{x} \neq \underline{0}$.

3.6 Έστω λ_1 η μεγίστη ιδιοτιμή του τριδιαγώνιου πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} \alpha+\beta & \beta & & & \\ \beta & \alpha & \beta & & \\ & \beta & \alpha & \beta & \\ & & \beta & \alpha & \beta+\varepsilon \\ & & & \beta+\varepsilon & \alpha+\beta \end{bmatrix},$$

όπου $\alpha, \beta, \varepsilon \in \mathbb{R}$ είναι θετικοί. Δείξτε ότι

$$\alpha + 2\beta + 0.4\varepsilon \leq \lambda_1 \leq \alpha + 2\beta + \varepsilon \ .$$

(**Υπόδειξη:** Βλ. Άσκηση 3.5.)

3.7 Δείξτε ότι ένα μιγαδικό πρόβλημα ιδιοτιμών $A\underline{z} = \lambda\underline{z}$, όπου $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ είναι ερμιτιανός, μπορεί να αναχθεί σε ένα πρόβλημα ιδιοτιμών της μορφής $\mathcal{A}\underline{\chi} = \lambda\underline{\chi}$ όπου $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{2n,2n}$ είναι συμμετρικός.

3.8 Έστω $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ένας συμμετρικός πίνακας με ιδιοτιμές λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\underline{x}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Δείξτε ότι ο πίνακας

$$A_1 := A - \lambda_1 \underline{x}_1 \underline{x}_1^T$$

έχει ιδιοτιμές $0, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$, και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n$. (**Σημείωση:** Το πιο πάνω αποτέλεσμα αποτελεί τη βάση μιας διαδικασίας υποβάθμισης για συμμετρικούς πίνακες. Η διαδικασία αυτή παρουσιάζει τα εξής πλεονεκτήματα σε σύγκριση με τη βασική μέθοδο υποβάθμισης πινάκων: (i) ο πίνακας A_1 είναι συμμετρικός, και (ii) τα ιδιοδιανύσματα του A_1 που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ είναι $\underline{x}_2, \underline{x}_3, \ldots, \underline{x}_n$.)

3.9 Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ οι ιδιοτιμές και $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3$ τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 10 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}.$$

Αν

$$\lambda_1 = -2 \quad \text{και} \quad \underline{x}_1 = [1, 2, -5]^T$$

προσδιορίστε, με τη μέθοδο υποβάθμισης πινάκων, ένα πίνακα $B \in \mathbb{R}^{2,2}$ με ιδιοτιμές λ_2, λ_3. Υπολογίστε τις ιδιοτιμές λ_2, λ_3 και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα

$\underline{u}_2, \underline{u}_3$ του B και στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τα $\underline{u}_2$ και $\underline{u}_3$, προσδιορίστε τα ιδιοδιανύσματα $\underline{x}_2, \underline{x}_3$ του A.

3.10 Ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

έχει επικρατέστερη ιδιοτιμή λ_1 με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\underline{x}_1 = [1, 1, 2]^T$. Βρείτε την λ_1 και στη συνέχεια (με τη μέθοδο υποβάθμισης πινάκων) τις άλλες δύο ιδιοτιμές του A.

3.11 Έστω A ο πίνακας της Άσκησης 3.10. Εφαρμόστε τέσσερεις επαναλήψεις της διαδικασίας

$$\underline{y}_0 = [1, 1, 1]^T,$$
$$\underline{y}_{k+1} = \frac{1}{m_k}(A - 2I)\underline{y}_k, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

(όπου m_k είναι η συνιστώσα μεγίστου μέτρου του διανύσματος $(A - 2I)\underline{y}_k$) για τον υπολογισμό της επικρατέστερης ιδιοτιμής λ_1 του A. Ποιο πλεονέκτημα παρουσιάζει η πιο πάνω διαδικασία για τον υπολογισμό της λ_1 σε σύγκριση με τη βασική μέθοδο δυνάμεως;

3.12 Έστω A ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1.5 & 1.0 & 1.0 \\ 0.1 & 1.6 & 1.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.71 \end{bmatrix},$$

και $\widetilde{\lambda} = 0.5$ μια προσέγγιση μιας ιδιοτιμής λ του A. Εφαρμόστε το πρώτο βήμα της μεθόδου αντίστροφης επανάληψης για τον υπολογισμό του ιδιοδιανύσματος που αντιστοιχεί στη λ.

3.13 Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο Givens για το μετασχηματισμό σε τριδιαγώνια μορφή των πινάκων

$$A = \begin{bmatrix} -25 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & -47 & 20 & -21 \\ 0 & 20 & -25 & 110 \\ 4 & -21 & 110 & 97 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 120 & 15 & 0 & 20 \\ 15 & -120 & 60 & -35 \\ 0 & 60 & -130 & -45 \\ 20 & -35 & -45 & 120 \end{bmatrix}.$$

Στη συνέχεια βρείτε, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της ακολουθίας Sturm: (i) τον αριθμό των ιδιοτιμών του A που είναι μεγαλύτερες του 25, και (ii) τον αριθμό των θετικών ιδιοτιμών του B.

3.14 Έστω $\underline{x} = [2, 1, -2]^T$. Βρείτε ένα πίνακα Householder $H \in \mathbb{R}^{3,3}$ τ.ω.

$$H\underline{x} = [k, 0, 0]^T,$$

για κάποιο κατάλληλο $k \in \mathbb{R}$.

Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο Householder για το μετασχηματισμό σε τριδιαγώνια μορφή του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -9 & -9 \\ 2 & 1 & -9 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.15 Χρησιμποιήστε τη μέθοδο Householder για το μετασχηματισμό σε τριδιαγώνια μορφή του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & -1 & -5 \end{bmatrix}.$$

3.16 Έστω A ο συμμετρικός τριδιαγώνιος πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & & \\ 2 & 3 & -1 & \\ & -1 & 4 & 1 \\ & & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Βρείτε, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της ακολουθίας Sturm, τον αριθμό των ιδιοτιμών του A που περιέχονται στο διάστημα $(2, 5)$. Ποια άλλα συμπεράσματα μπορούν να εξαχθούν σχετικά με την κατανομή των ιδιοτιμών του A;

3.17 Εφαρμόστε ένα πλήρες βήμα της μεθόδου LR στους συμμετρικούς και θετικά ορισμένους πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 16 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 17 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

3.18 Εφαρμόστε ένα πλήρες βήμα της μεθόδου QR στους πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 22 & 32 & -7 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 4 & 10 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 16 & 12 & 0 \\ 12 & 9 & -15 \\ 0 & -15 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.19 Έστω

$$\Lambda_k = L_1 L_2 \cdots L_k \quad \text{και} \quad U_k = R_k R_{k-1} \cdots R_1,$$

όπου L_i είναι οι μοναδιαιόι κάτω τριγωνικοί και R_i οι άνω τριγωνικοί πίνακες της εφαρμογής της μεθόδου LR σε ένα πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Δείξτε ότι

$$A_k = \Lambda_{k-1}^{-1} A \Lambda_{k-1} \quad \text{και} \quad \Lambda_k U_k = A^k \ .$$

3.20 Έστω

$$H_k = Q_1 Q_2 \cdots Q_k \quad \text{και} \quad U_k = R_k R_{k-1} \cdots R_1,$$

όπου Q_i, R_i, $i = 1.2, \ldots$, είναι οι ορθογώνιοι και άνω τριγωνικοί πίνακες της εφαρμογής της μεθόδου QR σε ένα πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Δείξτε ότι

$$A_k = H_{k-1}^T A H_{k-1} \quad \text{και} \quad H_k U_k = A^k \ .$$

Λύσεις Ασκήσεων

3.1 Ο A είναι ερμιτιανός $\Rightarrow$ Όλες οι ιδιοτιμές του A είναι πραγματικές. Επίσης, το Θεώρημα του Gerschgorin $\Rightarrow$ Για κάθε ιδιοτιμή λ του A ισχύει ότι

$$|\lambda - a_{i,i}| \leq \sum_{j=1(j\neq i)}^{n} |a_{i,j}|, \quad \text{για κάποιο} \quad i,$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & -\sum_{j=1(j\neq i)}^{n} |a_{i,j}| \leq \lambda - a_{i,i} \leq \sum_{j=1(j\neq i)}^{n} |a_{i,j}|, \\
\Rightarrow \quad & a_{i,i} - \sum_{j=1(j\neq i)}^{n} |a_{i,j}| \leq \lambda \leq a_{i,i} + \sum_{j=1(j\neq i)}^{n} |a_{i,j}|.
\end{aligned}$$

Τέλος, επειδή $a_{i,i} > 0$ και ο A αυστηρά διαγώνια υπέρτερος,

$$a_{i,i} - \sum_{j=1(j\neq i)}^{n} |a_{i,j}| > 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda > 0.$$

$\Rightarrow$ Ο A είναι θετικά ορισμένος.

3.2 Η απαλοιφή του x_1 από τις δυο πρώτες εξισώσεις του γραμμικού συστήματος οδηγεί στην εξίσωση $x_2 + x_3 = 0$, ενώ η απαλοιφή του x_2 από τη νέα αυτή εξίσωση και την τρίτη εξίσωση του συστήματος οδηγεί στην $3x_3 + x_4 = 1$. Η εφαρμογή της αντίστοιχης διαδικάσιας απαλοιφής στις τρείς τελευταίες εξισώσεις του αρχικού συστήματος οδηγεί στις εξισώσεις $x_{n-2} + x_{n-1} = 0$ και $x_{n-3} + 3x_{n-2} = 1 \Rightarrow$ Το αρχικό γραμμικό σύστημα μπορεί να εκφραστεί ως

$$x_1 + 3x_2 = 1, \tag{3.1}$$
$$x_2 + x_3 = 0, \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}
& 3x_3 + x_4 = 1 \\
& x_{i-1} + 4x_i + x_{i+1} = 1, \ i = 4, 5, \ldots, n-3, \\
& x_{n-3} + 3x_{n-2} = 1
\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$x_{n-2} + x_{n-1} = 0, \tag{3.4}$$
$$3x_{n-1} + x_n = 1. \tag{3.5}$$

Ο $(n-4) \times (n-4)$ τριδιαγώνιος πίνακας A του γραμμικού συσήματος (3.3) είναι αυστηρά διαγώνια υπέρτερος και συνεπώς αντιστρέψιμος. $\Rightarrow$ Το σύστημα έχει μοναδική λύση

$$\underline{x} = [x_3, x_4, \ldots, x_{n-2}]^T.$$

Αφού υπολογιστεί το $\underline{x}$, οι (3.2),(3.1), (3.4) και (3.5) δίνουν μονοσήμαντα τα x_2, x_1 και $x_{n-1}, x_n \Rightarrow$ Το γραμμικό σύστημα (3.1)-(3.5) έχει μοναδική λύση. $\Rightarrow$ Το αρχικό γραμμικό σύστημα έχει μοναδική λύση.

Το γραμμικό σύστημα (3.3) είναι $A\underline{x} = \underline{b}$, όπου

$$\underline{b} = [1, 1, \ldots, 1]^T,$$

και $A = 4(I + C)$, όπου $C = \in \mathbb{R}^{(n-4),(n-4)}$ είναι ο τριδιαγώνιος πίνακας

$$C = \begin{bmatrix} -1/4 & 1/4 & & & \\ 1/4 & 0 & 1/4 & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & 1/4 & 0 & 1/4 \\ & & & 1/4 & -1/4 \end{bmatrix}.$$

Άρα

$$||C||_\infty = 1/2 < 1 \quad \Rightarrow \quad ||A^{-1}||_\infty = \frac{1}{4}||(I + C)^{-1}||_\infty \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - 1/2} = 1/2.$$

Συνεπώς,

$$||\underline{x}||_\infty \leq ||A^{-1}||_\infty ||\underline{b}||_\infty = 1/2 \quad \Rightarrow \quad \max_{3 \leq i \leq n-2} |x_i| \leq 1/2,$$

ή, επειδή $x_2 = -x_3$ και $x_{n-1} = -x_{n-2}$,

$$\max_{2 \leq i \leq n-1} |x_i| \leq 1/2.$$

Τέλος, από τις (3.1) και (3.5),

$$|x_1| \leq 1 + 3|x_2| = 1 + 3/2 = 5/2 \;\text{ και }\; |x_n| \leq 1 + 3|x_{n-1} = 1 + 3/2 = 5/2.$$

3.3 Βλ. Παράδειγμα 3.1.

3.4

$$\mu_R = \underline{v}^T A_{n+1} \underline{v} = [\underline{x}^T, 0] \begin{bmatrix} A_n & \underline{b} \\ \underline{b}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ 0 \end{bmatrix},$$

όπου $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$ είναι το διάνυσμα $\underline{b} = [0, 0, \ldots, 0, \alpha_n]^T \Rightarrow$

$$\mu_R = [\underline{x}^T, 0] \begin{bmatrix} A_n \underline{x} \\ \underline{b}^T \underline{x} \end{bmatrix} = \underline{x}^T A_n \underline{x} = \lambda \underline{x}^T \underline{x} = \lambda.$$

Η ελάχιστη τιμή της νόρμας $||A_{n+1}\underline{v} - \mu\underline{v}||_2$ ως προς το μ είναι

$$||A_{n+1}\underline{v} - \mu_R \underline{v}||_2 = ||A_{n+1}\underline{v} - \lambda\underline{v}||_2,$$

και

$$A_{n+1}\underline{v} - \lambda\underline{v} = \begin{bmatrix} A_n \underline{x} \\ \underline{b}^T \underline{x} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda \underline{x} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{o} \\ \alpha_n x n \end{bmatrix}.$$

$\Rightarrow$ Η ελάχιστη τιμή είναι $|\alpha_n x_n|$.

3.5 Ο A είναι ερμιτιανός $\Rightarrow$ Στις ιδιοτιμές

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n,$$

του A αντιστοιχεί ένα πλήρες ορθοκανονικό σύστημα ιδιοδιανυσμάτων $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$. $\Rightarrow$ Κάθε $\underline{x} \in \mathbb{C}^n$ μπορεί να εκφραστεί ως

$$\underline{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i, \quad \alpha_i \in \mathbb{C}.$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \mu_R &= \underline{x}^H A \underline{x} / \underline{x}^H \underline{x} = \{\sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha_i} \underline{v}_i^H\} A \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i\} / \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 \\ &= \{\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 \lambda_i\} / \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2. \end{aligned}$$

Επίσης,

$$\lambda_n \{\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2\} \leq \{\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 \lambda_i\} \leq \lambda_1 \{\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2\}.$$

Άρα

$$\lambda_n \leq \mu_R \leq \lambda_1.$$

3.6

$$||A||_\infty = \alpha + 2\beta + \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 \leq ||A||_\infty = \alpha + 2\beta + \varepsilon.$$

Για το κάτω φράγμα θεωρούμε το πηλίκο Rayleigh μ_R του A ως προς το διάνυσμα $\underline{v} = [1,1,1,1,1]^T$. Τότε, χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της Άσκησης 3.5,

$$\lambda_1 \geq \mu_R = \frac{\underline{v}^T A \underline{v}}{\underline{v}^T \underline{v}} = \frac{1}{5}[1,1,1,1,1] \begin{bmatrix} \alpha + 2\beta \\ \alpha + 2\beta \\ \alpha + 2\beta \\ \alpha + 2\beta + \varepsilon \\ \alpha + 2\beta + \varepsilon \end{bmatrix} = \alpha + 2\beta + 0.4\varepsilon.$$

Άρα

$$\alpha + 2\beta + 0.4\varepsilon \leq \lambda_1 \leq \alpha + 2\beta + \varepsilon.$$

3.7 Έστω $A = P + iQ$, όπου $P, Q \in \mathbb{R}^{n,n}$. Τότε, ο A ερμιτιανός $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad A^H = A \quad \Rightarrow \quad (P + iQ)^H = P + iQ \quad \Rightarrow \quad P^T - iQ^T = P + iQ \\ &\Rightarrow \quad P^T = P \;\; \text{και} \;\; Q^T = -Q. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $\lambda \in \mathbb{R}$ (επειδή ο A είναι ερμιτιανός) και θέτουμε $\underline{z} = \underline{x} + i\underline{y}$, όπου $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$. Τότε,

$$\begin{aligned} & A\underline{z} = \lambda \underline{z} \Rightarrow (P + iQ)(\underline{x} + i\underline{y}) = \lambda(\underline{x} + i\underline{y}) \\ \Rightarrow \quad & P\underline{x} - Q\underline{y} = \lambda \underline{x} \text{ και } Q\underline{x} + P\underline{y} = \lambda \underline{y} \\ \Rightarrow \quad & \begin{bmatrix} P & -Q \\ Q & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathcal{A}\underline{\chi} = \lambda \underline{\chi}, \end{aligned}$$

όπου

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} P & -Q \\ Q & P \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n,2n} \text{ και } \underline{\chi} = \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Επίσης,

$$\mathcal{A}^T = \begin{bmatrix} P^T & Q^T \\ -Q^T & P^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & -Q \\ Q & P \end{bmatrix} = \mathcal{A}$$

$\Rightarrow$ Ο $\mathcal{A}$ είναι συμμετρικός.

3.8 Ο πίνακας A είναι συμμετρικός $\Rightarrow \underline{x}_1^T \underline{x}_1 = 1 \Rightarrow$ Ο πίνακας

$$A_1 = A - \underline{x}_1 \underline{x}_1^T A = A - \underline{x}_1 (A\underline{x}_1)^T = A - \lambda_1 \underline{x}_1 \underline{x}_1^T$$

έχει ιδιοτιμές $0, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα

$$\underline{y}_i = \underline{x}_i - \underline{x}_1^T \underline{x}_i \underline{x}_i = \underline{x}_i, \quad i = 2, 3, \ldots, n,$$

διότι, επειδή ο A είναι συμμετρικός, $\underline{x}_1^T \underline{x}_i = 0$, $i = 2, 3, \ldots, n$.

3.9 $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = 11$, $\underline{x}_2 = [0, -2, 3]^T$, $\underline{x}_3 = [1, 2, 3/2]^T$. Βλ. Παράδειγμα 3.6.

3.10

$$A\underline{x}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix} = 6\underline{x}_1 \Rightarrow \lambda_1 = 6.$$

Στη συνέχεια, η διαδικασία υποβάθμησης (βλ. Παράδειγμα 3.6) $\Rightarrow \lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 2$

3.11 Ο πίνακας A έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 3$ και $\lambda_3 = 2 \Rightarrow$ Η ταχύτητα σύγκλισης τ_1 της βασικής μεθόδου εξαρτάται από το λόγο

$$r_1 = |\lambda_2/\lambda_1| = 1/2.$$

Ο πίνακας $A - 2I$ έχει ιδιοτιμές $\mu_i = \lambda_i - 2$, $i = 1, 2, 3$, δηλαδή $\mu_1 = 4$, $\mu_2 = 1$ και $\mu_3 = 0 \Rightarrow$ Η ταχύτητα σύγκλισης τ_2 της προτεινόμενης μεθόδου εξαρτάται από το λόγο

$$r_2 = |\mu_2/\mu_1| = 1/4.$$

$\Rightarrow r_2 = r_1/2 \Rightarrow \tau_2 \approx 2\tau_1$.

3.12

$$A - 0.5I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 1 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix} = LU$$

Το πρώτο βήμα της μεθόδου αντίστροφης επανάληψης (βλ. Παραδείγματα 3.4 και 3.5) $\Rightarrow \underline{\widetilde{x}} = [0.0099, -1.1089, 1.0990]^T$

3.13 Οι ζητούμενοι τριδιαγώνιοι πίνακες είναι (βλ. Παράδειγμα 3.7):

$$A_2 = \begin{bmatrix} -25 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 25 & 125 & 0 \\ 0 & 125 & 41 & 38 \\ 0 & 0 & 38 & -41 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 120 & 25 & 0 & 0 \\ 25 & 0 & 125 & 0 \\ 0 & 125 & 0 & -75 \\ 0 & 0 & -75 & -130 \end{bmatrix}.$$

Έστω $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ ο συμμετρικός τριδιαγώνιος πίνακας

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a_1 & b_2 & & & \\ b_2 & a_2 & b_3 & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & b_{n-1} & a_{n-1} & b_n \\ & & & b_n & a_n \end{bmatrix},$$

$\mathcal{A}_r$ $(r = 1, 2, \ldots, n)$ ο r κύριος υποπίνακας του $\mathcal{A}$, και

$$p_r(\mu) = \det(\mathcal{A}_r - \mu I), \ \mu \in \mathbb{R}, \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Τότε, η "ακολουθία Sturm" $p_0(\mu), p_1(\mu), \ldots, p_n(\mu)$ του $\mathcal{A}$ μπορεί να υπολογιστεί με τη βοήθεια του αναδρομικού τύπου

$$p_0(\mu) = 1, \quad p_1(\mu) = a_1 - \mu,$$
$$p_r(\mu) = (a_r - \mu)p_{r-1}(\mu) - b_r^2 p_{r-2}(\mu), \quad r = 2, 3, \ldots, n.$$

Ιδιότητα ακολουθίας Sturm: Έστω $\alpha(\mu)$ ο αριθμός αλλαγών στα πρόσημα της ακολουθίας Sturm $p_0(\mu), p_1(\mu), \ldots, p_n(\mu)$. Τότε ο $\alpha(\mu)$ ισοόται με τον αριθμό των ιδιοτιμών του $\mathcal{A}$ που είναι μικρότερες του μ. $\Rightarrow$

(i) Η ακολουθία Sturm του πίνακα A_2 είναι

$$p_0(\mu) = 1, \ p_1(\mu) = -25 - \mu, \ p_2(\mu) = (25 - \mu)p_1(\mu) - 25^2,$$
$$p_3(\mu) = (41 - \mu)p_2(\mu) - 125^2 p_1(\mu) \text{ και } p_4(\mu) = (-41 - \mu)p_3(\mu) - 38^2 p_2(\mu).$$

$\Rightarrow$

$$p_0(25) > 0, \quad p_1(25) < 0, \quad p_2(25) =< 0, \ p_3(25) > 0 \ \text{ και } p_4(25) < 0.$$

$\Rightarrow \alpha(25) = 3.$ $\Rightarrow$ Ο A_2 (και συνεπώς ο A) έχει τρείς ιδιοτιμές μικρότερες του 25. $\Rightarrow$ Ο A έχει μία ιδιοτιμή μεγαλύτερη του 25.

(ii) Η ακολουθία Sturm του πίνακα B_2 είναι

$$p_0(\mu) = 1, \ p_1(\mu) = 120 - \mu, \ p_2(\mu) = -\mu p_1(\mu) - 25^2,$$
$$p_3(\mu) = -\mu p_2(\mu) - 125^2 p_1(\mu) \text{ και } p_4(\mu) = (-130 - \mu)p_3(\mu) - 75^2 p_2(\mu).$$

$\Rightarrow$

$$p_0(0) > 0, \quad p_1(0) > 0, \quad p_2(0) < 0, \; p_3(0) < 0 \;\text{ και } p_4(0) > 0.$$

$\Rightarrow \alpha(0) = 2$. $\Rightarrow$ Ο B_2 (και συνεπώς ο B) έχει δύο αρνητικές ιδιοτιμές. $\Rightarrow$ Ο B έχει δύο θετικές ιδιοτιμές.

3.14 Οι ζητούμενοι πίνακες είναι (βλ. Παράδειγμα 3.8):

$$H = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & -7 & -11 \end{bmatrix}.$$

3.15 Ο ζητόμενος τριδιαγώνιος πίνακας είναι (βλ. Παράδειγμα 3.7):

$$A_2 = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

3.16 Η ακολουθία Sturm του πίνακα A είναι (βλ. Άσκηση 3.13):

$$\begin{aligned} &p_0(\mu) = 1, \; p_1(\mu) = 1-\mu, \; p_2(\mu) = (3-\mu)p_1(\mu) - 4 \\ &p_3(\mu) = (4-\mu)p_2(\mu) - p_1(\mu) \text{ και } p_4(\mu) = (1-\mu)p_3(\mu) - p_2(\mu). \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$p_0(2) > 0, \; p_1(2) < 0, \; p_2(2) < 0, p_3(2) < 0 \text{ και } p_4(0) > 0.$$

και

$$p_0(5) > 0, \; p_1(5) < 0, \; p_2(5) > 0, p_3(5) = 0 \text{ και } p_4(5) < 0.$$

Άρα (βλ. Άσκηση 3.13), $\alpha(2) = 2$ και $\alpha(5) = 3$. $\Rightarrow$ Ο A έχει δύο ιδιοτιμές μικρότερες του 2 και τρείς ιδιοτιμές μικρότερες του 5. $\Rightarrow$ Ο A έχει μια ιδιοτιμη στο διάστημα $(2, 5)$.

Επίσης,

$$|\lambda| \le ||A||_\infty = 6 \quad \Rightarrow \quad -6 \le \lambda \le 6,$$

για κάθε ιδιοτιμή λ του A. $\Rightarrow$ Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ο A έχει μια ιδιοτιμή στο δίαστημα $(5, 6)$ και δύο ιδιοτιμές στο διάστημα $(-6, 2)$.

3.17 Για τον πίνακα A το πρώτο βήμα της μεθόδου LR (σε μορφή Cholesky) είναι:

$$A_1 = A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} =: L_1 L_1^T,$$

και

$$A_2 = L_1^T L_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 10 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Έλεγχος: $\mathrm{trace(A_2)} = 24 = \mathrm{trace(A)}$.

Το αντίστοιχο βήμα για τον πίνακα B είναι:

$$B_1 = B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =: L_1 L_1^T,$$

και

$$B_2 = L_1^T L_1 = \begin{bmatrix} 17 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 20 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Έλεγχος: $\mathrm{trace(B_2)} = 48 = \mathrm{trace(B)}$.

3.18 Οι πίνακες που προκύπτουν από την εφαρμογή του πρώτου βήματος της μεθόδου QR στους πίνακες A και B είναι (βλ. Παράδειγμα 3.9):

$$A_2 = \begin{bmatrix} 22 & 68/5 & -149/5 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & 8 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 25 & -9 & 0 \\ -9 & 0 & 12 \\ 0 & 12 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.19 Η μέθοδος LR είναι:

$$\begin{aligned} & A_1 = A \\ & A_{k-1} = L_{k-1}R_{k-1}, \quad A_k = R_{k-1}L_{k-1}, \quad k = 2, 3, \ldots\,. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$A_k = L_{k-1}^{-1} L_{k-1} R_{k-1} L_{k-1} = L_{k-1}^{-1} A_{k-1} L_{k-1}, \quad k = 2, 3, \ldots\,.$$

Συνεπώς, εφαρμόζοντας τον πιο πάνω τύπο αναδρομικά,

$$\begin{aligned} A_k &= L_{k-1}^{-1} L_{k-2}^{-1} \cdots L_1^{-1} A_1 L_1 L_2 \cdots L_{k-1} \\ &= (L_1 L_2 \cdots L_{k-1})^{-1} A L_1 L_2 \cdots L_{k-1} \\ &= \Lambda_{k-1}^{-1} A \Lambda_{k-1}. \end{aligned}$$

Επίσης, χρησιμοποιώντας το πιο πάνω αποτέλεσμα,

$$\begin{aligned} \Lambda_k U_k &= \Lambda_{k-1}(L_k R_k) U_{k-1} = \Lambda_{k-1} A_k U_{k-1} \\ &= \Lambda_{k-1} \Lambda_{k-1}^{-1} A \Lambda_{k-1} U_{k-1} = A \Lambda_{k-1} U_{k-1}. \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\Lambda_k U_k = A\Lambda_{k-1}U_{k-1} = A^2\Lambda_{k-2}U_{k-2} = \cdots = A^{k-1}\Lambda_1 U_1 = A^{k-1}L_1R_1 = A^k.$$

3.20 Η μέθοδος QR είναι:

$$\begin{array}{l} A_1 = A \\ A_{k-1} = Q_{k-1}R_{k-1}, \quad A_k = R_{k-1}Q_{k-1}, \quad k = 2, 3, \dots \,. \end{array}$$

$\Rightarrow$

$$A_k = Q_{k-1}^T Q_{k-1} R_{k-1} Q_{k-1} = Q_{k-1}^T A_{k-1} Q_{k-1}, \quad k = 2, 3, \dots \,.$$

Συνεπώς, εφαρμόζοντας τον πιο πάνω τύπο αναδρομικά,

$$\begin{array}{rcl} A_k & = & Q_{k-1}^T Q_{k-2}^T \cdots Q_1^T A_1 Q_1 Q_2 \cdots Q_{k-1} \\ & = & (Q_1 Q_2 \cdots Q_{k-1})^T A Q_1 Q_2 \cdots Q_{k-1} \\ & = & H_{k-1}^T A H_{k-1}. \end{array}$$

Επίσης, χρησιμοποιώντας το πιο πάνω αποτέλεσμα,

$$\begin{array}{rcl} H_k U_k & = & H_{k-1}(Q_k R_k)U_{k-1} = H_{k-1}A_k U_{k-1} \\ & = & H_{k-1}H_{k-1}^T A H_{k-1}U_{k-1} = AH_{k-1}U_{k-1}. \end{array}$$

Συνεπώς

$$H_k U_k = AH_{k-1}U_{k-1} = A^2 H_{k-2}U_{k-2} = \cdots = A^{k-1}H_1 U_1 = A^{k-1}Q_1 R_1 = A^k.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Επαναληπτικές μέθοδοι για γραμμικά συστήματα

4.1 Οι μέθοδοι Jacobi, Gauss-Seidel και SOR

Έστω $\underline{x}$ η λύση ενός γραμμικού συστήματος

$$A\underline{x} = \underline{b}, \tag{4.1}$$

όπου

$$A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n,n}, \text{ με } a_{i,i} \neq 0, \forall i, \quad \underline{b} \in \mathbb{R}^n \quad \text{και} \quad \det A \neq 0.$$

Το πιο πάνω σύστημα μπορεί να εκφραστεί ως

$$a_{i,i}x_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}x_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}x_j, \; i = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.2}$$

Θέτουμε $A = D - L - U$, όπου $D \in \mathbb{R}^{n,n}$ είναι ο διαγώνιος πίνακας

$$D = \begin{bmatrix} a_{1,1} & & & & \\ & a_{2,2} & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & a_{n,n} \end{bmatrix},$$

και $L, U \in \mathbb{R}^{n,n}$ οι αυστηρά κάτω και άνω τριγωνικοί πίνακες

$$L = -\begin{bmatrix} 0 & & & & \\ a_{2,1} & 0 & & & \\ \cdot & & \cdot & & \\ \cdot & & & \cdot & \\ a_{n,1} & \cdot & \cdot & a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad U = -\begin{bmatrix} 0 & a_{1,2} & \cdot & \cdot & a_{1,n} \\ & 0 & & & \cdot \\ & & \cdot & & \cdot \\ & & & 0 & a_{n-1,n} \\ & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Με τους συμβολισμούς αυτούς, του γραμμικό σύστήμα μπορεί να εκφραστεί (βλ. (4.2)) ως

$$D\underline{x} = (L+U)\underline{x} + \underline{b}, \quad \text{ή ως} \quad \underline{x} = D^{-1}(L+U)\underline{x} + D^{-1}\underline{b}.$$

• **Η μέθοδος Jacobi:** Το βήμα $\underline{x}^{(k)} \rightarrow \underline{x}^{(k+1)}$ ορίζεται ως εξής (βλ. (4.2)):

$$a_{i,i}x_i^{(k+1)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}x_j^{(k)}, \; i = 1, 2, \ldots, n, \; k = 0, 1, \ldots \;,$$

ή, σε μορφή πινάκων,

$$\begin{aligned} &D\underline{x}^{(k+1)} = (L+U)\underline{x}^{(k)} + \underline{b}, \; \Rightarrow \\ &\underline{x}^{(k+1)} = D^{-1}(L+U)\underline{x}^{(k)} + D^{-1}\underline{b}, \; \Rightarrow \\ &\underline{x}^{(k+1)} = B\underline{x}^{(k)} + \underline{\beta}, \quad k = 0, 1, \ldots, \; , \end{aligned}$$

όπου $B := D^{-1}(L+U)$ είνα ο πίνακας επανάληψης Jacobi και $\underline{\beta}$ το διάνυσμα $\underline{\beta} = D^{-1}\underline{b}$.

• **Η μέθοδος Gauss-Seidel:** Για τον υπολογισμό του $x_i^{(k+1)}$ $(i > 1)$ χρησιμοποιούνται οι πιο πρόσφατες διαθέσιμες "προσεγγίσεις"

$$x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \ldots, x_{i-1}^{(k+1)},$$

αντί των

$$x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_{i-1}^{(k)},$$

που χρησιμοποιούνται στη μέθοδο Jacobi. ⇒ Η μέθοδος ορίζεται ως εξής:

$$a_{i,i}x_i^{(k+1)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}x_j^{(k)},$$
$$i = 1, 2, \ldots, n, \quad k = 0, 1, \ldots \;,$$

ή, σε μορφή πινάκων,

$$\begin{aligned} &D\underline{x}^{(k+1)} = L\underline{x}^{(k+1)} + U\underline{x}^{(k)} + \underline{b}, \; \Rightarrow \\ &\underline{x}^{(k+1)} = (D-L)^{-1}U\underline{x}^{(k)} + (D-L)^{-1}\underline{b}, \; \Rightarrow \\ &\underline{x}^{(k+1)} = G\underline{x}^{(k)} + \underline{g}, \quad k = 0, 1, \ldots, \; , \end{aligned}$$

όπου $G := (D-L)^{-1}U$ είνα ο πίνακας επανάληψης Gauss-Seidel και $\underline{g}$ το διάνυσμα $\underline{g} := (D-L)^{-1}\underline{b}$.

• **Η μέθοδος SOR:** Οι εξισώσεις που ορίζουν τη μέθοδο Gauss-Seidel μπορούν να εκφραστούν ως

$$a_{i,i}x_i^{(k+1)} = a_{i,i}x_i^{(k)} + \{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{i,j}x_j^{(k)}\},$$

δηλαδή ως

$$a_{i,i}x_i^{(k+1)} = a_{i,i}x_i^{(k)} + \text{“διορθωτικός όρος”}.$$

Στη μέθοδο SOR ο ”διορθωτικός όρος” πολλαπλασιάζεται με μια παράμετρο “επιτάχυνσης” w $(w > 1)$. $\Rightarrow$ Η μέθοδος ορίζεται ως εξής:

$$a_{i,i}x_i^{(k+1)} = a_{i,i}x_i^{(k)} + w\{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{i,j}x_j^{(k)}\},$$

ή, σε μορφή πινάκων,

$$\begin{aligned}
&D\underline{x}^{(k+1)} = D\underline{x}^{(k)} + w\{L\underline{x}^{(k+1)} + (-D+U)\underline{x}^{(k)} + \underline{b}\}, \Rightarrow \\
&\underline{x}^{(k+1)} = (D-wL)^{-1}\{(1-w)D + wU\}\underline{x}^{(k)} + w(D-wL)^{-1}\underline{b}, \Rightarrow \\
&\underline{x}^{(k+1)} = H(w)\underline{x}^{(k)} + \underline{h}(w), \quad k = 0, 1, \ldots, \ ,
\end{aligned}$$

όπου $H(w) := (D - wL)^{-1}\{(1 - w)D + wU\}$ είναι ο πίνακας επανάληψης SOR και $\underline{h}(w)$ το διάνυσμα $\underline{h}(w) := w(D - wL)^{-1}\underline{b}$. Φυσικά $H(1) = G$ και $\underline{h}(1) = \underline{g}$. Δηλαδή, αν $w = 1$, τότε η μέθοδος SOR συμπίπτει με τη μέθοδο Gauss-Seidel.

Παρατηρούμε ότι καθεμία από τις μεθόδους Jacobi, Gauss-Seidel και SOR είναι της μορφής

$$\underline{x}^{(k+1)} = M\underline{x}^{(k)} + \underline{c}, \quad M \in \mathbb{R}^{n,n}, \quad \underline{c} \in \mathbb{R}^n,$$

όπου, σε κάθε περίπτωση,

$$\underline{x} = M\underline{x} + \underline{c} \quad \text{ή} \quad (I - M)\underline{x} = \underline{c},$$

είναι το αρχικό γραμμικό σύστημα (4.1). Αυτό προκύπτει άμεσα από τους ορισμούς των μεθόδων. Πιο γενικά, έστω

$$A = Q - R, \quad Q, R \in \mathbb{R}^{n,n},$$

ένας διαχωρισμός του A, τέτιοιος ώστε $\det Q \neq 0$. Τότε το σύστημα (4.1) μπορεί να εκφραστεί ως

$$(Q - R)\underline{x} = \underline{b}, \Rightarrow \ Q\underline{x} = R\underline{x} + \underline{b}, \Rightarrow \ \underline{x} = Q^{-1}R\underline{x} + Q^{-1}\underline{b}.$$

Η παρατήρηση αυτή οδηγεί στον ορισμό της “γενικής” επαναληπτικής μεθόδου

$$\underline{x}^{(k+1)} = Q^{-1}R\underline{x}^{(k)} + Q^{-1}\underline{b}, \quad k = 0, 1, \ldots, \ . \tag{4.3}$$

Προφανώς, οι μέθοδοι Jacobi, Gauss-Seidel και SOR είναι αντίστοιχα οι πιο κάτω ειδικές περιπτώσεις της (4.3):

- <u>Jacobi</u>: $Q = D, \quad R = L + U$.
- <u>Gauss – Seidel</u>: $Q = D - L, \quad R = U$.
- <u>SOR</u>: $Q = \frac{1}{w}(D - wL), \quad R = \frac{1}{w}\{(1 - w)D + wH\}$.

4.2 Παράδειγμα

Θεωρούμε την εφαρμογή των μεθόδων Jacobi, Gauss-Seidel και SOR στο πιο κάτω τριδιαγώνιο γραμμικό σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & & & & & = & 1, \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & & = & 2, \\ & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 3, \\ & & & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 4. \end{array}$$

Η ακριβής λύση του συστήματος είναι: $x_1 = 4$, $x_2 = 7$, $x_3 = 8$, $x_4 = 6$.

Οι μέθοδοι εφαρμόζονται ως εξής:

Jacobi: Για $k = 0, 1, 2, \dots$,

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{2}(1 + x_2^{(k)}), \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{2}(2 + x_1^{(k)} + x_3^{(k)}), \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{2}(3 + x_2^{(k)} + x_4^{(k)}), \\ x_4^{(k+1)} &= \frac{1}{2}(4 + x_3^{(k)}). \end{aligned}$$

Gauss-Seidel: Για $k = 0, 1, 2, \dots$,

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{2}(1 + x_2^{(k)}), \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{2}(2 + x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)}), \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{2}(3 + x_2^{(k+1)} + x_4^{(k)}), \\ x_4^{(k+1)} &= \frac{1}{2}(4 + x_3^{(k+1)}). \end{aligned}$$

SOR με παράμετρο επιτάχυνσης $\mathbf{w} > \mathbf{1}$: Για $k = 0, 1, 2, \dots$,

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= x_1^{(k)} + \frac{w}{2}(1 - 2x_1^{(k)} + x_2^{(k)}), \\ x_2^{(k+1)} &= x_2^{(k)} + \frac{w}{2}(2 + x_1^{(k+1)} - 2x_2^{(k)} + x_3^{(k)}), \\ x_3^{(k+1)} &= x_3^{(k)} + \frac{w}{2}(3 + x_2^{(k+1)} - 2x_3^{(k)} + x_4^{(k)}), \\ x_4^{(k+1)} &= x_4^{(k)} + \frac{w}{2}(4 + x_3^{(k+1)} - 2x_4^{(k)}). \end{aligned}$$

Με $\underline{x}^{(0)} = [0, 0, 0, 0]^T$ και αριθμητική 2 δεκαδικών ψηφίων, οι μέθοδοι δίνουν τα εξής αποτελέσματα:

Jacobi:

$$\begin{array}{ll} \underline{x}^{(1)} = [0.50, 1.00, 1.50, 2.00]^T, & \underline{x}^{(2)} = [1.00, 2.00, 3.00, 2.75]^T, \\ \cdots, \cdots, \quad \cdots \quad \cdots, \cdots, & \underline{x}^{(34)} = [4.00, 6.99, 7.99, 6.00]^T, \\ \underline{x}^{(35)} = [4.00, 7.00, 8.00, 6.00]^T, & \underline{x}^{(36)} = [4.00, 7.00, 8.00, 6.00]^T. \end{array}$$

Gauss-Seidel:

$$\underline{x}^{(1)} = [0.50, 1.25, 3.13, 3.06]^T, \quad \underline{x}^{(2)} = [1.13, 2.63, 4.34, 4.17]^T, \cdots,$$
$$\underline{x}^{(10)} = [3.88, 6.85, 7.88, 5.94]^T, \cdots, \underline{x}^{(18)} = [4.00, 6.99, 8.00, 6.00]^T,$$
$$\underline{x}^{(19)} = [4.00, 7.00, 8.00, 6.00]^T, \quad \underline{x}^{(20)} = [4.00, 7.00, 8.00, 6.00]^T.$$

SOR:

(i) Με $w = 1.2$:

$$\underline{x}^{(1)} = [0.60, 1.56, 2.74, 4.04]^T, \cdots, \cdots,$$
$$\underline{x}^{(7)} = [3.94, 6.93, 7.95, 5.98]^T, \cdots, \cdots,$$
$$\underline{x}^{(11)} = [4.00, 7.00, 8.00, 6.00]^T, \quad \underline{x}^{(12)} = [4.00, 7.00, 8.00, 6.00]^T.$$

(ii) Με τη "βέλτιστη" τιμή $w = w_{opt} = 1.2596$:

$$\underline{x}^{(1)} = [0.63, 1.66, 2.93, 4.37]^T, \cdots, \cdots,$$
$$\underline{x}^{(7)} = [3.99, 6.99, 7.99, 6.00]^T, \cdots, \cdots,$$
$$\underline{x}^{(8)} = [4.00, 7.00, 8.00, 6.00]^T, \quad \underline{x}^{(9)} = [4.00, 7.00, 8.00, 6.00]^T.$$

Ασκήσεις

4.1 Έστω $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ένας αντιστρέψιμος πίνακας και $X_1, X_2, \ldots$, μια ακολουθία πινάκων που ορίζονται από την επαναληπτική διαδικασία

$$X_{k+1} = X_k(2I - AX_k), \quad k = 0, 1, \ldots ,$$

όπου ο $X_0 \in \mathbb{R}^{n,n}$ επιλέγεται αυθαίρετα. Δείξτε ότι αν $C = I - AX_0$, τότε

$$I - AX_k = C^{2^k}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Στη συνέχεια δείξτε ότι αν $||C|| < 1$, όπου $||\cdot||$ είναι μια επαγόμενη νόρμα πινάκων, τότε:

$$\lim_{k\to\infty} X_k = A^{-1} ,$$

και

$$||A^{-1} - X_k|| \le ||X_0||(\frac{p^{2^k}}{1-p}),$$

όπου $p := ||C||$.

4.2 Έστω B και $H(w)$ οι πίνακες επανάληψης Jacobi και SOR (με παράμετρο επιτάχυνσης w) που αντιστοιχούν σε ένα πίνακα $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n,n}$, με $a_{i,i} \neq 0$. Δείξτε ότι οι ιδιοτιμές των B και $H(w)$ είναι αντίστοιχα οι ρίζες των εξισώσεων

$$\det(\mu D - L - U) = 0 \tag{4.4}$$

και

$$\det\{(\lambda + w - 1)D - \lambda w L - wU\} = 0, \tag{4.5}$$

όπου με τους συνήθεις συμβολισμούς $A = D - L - U$.

4.3 Με τους συμβολισμούς της Άσκησης 4.2, έστω A ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

(i) Με τη βοήθεια της (4.1), δείξτε ότι οι ιδιοτιμές μ του B είναι $\mu = 0, 0, \pm 1/2$.

(ii) Με τη βοήθεια της (4.2), δείξτε ότι αν λ είναι οι ιδιοτιμές του $H(w)$, τότε

$$(\lambda + w - 1)^2 = \lambda \mu^2 w^2.$$

Δείξτε, επίσης, ότι αν G είναι ο πίνακας επανάληψης Gauss-Seidel, τότε $\varrho(G) = \{\varrho(B)\}^2$.

4.4 Έστω $A \in \mathbb{R}^{N,N}$ ένας σύνθετος τριδιαγώνιος πίνακας της μορφής

$$A = \begin{bmatrix} D_1 & A_1 & & & \\ B_1 & D_2 & A_2 & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & A_{m-1} \\ & & & B_{m-1} & D_m \end{bmatrix}, \tag{4.6}$$

όπου όλοι οι διαγώνιοι υποπίνακες D_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, είναι αντιστρέψιμοι τετραγωνικοί διαγώνιοι πίνακες. Δείξτε ότι αν (με τους συνήθεις συμβολισμούς) $A = D - L - U$, τότε για κάθε $\alpha \neq 0$,

$$\det(D - L - U) = \det(D - \alpha L - \alpha^{-1} U).$$

Δείξτε επίσης ότι αν B, G και $H(w)$ είναι οι πίνακες επανάληψης Jacobi, Gauss-Seidel και SOR (με παράμετρο επιτάχυνσης $w \neq 0$) που αντιστοιχούν στον A, τότε:

(i) Οι μη-μηδενικές ιδιοτιμές του B προκύπτουν ανά ζεύγη $\pm\mu$.

(ii) Οι μη-μηδενικές ιδιοτιμές λ του $H(w)$ συνδέονται με τις ιδιοτιμές μ του B μέσω της σχέσης

$$(\lambda + w - 1)^2 = \lambda w^2 \mu^2. \tag{4.7}$$

(iii)

$$R_\infty(G) = 2R_\infty(B),$$

όπου $R_\infty(B)$ και $R_\infty(G)$ συμβολίζουν αντίστοιχα τις ασυμπτωτικές ταχύτητες σύγκλισης της εφαρμογής των μεθόδων Jacobi και Gauss-Seidel σε ένα γραμμικό σύστημα $A\underline{x} = \underline{b}$.

(**Παρατήρηση:** Χρησιμοποιώντας την (4.7) μπορεί να δειχτεί ότι αν οι ιδιοτιμές του B είναι πραγματικές και $\varrho(B) < 1$, τότε η "βέλτιστη" SOR παράμετρος w_{opt}

(η οποία ελαχιστοποιεί την $\varrho(H(w))$, ως προς την $\varrho(B)$, και μεγιστοποιεί την $R_\infty(H(w))$) δίνεται από την

$$w_{opt} = \frac{2}{1 + \{1 - \varrho(B)^2\}^{1/2}} \ . \tag{4.8}$$

Αξίζει επίσης να σημειωθεί ότι η αριθμητική επίλυση ελλειπτικών διαφορικών εξισώσεων οδηγεί συχνά σε γραμμικά συστήματα $A\underline{x} = \underline{b}$, όπου ο πίνακας A είναι της μορφής (4.6).)

4.5 Έστω A ο $N \times N$ τριδιαγώνιος πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} a & b & & & \\ c & a & b & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & c & a & b \\ & & & c & a \end{bmatrix},$$

όπου $a, b, c \in \mathbb{R}$ και $b \neq 0$, $c \neq 0$. Δείξτε ότι οι ιδιοτιμές του A είναι

$$\lambda_j = a + 2b(\frac{c}{b})^{\frac{1}{2}} \cos(\frac{j\pi}{N+1}) \quad j = 1, 2, \ldots, N.$$

(**Υπόδειξη:** Υποθέστε ότι λ και $\underline{x} = (x_j) \in \mathbb{C}^N$ είναι μια ιδιοτιμή και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα του A και θεωρήστε την επίλυση της εξίσωσης διαφορών $cx_{j-1} + (a - \lambda)x_j + bx_{j+1} = 0$, $j = 0, 1, \ldots, N$, με $x_0 = x_{N+1} = 0$.)

4.6 Έστω B και $H(w)$ οι πίνακες επανάληψης Jacobi και SOR (με παράμετρο w) που αντιστοιχούν στον $N \times N$ τριδιαγώνιο πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}. \tag{4.9}$$

(i) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της Άσκησης 4.5, δείξτε ότι

$$\varrho(B) = \cos(\frac{\pi}{N+1}) \ .$$

(ii) Χρησιμοποιώντας την (4.5), δείξτε ότι η “βέλτιστη” τιμή της SOR παραμέτρου w είναι

$$w_{opt} = 2/(1 + \sin(\frac{\pi}{N+1})) \ .$$

(iii) Δείξτε ότι στην περίπτωση $N = 3$,

$$R_\infty(H_{opt}) > 5R_\infty(B) \ .$$

(iv) Γράψτε ένα πρόγραμμα Fortran για την επίλυση με τη μέθοδο SOR του συστήματος $A\underline{x} = \underline{b}$, όπου A είναι ο πίνακας (4.6) και $\underline{b} \in \mathbb{R}^N$. (Χρησιμοποιήστε ως κριτίριο τερματισμού το $||\underline{x}^{(k+1)} - \underline{x}^{(k)}||_\infty < 10^{-6}$.)

(v) Χρησιμοποιήστε το πιο πάνω πρόγραμμα για την επίλυση του συστήματος $A\underline{x} = \underline{b}$, με $N = 20$, $\underline{b} = [1, 0, \ldots, 0, 1]^T$ και με παραμέτρους επιτάχυνσης $w = 1$ (δηλ. τη μέθοδο Gauss-Seidel) και $w = w_{opt}$.

(**Σημείωση:** Στόχος της Άσκησης 4.6 είναι η επεξήγηση ορισμένων στοιχείων της θεωρίας και εφαρμογής της μεθόδου SOR. Στην πράξη, τριδιαγώνια γραμμικά συστήματα επιλύονται χρησιμοποιώντας ειδικές (απλοποιημένες) μεθόδους απαλοιφής Gauss ή LU-παραγοντοποίησης.)

Λύσεις Ασκήσεων

4.1 $X_{k+1} = X_k(2I - AX_k) \Rightarrow$

$I - AX_{k+1} = I - AX_k(2I - AX_k) = I - 2AX_k + (AX_k)^2 = (I - AX_k)^2.$

Έστω $C_k = I - AX_k$. Τότε

$$C_{k+1} = C_k^2 \quad \Rightarrow \quad C_k = C_{k-1}^2 = C_{k-2}^{2^2} = \cdots = C_0^{2^k},$$

όπου $C_0 = I - AX_0 = C$. Άρα

$$I - AX_k = C^{2^k} \quad \Rightarrow \quad X_k = A^{-1}(I - C^{2^k}).$$

Συνεπώς, αν $||C|| < 1$, τότε

$$\lim_{k\to\infty} C^{2^k} = \mathcal{O} \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} X_k = A^{-1}.$$

Επίσης,

$$C = I - AX_0 \quad \Rightarrow \quad AX_0 = I - C \quad \Rightarrow A^{-1} = X_0(I - C)^{-1}.$$

Άρα, επειδή $||C|| = p < 1$,

$$||A^{-1}|| \leq \frac{||X_0||}{1 - ||C||} = \frac{||X_0||}{1 - p} \quad (\text{βλ. Άσκηση } 2.7).$$

Τέλος,

$$X_k = A^{-1}(I - C^{2^k}) \quad \Rightarrow \quad A^{-1} - X_k = A^{-1}C^{2^k}$$

$$\Rightarrow ||A^{-1} - X_k|| \leq ||A^{-1}||p^{2^k} \quad \Rightarrow \quad ||A^{-1} - X_k|| \leq ||X_0||(\frac{p^{2^k}}{1 - p}).$$

4.2 Ο πίνακας επανάληψης Jacobi είναι $B = D^{-1}(L + U)$. $\Rightarrow$ Οι ιδιοτιμές του B είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\det\{\mu I - D^{-1}(L + U)\} = 0$, η οποία μπορεί να εκφραστεί ως

$$\det D^{-1} \cdot \det\{\mu D - L - U\} = 0, \quad \text{ή ως} \quad \det\{\mu D - L - U\} = 0.$$

Ο πίνακας επανάληψης SOR είνα $H(w) = (D - wL)^{-1}\{(1 - w)D + wU\}$. $\Rightarrow$ Οι ιδιοτιμές του $H(w)$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$\det\{\lambda I - (D - wL)^{-1}[(1 - w)D + wU]\} = 0,$$

η οποία μπορεί να εκφραστεί ως

$$\det(D - wL)^{-1} \cdot \det\{\lambda(D - wL) - (1 - w)D - wU\} = 0,$$

ή ως

$$\det\{(\lambda + w - 1)D - \lambda wL - wU\} = 0.$$

4.3 (i) Η (4.4) $\Rightarrow$ Οι ιδιοτιμές του B είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$\begin{vmatrix} 4\mu & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4\mu & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4\mu & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 4\mu \end{vmatrix} = 0, \quad \text{δηλ. της} \;\; 32\mu^2(8\mu^2-2)=0.$$

Άρα οι ιδιοτιμές του B είναι

$$\mu = 0, 0, \pm 1/2.$$

(ii) Η (4.5) $\Rightarrow$ Οι ιδιοτιμές του $H(w)$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$\begin{vmatrix} 4k & 0 & -w & -w \\ 0 & 4k & -w & -w \\ -\lambda w & -\lambda w & 4k & 0 \\ -\lambda w & -\lambda w & 0 & 4k \end{vmatrix} = 0, \quad \text{όπου} \;\; k = \lambda + w - 1.$$

Συνεπώς

$$32k^2(8k^2 - 2\lambda w^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad k^2 = 0 \;\text{ ή }\; k^2 = \frac{1}{4}\lambda w^2 \quad \Rightarrow \quad k^2 = \lambda\mu^2 w,$$

όπου μ οι ιδιοτιμές του B. Άρα

$$(\lambda + w - 1)^2 = \lambda \mu^2 w^2.$$

Τέλος, επειδή $G = H(1)$, το πιο πάνω αποτέλεσμα με $w = 1$ δίνει ότι $\varrho(G) = \{\varrho(B)\}^2$.

4.4 $A = D - L - U$, όπου

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & & & & \\ & D_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & D_m \end{bmatrix}, \quad L = -\begin{bmatrix} \mathcal{O} & & & & \\ B_1 & \mathcal{O} & & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & B_{m-1} & \mathcal{O} \end{bmatrix}$$

και

$$U = -\begin{bmatrix} \mathcal{O} & A_1 & & & \\ & \mathcal{O} & A_2 & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & A_{m-1} \\ & & & & \mathcal{O} \end{bmatrix}.$$

Έστω

$$C(\alpha) = \begin{bmatrix} I_1 & & & & \\ & \alpha I_2 & & & \\ & & \alpha^2 I_3 & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \alpha^{m-1} I_m \end{bmatrix} =: \operatorname{diag}(\alpha^{i-1} I_i),$$

όπου, $\forall i$, $I_i \equiv$ ταυτοτικός πίνακας του ίδιου βαθμού με τον D_i. Τότε

$$C^{-1}(\alpha) = \mathrm{diag}(\alpha^{-(i-1)} I_i)$$

και

$$C(\alpha)AC^{-1}(\alpha) = \begin{bmatrix} D_1 & \alpha^{-1}A_1 & & & \\ \alpha B_1 & D_2 & \alpha^{-1}A_2 & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \alpha^{-1}A_{m-1} \\ & & & \alpha B_{m-1} & D_m \end{bmatrix} = D - \alpha L - \alpha^{-1}U.$$

$\Rightarrow$

$$\det(D - \alpha L - \alpha^{-1}U) = \det C(\alpha)AC^{-1}(\alpha) = \det A = \det(D - L - U).$$

(i) $B = D^{-1}(L+U) = E + F$, όπου $E = D^{-1}L$ και $F = D^{-1}U \Rightarrow$ Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του B είναι

$$P_N(\mu) = \det(\mu I - B) = \det(\mu I - E - F),$$

όπου ο πίνακας $\mu I - E - F$ έχει τη σύνθετη τριδιαγώνια μορφή του $A \Rightarrow$

$$P_N(\mu) = \det(\mu I - E - F) = \det(\mu I - \alpha E - \alpha^{-1}F), \quad \forall \alpha \neq 0.$$

Ιδιαίτερα, με $\alpha = -1$,

$$\begin{aligned} P_N(\mu) &= \det(\mu I - E - F) = \det(\mu I + E + F) \\ &= (-1)^N \det(-\mu I - E - F) = (-1)^N P_N(-\mu) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Το P_N είναι περιττό πολυώνυμο, αν ο N είναι περιττός, και άρτιο πολυώνυμο, αν ο N είναι άρτιος $\Rightarrow$ Για κάποιο $k \geq 0$,

$$P_N(\mu) = \begin{cases} \mu^{2k} f(\mu^2), & \text{αν } N = 2n, \\ \mu^{2k+1} g(\mu^2), & \text{αν } N = 2n+1, \end{cases}$$

όπου τα πολυώνυμα f και g είναι τ.ω. $f(0) \neq 0$ και $g(0) \neq 0 \Rightarrow$ Οι μη-μηδενικές ρίζες της εξίσωσης $P(\mu) = 0$, δηλ. οι μη-μηδενικές ιδιοτιμές του B, προκύπτουν ανά ζεύγη $\pm\mu$. Επίσης, για κάποιο $k \geq 0$, ο B θα έχει $2k$ (αν ο N είναι άρτιος) ή $2k+1$ (αν ο N είναι περιττός) μηδενικές ιδιοτιμές.

(ii) Με $E = D^{-1}L$ και $F = D^{-1}U$,

$$\begin{aligned} H(w) &= (D - wL)^{-1}\{(1-w)D + wU\} \\ &= (I - wD^{-1}L)^{-1}\{(1-w)I + wD^{-1}U\} \\ &= (I - wE)^{-1}\{(1-w)I + wF\} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του $H(w)$ είναι

$$\begin{aligned} Q_N(\lambda) &= \det\{\lambda I - (I - wE)^{-1}((1-w)I + wF)\} \\ &= \det(I - wE)^{-1} \det\{(\lambda + w - 1)I - w\lambda E - wF\}. \end{aligned}$$

Ο πίνακας $I - wE$ είναι μοναδιαίος κάτω τριγωνικός $\Rightarrow \det(I - wE) = \det(I - wE)^{-1} = 1 \Rightarrow$

$$Q_N(\lambda) = \det\{(\lambda + w - 1)I - w\lambda E - wF\},$$

όπου ο πίνακας $(\lambda + w - 1)I - w\lambda E - wF$ έχει τη σύνθετη μορφή του A (με $D = (\lambda + w - 1)I$, $L = w\lambda E$ και $U = wF$) $\Rightarrow$

$$Q_N(\lambda) = \det\{(\lambda + w - 1)I - \alpha w\lambda E - \alpha^{-1}wF\}, \quad \forall\alpha \neq 0.$$

Ιδιαίτερα με $\alpha = \lambda^{-1/2}$, όπου λ μια μη-μηδενική ιδιοτιμή του $H(w)$,

$$\begin{aligned} Q_N(\lambda) &= \det\{(\lambda + w - 1)I - \lambda^{1/2}wE - \lambda^{1/2}wF\} \\ &= \det\{w\lambda^{1/2}(w^{-1}\lambda^{-1/2}(\lambda + w - 1)I - (E + F))\} \\ &= w^N\lambda^{N/2}\det\{w^{-1}\lambda^{-1/2}(\lambda + w - 1)I - B\} \\ &= w^N\lambda^{N/2}P_N\{w^{-1}\lambda^{-1/2}(\lambda + w - 1)\}, \end{aligned}$$

όπου $P_N(\mu) = \det(\mu I - B)$ είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του B. Συνεπώς $Q_N(\lambda) = 0$, για $\lambda \neq 0$, ανν $\mu = w^{-1}\lambda^{-1/2}(\lambda + w - 1)$ είναι ρίζα της $P_N(\mu) = 0$, δηλ. ανν

$$w^{-1}\lambda^{-1/2}(\lambda + w - 1) = \mu,$$

ή

$$(\lambda + w - 1)^2 = w^2\mu^2\lambda, \tag{4.10}$$

όπου μ είναι μια ιδιοτιμή του B.

(iii) Με $w = 1$ η (4.10) δίνει

$$\lambda^2 = \lambda\mu^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda(\lambda - \mu^2) = 0$$

$\Rightarrow$ Σε κάθε ζεύγος μη-μηδενικών ιδιοτιμών $\pm\mu$ του B αντιστοιχεί μια μη-μηδενική ιδιοτιμή $\lambda = \mu^2$ του $G = H(1)$. (Οι άλλες ιδιοτιμές του G είναι 0.) $\Rightarrow \varrho(G) = \{\varrho(B)\}^2 \Rightarrow$

$$R_\infty(G) = -\ln\varrho(G) = -2\ln\varrho(B) = 2R_\infty(B).$$

4.5 $A\underline{x} = \lambda\underline{x} \Rightarrow$

$$c\underline{x}_{j-1} + (a - \lambda)\underline{x}_j + b\underline{x}_{j+1} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, N, \tag{4.11}$$

με

$$\underline{x}_0 = \underline{x}_{N+1} = 0. \tag{4.12}$$

Η γενική λύση της (4.11) είναι

$$\underline{x}_j = Bm_1^j + Cm_2^j, \tag{4.13}$$

όπου m_1, m_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$c + (a - \lambda)m + bm^2 = 0. \tag{4.14}$$

(Όπως θα δείξουμε πιο κάτω (βλ. $*$), πρέπει $m_1 \neq m_2$.) Οι (4.12) $\Rightarrow$

$$B + C = 0 \quad \text{και} \quad Bm_1^{N+1} + Cm_2^{N+1} = 0 \tag{4.15}$$

Οι (4.15) $\Rightarrow$

$$(\frac{m_1}{m_2})^{N+1} = 1 = e^{j2\pi i} \;\Rightarrow\; \frac{m_1}{m_2} = e^{j2\pi i/(N+1)},\ j = 1, 2, \ldots, N. \tag{4.16}$$

Η (4.14) $\Rightarrow$

$$m_1 m_2 = c/b. \tag{4.17}$$

Συνεπώς οι (4.16) και (4.17) $\Rightarrow$

$$m_1 = (\frac{c}{b})^{\frac{1}{2}} e^{j\pi i/(N+1)} \;\; \text{και} \;\; m_2 = (\frac{c}{b})^{\frac{1}{2}} e^{-j\pi i/(N+1)}. \tag{4.18}$$

Επίσης, από την (4.14),

$$m_1 + m_2 = -(a - \lambda)/b,$$

$\Rightarrow$

$$\lambda = a + b(m_1 + m_2)$$

$\Rightarrow$ (βλ. (4.18))

$$\begin{aligned} \lambda_j &= a + b(\frac{c}{b})^{\frac{1}{2}}(e^{j\pi i/(N+1)} + e^{-j\pi i/(N+1)}) \\ &= a + 2b(\frac{c}{b})^{\frac{1}{2}} \cos(\frac{j\pi}{N+1}), \quad j = 1, 2, \ldots, N. \end{aligned}$$

($*$ Αν υποθέσουμε ότι $m_1 = m_2$, τότε η (4.13) $\Rightarrow x_j = (B + C)m_1^j$ και οι (4.12) $\Rightarrow B = C = 0$. Δηλ. η υπόθεση οδηγεί στο άτοπο αποτέλεσμα $\underline{x} = \underline{o}$.)

4.6 (iii)

$$\varrho(B) = \cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2} \;\; \text{και} \;\; w_{opt} = 2/(1 + \sin(\pi/4)) = 4 - 2\sqrt{2}.$$

Επίσης, η

$$(\lambda + w - 1)^2 = \lambda w^2 \mu^2, \;\; \text{με} \;\; \mu = \varrho(B) \;\; \text{και} \;\; w = w_{opt},$$

δίνει

$$\varrho(H(w_{opt}) = 3 - 2\sqrt{2}$$

$\Rightarrow$

$$R_\infty(B) = -\ln \varrho(B) = \ln \sqrt{2} = .34657\ldots,$$

και

$$R_\infty(H(w_{opt})) = -\ln \varrho(H(w_{opt})) = -\ln(3 - 2\sqrt{2}) = 1.7627\ldots$$

$\Rightarrow$

$$R_\infty(H(w_{opt})) > 5R_\infty(B).$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Ορθογώνια πολυώνυμα και κανόνες ολοκλήρωσης Gauss

5.1 Προκαταρκτικά

• Πολυωνυμική παρεμβολή κατά Lagrange

Έστω $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $n+1$ διακεκριμένα σημεία σε κάποιο διάστημα $[a,b]$. Τότε η διαδικασία παρεμβολής κατά Lagrange αφορά στον προσδιορισμό ενός πολυωνύμου του οποίου οι τιμές στα σημεία $x_i,\ i = 0, 1, \ldots, n$, συμπίπτουν αντίστοιχα με τις τιμές $y(x_i),\ i = 0, 1, \ldots, n$, μιας συνάρτησης y ορισμένης στο $[a,b]$.

Θεώρημα 5.1 (Ύπαρξη και μοναδικότητα.) *Έστω y μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα $[a,b]$ και $x_i,\ i = 0, 1, \ldots, n$, $n+1$ διακεκριμένα σημεία στο $[a,b]$. Τότε $\exists$ ένα μοναδικό πολυώνυμο $p_n \in \mathbb{P}_n$ τέτοιο ώστε*

$$p_n(x_i) = y(x_i),\ i = 0, 1, \ldots, n.$$

Παρατήρηση 5.1 (Αναπαράσταση του πολυωνύμου p_n.) Το πολυώνυμο p_n μπορεί να εκφραστεί στις ακόλουθες δυο μορφές:

(i) Μορφή Lagrange ή Θεμελιώδη Μορφή:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) y(x_i), \tag{5.1}$$

όπου

$$l_i(x) = \prod_{j=0\ (j\neq i)}^{n} [(x - x_j)/(x_i - x_j)] \tag{5.2}$$

είναι οι συντελεστές παρεμβολής Lagrange.

(ii) Μορφή Newton:

$$\begin{aligned} p_n(x) &= y(x_0) + y[x_0,x_1](x-x_0) + y[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) \\ &\quad + \ldots + y[x_0,x_1,\ldots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}), \end{aligned} \tag{5.3}$$

όπου $y[x_0,x_1,\ldots,x_k]$ είναι η διηρημένη διαφορά k-τάξεως της y στα σημεία $x_0,x_1,\ldots x_k$. Δηλαδή

$$\begin{aligned} & y[x_0,x_1,\ldots,x_k] \\ &= \sum_{i=0}^{k}\{\frac{y(x_i)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_k)}\}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Η $y[x_0,x_1,\ldots,x_k]$ μπορεί επίσης να ορισθεί συναρτήσει διηρημένων διαφορών ($k-$ 1)-τάξεως από τον αναδρομικό τύπο

$$y[x_0,x_1,\ldots,x_k] = \frac{1}{x_k-x_0}\{y[x_1,x_2,\ldots,x_k] - y[x_0,x_1,\ldots x_{k-1}]\}. \tag{5.5}$$

Θεώρημα 5.2 (Σφάλμα παρεμβολής.) *Έστω p_n το πολυώνυμο παρεμβολής μιάς συνάρτησης y στα $n+1$ σημεία*

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Αν $y \in C^{n+1}[a,b]$, τότε $\forall x \in [a,b]$, $\exists\ \xi = \xi(x) \in [a,b]$ τέτοιο ώστε

$$y(x) - p_n(x) = \frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i).$$

• Πολυωνυμική παρεμβολή κατά Hermite - Βασική μορφή

Έστω $x_0,x_1,\ldots,x_n$, $n+1$ διακεκριμένα σημεία σε κάποιο διάστημα $[a,b]$. Τότε, στη βασική της μορφή, η διαδικασία παρεμβολής κατά Hermite αφορά στον προσδιορισμό ενός πολυωνύμου του οποίου: (i) οι τιμές στα σημεία x_i, $i=0,1,\ldots,n$, συμπίπτουν αντίστοιχα με τις τιμές $y(x_i)$, $i=0,1,\ldots,n$, μιας συνάρτησης $y \in C^1[a,b]$, και (ii) οι τιμές της πρώτης παραγώγου του στα σημεία x_i, $i=0,1,\ldots,n$, συμπίπτουν αντίστοιχα με τις τιμές $y^{(1)}(x_i)$, $i=0,1,\ldots,n$, της πρώτης παραγώγου της y.

Θεώρημα 5.3 (Ύπαρξη και μοναδικότητα.) *Έστω $y \in C^1[a,b]$ και x_i, $i = 0,1,\ldots,n$, $n+1$ διακεκριμένα σημεία του $[a,b]$. Τότε $\exists$ ένα μοναδικό πολυώνυμο $H_{2n+1} \in \mathbb{P}_{2n+1}$ τέτοιο ώστε*

$$H_{2n+1}(x_i) = y(x_i),\quad H^{(1)}_{2n+1}(x_i) = y^{(1)}(x_i),\ i=0,1,\ldots,n.$$

Το πολυώνυμο H_{2n+1} του Θεωρήματος 1.3 μπορεί να εκφραστεί στη θεμελιώδη μορφή:

$$\begin{aligned} H_{2n+1}(x) &= \sum_{i=0}^{n}\{1-2l_i^{(1)}(x_i)(x-x_i)\}\{l_i(x)\}^2 y(x_i) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n}(x-x_i)\{l_i(x)\}^2 y^{(1)}(x_i), \end{aligned} \tag{5.6}$$

όπου

$$l_i(x) = \prod_{j=0\ (j\neq i)}^{n} [(x - x_j)/(x_i - x_j)] \tag{5.7}$$

είναι οι συντελεστές παρεμβολής Lagrange.

Θεώρημα 5.4 (Σφάλμα παρεμβολής.) *Έστω H_{2n+1} το πολυώνυμο παρεμβολής Hermite μιάς συνάρτησης y στα $n+1$ σημεία*

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Αν $y \in C^{2n+2}[a, b]$, τότε $\forall x \in [a, b]$, $\exists\, \xi = \xi(x) \in [a, b]$ τέτοιο ώστε

$$y(x) - H_{2n+1}(x) = \frac{y^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)^2.$$

• Τύποι ολοκλήρωσης Newton-Cotes

Έστω $[a, b] \in \mathbb{R}$, $y \in C[a, b]$ και $I : C[a, b] \to \mathbb{R}$ το ολοκλήρωμα

$$I(y) := \int_a^b y(x)dx.$$

Τότε ο (κλειστός) τύπος (ή κανόνας) ολοκλήρωσης Newton-Cotes, τάξης n, είναι

$$I(y) = \sum_{i=0}^{n} A_i y(x_i) + E_n(y),$$

όπου:

- Οι $n+1$ κόμβοι (σημεία ολοκλήρωσης) x_i είναι τα ισαπέχοντα σημεία

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \quad h = (b - a)/n.$$

- Τα βάρη ολοκλήρωσης A_i και το σφάλμα ολοκλήρωσης $E_n(y)$ προκύπτουν θέτοντας

$$y(x) = p_n(x) + e_n(y),$$

  όπου $p_n \in \mathbb{P}_n$ είναι το πολυώνυμο παρεμβολής της y στα σημεία x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, και $e_n(y)$ είναι το σφάλμα παρεμβολής.

Συνεπώς (βλ. (5.1)-(5.2) και Θεώρημα 5.2):

- $$A_i = \int_{a=x_0}^{b=x_n} l_i(x)dx, \quad \text{όπου} \quad l_i(x) = \prod_{j=0\ (j\neq i)}^{n} [(x - x_j)/(x_i - x_j)].$$

- Αν $y \in C^{n+1}[a,b]$, τότε
$$E_n(y) = \int_{a=x_0}^{b=x_n} e_n(y)dx = \frac{1}{(n+1)!}\int_{x_0}^{x_n} \pi_{n+1}(x)y^{(n+1)}(\xi)dx,$$
όπου $\xi = \xi(x) \in [a,b]$ και $\pi_{n+1}(x) = \Pi_{i=0}^{n}(x-x_i)$. (Προφανώς $E_n(p) = 0$, $\forall p \in \mathbb{P}$.)

Οι δύο πιο γνωστοί τύποι Newton-Cotes είναι οι κανόνες του τραπεζίου και του Simpson που δίνονται παρακάτω. Οι κανόνες αυτοί προκύπτουν με $n = 1$ και $n = 2$ αντίστοιχα.

(i) Κανόνας του τραπεζίου ($n = 1$): Το πολυώνυμο παρεμβολής της y στα σημεία
$$x_0 = a \text{ και } x_1 = b,$$
είναι
$$p_1(x) = \frac{1}{h}\{-(x-x_1)y(x_0) + (x-x_0)y(x_1)\}, \quad \text{όπου } h = b-a.$$
$\Rightarrow$ Ο αντίστοιχος τύπος Newton-Cotes είναι
$$\begin{aligned} I(y) &= \int_{x_0}^{x_1} p_1(x)dx + \int_{x_0}^{x_1} e_1(y)dx \\ &= \frac{h}{2}\{y(x_0) + y(x_1)\} + E_1(y), \end{aligned}$$
όπου, αν $y \in C^2[a,b]$,
$$E_1(y) = \int_{x_0}^{x_1} e_1(y)dx = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} \pi_2(x)y^{(2)}(\xi)dx.$$
Παρατηρούμε ότι
$$\pi_2(x) = (x-x_0)(x-x_1) \le 0, \quad x \in [x_0, x_1].$$
$\Rightarrow$ Το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής δίνει
$$E_1(y) = \frac{y^{(2)}(\eta)}{2}\int_{x_0}^{x_1}(x-x_0)(x-x_1)dx = -\frac{h^3}{12}y^{(2)}(\eta),$$
για κάποιο $\eta \in [a,b]$. $\Rightarrow$ Ο προσεγγιστικός τύπος είναι
$$I(y) \approx \frac{h}{2}\{y(x_0) + y(x_1)\},$$
και αν $y \in C^2[a,b]$, τότε
$$I(y) = \frac{h}{2}\{y(x_0) + y(x_1)\} - \frac{h^3}{12}y^{(2)}(\eta), \quad \eta \in [a,b].$$

(ii) Κανόνας του Simpson ($n = 2$): Το πολυώνυμο παρεμβολής της y στα σημεία
$$x_i = a + ih, \quad i = 0,1,2, \quad \text{με } h = (b-a)/2,$$

είναι

$$\begin{aligned} p_2(x) &= \frac{1}{2h^2}\{(x-x_1)(x-x_2)y(x_0) \\ &\quad -2(x-x_0)(x-x_2)y(x_1)+(x-x_0)(x-x_1)y(x_2)\}. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Ο αντίστοιχος τύπος Newton-Cotes είναι

$$\begin{aligned} I(y) &= \int_{x_0}^{x_2} p_2(x)dx + \int_{x_0}^{x_2} e_2(y)dx \\ &= \frac{h}{3}\{y(x_0)+4y(x_1)+y(x_2)\}+E_2(y), \end{aligned}$$

όπου, αν $y \in C^3[a,b]$,

$$E_2(y) = \int_{x_0}^{x_2} e_1(y)dx = \frac{1}{6}\int_{x_0}^{x_2} \pi_3(x)y^{(3)}(\xi)dx.$$

Στην περίπτωση αυτή το πολυώνυμο $\pi_3(x)=(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$ δεν διατηρεί το ίδιο πρόσημο στο διάστημα $[x_0,x_2]$. $\Rightarrow$ Δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής για τον υπολογισμό του σφάλματος $E_2(y)$. Ωστόσο, αν $y \in C^4[a,b]$, τότε μπορεί να δειχτεί (για παράδειγμα με τη βοήθεια της μεθόδου του πυρήνα Peano) ότι

$$E_2(y) = -\frac{h^5}{90}y^{(4)}(\eta), \quad \eta \in [a,b].$$

$\Rightarrow$ Ο προσεγγιστικός τύπος είναι

$$I(y) \approx \frac{h}{3}\{y(x_0)+4y(x_1)+y(x_2)\},$$

και αν $y \in C^4[a,b]$, τότε

$$I(y) = \frac{h}{3}\{y(x_0)+4y(x_1)+y(x_2)\} - \frac{h^5}{90}y^{(4)}(\eta), \quad \eta \in [a,b].$$

Ο βαθμός ακρίβειας ενός προσεγγιστικού τύπου ολοκλήρωσης ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 5.1 Ένας προσεγγιστικός τύπος ολοκλήρωσης της μορφής

$$\int_a^b y(x)dx = \sum_{i=0}^{n} A_i y(x_i) + E_n(y),$$

έχει "βαθμό ακρίβειας" (precision) ν αν $E_n(p)=0$, $\forall p \in \mathbb{P}_\nu$ και $\exists$ κάποιο $p \in \mathbb{P}_{\nu+1}$ τ.ω. $E_n(p) \neq 0$.

$\Rightarrow$ Ο βαθμός ακρίβειας του κανόνα του τραπεζίου είναι $\nu=1$ ενώ αυτός του κανόνα Simpson είναι $\nu=3$. Πιο γενικά μπορεί να δειχτεί ότι αν ο αριθμός n των κόμβων ενός τύπου Newton-Cotes είναι περιττός, τότε ο τύπος έχει βαθμό ακρίβειας n, ενώ αν ο n είναι άρτιος τότε ο τύπος έχει βαθμό ακρίβειας $n+1$. (Βλ. Άσκηση 5.8.)

5.2 Ορθογώνια πολυώνυμα

• Πολυώνυμα Legendre $\{P_k\}$

Διάστημα: $(-1, 1)$

Συνάρτηση βάρους: $w(x) = 1$

$\Rightarrow$ Τα πολυώνυμα P_k είναι τ.ω.

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = 0, \quad m \neq n.$$

Ορισμός:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\{(x^2-1)^n\}.$$

Αναδρομική σχέση:

$$\begin{aligned} &P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \\ &P_{k+1}(x) = \frac{2k+1}{k+1}xP_k(x) - \frac{k}{k+1}P_{k-1}(x), \ k = 1, 2, \dots \ . \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} &P_0(x) = 1, \ \ P_1(x) = x, \ \ P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ &P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \ \ P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \end{aligned}$$

κ.ο.κ.

Σημείωση: Τα πολυώνυμα Legendre είναι κανονικοποιημένα έτσι ώστε $P_k(1) = 1, \ \forall k$.

• Πολυώνυμα Chebyshev $\{T_k\}$

Διάστημα: $(-1, 1)$

Συνάρτηση βάρους: $w(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow$ Τα πολυώνυμα T_k είναι τ.ω.

$$\int_{-1}^{1} (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} T_m(x)T_n(x)dx = 0, \quad m \neq n.$$

Ορισμός:

$$T_n(x) = \cos(n \ \arccos x).$$

Αναδρομική σχέση:

$$\begin{aligned} &T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \\ &T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x), \quad k = 1, 2, \dots \ . \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1, \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x,$$
$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1, \quad T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x,$$

κ.ο.κ.

• Πολυώνυμα Laguerre $\{\mathcal{L}_k\}$

Διάστημα: $(0, \infty)$

Συνάρτηση βάρους: $w(x) = e^{-x}$

$\Rightarrow$ Τα πολυώνυμα $\mathcal{L}_k$ είναι τ.ω.

$$\int_0^\infty e^{-x} \mathcal{L}_m(x) \mathcal{L}_n(x) dx = 0, \quad m \neq n.$$

Ορισμός:

$$\mathcal{L}_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x} x^n).$$

Αναδρομική σχέση:

$$\mathcal{L}_0(x) = 1, \quad \mathcal{L}_1(x) = -x + 1,$$
$$\mathcal{L}_{k+1}(x) = (2k + 1 - x)\mathcal{L}_k(x) - k^2 \mathcal{L}_{k-1}(x), \quad k = 1, 2, \dots \, .$$

$\Rightarrow$

$$\mathcal{L}_0(x) = 1, \quad \mathcal{L}_1(x) = -x + 1,$$
$$\mathcal{L}_2(x) = x^2 - 4x + 2, \quad \mathcal{L}_3(x) = -x^3 + 9x^2 - 18x + 6,$$

κ.ο.κ.

• Πολυώνυμα Hermite $\{\mathcal{H}_k\}$

Διάστημα: $(-\infty, \infty)$

Συνάρτηση βάρους: $w(x) = e^{-x^2}$

$\Rightarrow$ Τα πολυώνυμα $\mathcal{H}_k$ είναι τ.ω.

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} \mathcal{H}_m(x) \mathcal{H}_n(x) dx = 0, \quad m \neq n.$$

Ορισμός:

$$\mathcal{H}_n = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}).$$

Αναδρομική σχέση:

$$\mathcal{H}_0(x) = 1, \quad \mathcal{H}_1(x) = 2x,$$
$$\mathcal{H}_{k+1}(x) = 2x\mathcal{H}_k(x) - 2k\mathcal{H}_{k-1}(x), \quad k = 1, 2, \dots \, .$$

$\Rightarrow$

$$\mathcal{H}_0(x) = 1, \;\; \mathcal{H}_1(x) = 2x,$$
$$\mathcal{H}_2(x) = 4x^2 - 2, \;\; \mathcal{H}_3(x) = 8x^3 - 12x,$$

κ.ο.κ.

• Πολυώνυμα Jacobi $\{P_k^{(\alpha,\beta)}\}$

Διάστημα: $(-1, 1)$

Συνάρτηση βάρους: $w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta, \quad \alpha, \beta > -1$

$\Rightarrow$ Τα πολυώνυμα $P_k^{(\alpha,\beta)}$ είναι τ.ω.

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^\alpha(1+x)^\beta P_m^{(\alpha,\beta)}(x) P_n^{(\alpha,\beta)}(x) dx = 0, \quad m \neq n.$$

Ορισμός:

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}\{(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\}.$$

Αναδρομική σχέση:

$$\begin{aligned}
&2(k+1)(k+\alpha+\beta+1)(2k+\alpha+\beta)P_{k+1}^{(\alpha,\beta)}(x) = \\
&\quad (2k+\alpha+\beta+1)[(\alpha^2+\beta^2) + (2k+\alpha+\beta+2)(2k+\alpha+\beta)x]P_k^{(\alpha,\beta)}(x) \\
&\qquad - 2(k+\alpha)(k+\beta)(2k+\alpha+\beta+2)P_{k-1}^{(\alpha,\beta)}(x), \quad k \geq 1.
\end{aligned}$$

με

$$P_0^{(\alpha,\beta)}(x) = 1, \quad P_1^{(\alpha,\beta)}(x) = (1 + \frac{\alpha+\beta}{2})x + \frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Σημείωση: Τα πολυώνυμα Legendre είναι η ειδική περίπτωση $\alpha = \beta = 0$ των πολυωνύμων Jacobi. Δηλαδή $P_k = P_k^{(0,0)}$. Επίσης, για $\alpha = \beta = -1/2$ τα πολυώνυμα Jacobi είναι πολλαπλάσια των πολυωνύμων Chebyshev.

5.3 Κανόνες Ολοκλήρωσης Gauss

• Gauss-Legendre

$$\int_{-1}^{1} y(x)dx = \sum_{i=0}^{n} A_i y(x_i) + E_n(y),$$

όπου:

- Τα σημεία ολοκλήρωσης x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, είναι οι ρίζες του πολυωνύμου Legendre P_{n+1} βαθμού $n+1$.

- Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των πολυωνύμων Legendre, μπορεί να δειχτεί ότι τα βάρη ολοκλήρωσης είναι

$$A_i = \int_{-1}^{1} \frac{P_{n+1}(x)}{(x-x_i)P^{(1)}_{n+1}(x_i)}dx = \frac{2}{(1-x_i^2)[P^{(1)}_{n+1}(x_i)]^2}.$$

- Αν $y \in C^{2n+2}[-1,1]$ και c_n είναι ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής του P_n, τότε το σφάλμα ολοκλήρωσης είναι

$$\begin{aligned} E_n(y) &= \frac{1}{c_{n+1}^2} \cdot \frac{y^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \int_{-1}^{1} [P_{n+1}(x)]^2 dx \\ &= \frac{2^{2n+3}[(n+1)!]^4}{[(2n+2)!]^3} \cdot \frac{y^{(2n+2)}(\xi)}{2n+3}, \quad \xi \in [-1,1], \end{aligned}$$

διότι μπορεί να δειχτεί ότι

$$c_n = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} \quad \text{και} \quad \int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1}.$$

Σημείωση: Για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων της μορφής

$$I := \int_a^b f(t)dt,$$

όπου $[a,b] \neq [-1,1]$, εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό

$$t = \frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2},$$

έτσι ώστε

$$\begin{aligned} I &= \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{1} f(\frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2})dx \\ &= \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{1} y(x)dx, \end{aligned}$$

όπου

$$y(x) = f(\frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}).$$

• Gauss-Chebyshev

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-1/2} y(x)dx = \sum_{i=0}^{n} A_i y(x_i) + E_n(y),$$

όπου:

- Τα σημεία ολοκλήρωσης x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, είναι οι ρίζες του πολυωνύμου Chebyshev T_{n+1} βαθμού $n+1$, δηλαδή

$$x_i = \cos(\frac{2i+1}{2n+2})\pi, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

(Βλ. Άσκηση 5.10)

- Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των πολυωνύμων Chebyshev, μπορεί να δειχτεί ότι τα βάρη ολοκλήρωσης είναι

$$A_i = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-1/2} \frac{T_{n+1}(x)}{(x-x_i)T_{n+1}^{(1)}(x_i)} dx = \frac{\pi}{n+1}.$$

Συνεπώς ο προσεγγιστικός τύπος είναι

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-1/2} y(x) dx \approx \frac{\pi}{n+1} \sum_{i=0}^{n} y(x_i).$$

- Αν $y \in C^{2n+2}[-1,1]$ και c_n είναι ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής του T_n, τότε το σφάλμα ολοκλήρωσης είναι

$$\begin{aligned} E_n(y) &= \frac{1}{c_{n+1}^2} \cdot \frac{y^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-1/2} [T_{n+1}(x)]^2 dx \\ &= \frac{\pi}{2^{2n+1}(2n+2)!} y^{(2n+2)}, \quad \xi \in [-1,1]. \end{aligned}$$

(Βλ. Άσκηση 5.12)

• Gauss-Laguerre

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x} y(x) dx = \sum_{i=0}^{n} A_i y(x_i) + E_n(y),$$

όπου:

- Τα σημεία ολοκλήρωσης x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, είναι οι ρίζες του πολυωνύμου Laguerre $\mathcal{L}_{n+1}$ βαθμού $n+1$.
- Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των πολυωνύμων Laguerre, μπορεί να δειχτεί ότι τα βάρη ολοκλήρωσης είναι

$$A_i = \int_{0}^{\infty} e^{-x} \frac{\mathcal{L}_{n+1}(x)}{(x-x_i)\mathcal{L}_{n+1}^{(1)}(x_i)} dx = \frac{[(n+1)!]^2 x_i}{(n+2)^2 [\mathcal{L}_{n+2}(x_i)]^2}.$$

- Αν $y \in C^{2n+2}[0,\infty)$ και c_n είναι ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής του $\mathcal{L}_n$, τότε το σφάλμα ολοκλήρωσης είναι

$$\begin{aligned} E_n(y) &= \frac{1}{c_{n+1}^2} \cdot \frac{y^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \int_{0}^{\infty} e^{-x} [\mathcal{L}_{n+1}(x)]^2 dx \\ &= \frac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!} y^{(2n+2)}(\xi), \quad \xi \in [0,\infty), \end{aligned}$$

διότι μπορεί να δειχτεί ότι

$$c_n = (-1)^n/n \quad \text{και} \quad \int_{0}^{\infty} e^{-x} [\mathcal{L}_n(x)]^2 dx = 1.$$

• Gauss-Hermite

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} y(x)dx = \sum_{i=0}^{n} A_i y(x_i) + E_n(y),$$

όπου:

- Τα σημεία ολοκλήρωσης $x_i,\ i = 0, 1, \ldots, n$, είναι οι ρίζες του πολυωνύμου Hermite $\mathcal{H}_{n+1}$ βαθμού $n+1$.

- Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των πολυωνύμων Hermite, μπορεί να δειχτεί ότι τα βάρη ολοκλήρωσης είναι

$$A_i = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \frac{\mathcal{H}_{n+1}(x)}{(x-x_i)\mathcal{H}^{(1)}_{n+1}(x_i)} dx = \frac{2^n(n+1)!\sqrt{\pi}}{(n+1)^2)[\mathcal{H}_n(x_i)]^2}.$$

- Αν $y \in C^{2n+2}(-\infty, \infty)$ και c_n είναι ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής του $\mathcal{H}_n$, τότε το σφάλμα ολοκλήρωσης είναι

$$\begin{aligned} E_n(y) &= \frac{1}{c^2_{n+1}} \cdot \frac{y^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} [\mathcal{H}_{n+1}(x)]^2 dx \\ &= \frac{(n+1)!\sqrt{\pi}}{2^{n+1}(2n+2)!} y^{(2n+2)}(\xi), \quad \xi \in (-\infty, \infty), \end{aligned}$$

  διότι μπορεί να δειχτεί ότι

$$c_n = 2^n \quad \text{και} \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} [\mathcal{H}_n(x)]^2 dx = 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

Ασκήσεις

5.1 Έστω $l_i \in \mathbb{P}_n,\ i = 0, 1, \ldots, n$, οι συντελεστές παρεμβολής Lagrange. Δηλαδή

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} [(x - x_j)/(x_i - x_j)],\ i = 0, 1, \ldots, n.$$

Δείξτε ότι οι l_i μπορούν να εκφραστούν στη μορφή

$$l_i(x) = \frac{\pi_{n+1}(x)}{(x-x_i)\pi^{(1)}_{n+1}(x_i)}\ ,$$

όπου $\pi_{n+1}(x) := \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$. Δείξτε επίσης ότι

$$\sum_{i=0}^{n} l_i(x) = 1.$$

5.2 Έστω $x_i,\ i = 0, 1, \ldots, n$, τα $n+1$ ισαπέχοντα σημεία

$$x_i = x_0 + ih,\ i = 0, 1, \ldots, n,$$

και p_n το πολυώνυμο παρεμβολής μιας συνάρτησης $y \in C^{n+1}[x_0, x_n]$ στα σημεία x_i. Αν $||\cdot|| := \max_{x\in[x_0,x_n]} |\cdot|$, αποδείξτε τα πιο κάτω δύο αποτελέσματα, που αντιστοιχούν στις δύο περιπτώσεις $n = 1$ και $n = 2$:

$$||y - p_1|| \leq \frac{h^2}{8}||y^{(2)}||,$$

και

$$||y - p_3|| \leq \frac{h^4}{24}||y^{(4)}||.$$

5.3 Έστω p_n το πολυώνυμο παρεμβολής μιας συνάρτησης y στα $n+1$ διακεκριμένα σημεία x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$. Δείξτε ότι για κάθε $x \neq x_i$,

$$y(x) - p_n(x) = y[x_0, x_1, \ldots, x_n, x] \prod_{i=0}^{n}(x - x_i).$$

(**Υπόδειξη:** Θεωρήστε την αναπαράσταση Newton του πολυωνύμου παρεμβολής της y στα $n + 2$ σημεία $x_0, x_1, \ldots, x_n$ και x.)

5.4 Έστω $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, $n + 1$ διακεκριμένα σημεία. Αν $y \in C^n[a, b]$, δείξτε ότι

$$y[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{1}{n!}y^{(n)}(\xi),$$

για κάποιο $\xi \in [a, b]$. (**Σημείωση:** Το πιο πάνω αποτέλεσμα σε συνδυασμό με αυτό της Άσκησης 5.3 οδηγεί στο σφάλμα παρεμβολής του Θεωρήματος 5.2.)

5.5 Έστω $H_3 \in \mathbb{P}_3$ το κυβικό πολυώνυμο Hermite που πληροί τις συνθήκες παρεμβολής $H_3(x_i) = y(x_i)$ και $H_3^{(1)}(x_i) = y^{(1)}(x_i)$, $i = 0, 1$, στα δύο σημεία x_0 και $x_1 = x_0 + h$. Δείξτε ότι

$$\begin{aligned} H_3(x) \quad = \quad & \frac{1}{h^3}(x_1 - x)^2[2(x - x_0) + h]y_0 \\ & + \frac{1}{h^3}(x - x_0)^2[2(x_1 - x) + h]y_1 \\ & + \frac{1}{h^2}(x_1 - x)^2(x - x_0)y_0^{(1)} + \frac{1}{h^2}(x - x_0)^2(x - x_1)y_1^{(1)}, \end{aligned}$$

όπου $y_i := y(x_i)$ και $y_i^{(1)} := y^{(1)}(x_i)$. Δείξτε επίσης ότι αν $y \in C^4[x_0, x_1]$, τότε

$$||y - H_3|| \leq \frac{h^4}{384}||y^{(4)}||,$$

όπου $||\cdot|| := \max_{x\in[x_0,x_1]} |\cdot|$.

5.6 Με τους συμβολισμούς της Άσκησης 5.5, δείξτε ότι:

- Αν $y(x) = 1/x$, $x_0 = 1$ και $x_1 = 2$, τότε

$$||y - H_3|| \leq 1/16.$$

- Αν $y(x) = \sin x$, $x_0 = 0$ και $x_1 = 0.1$, τότε

$$||y - H_3|| \leq 2.6 \times 10^{-8}.$$

5.7 Έστω $x_1 = x_0 + h$, $y \in C^4[x_0, x_1]$ και H_3 το πλυώνυμο παρεμβολής Hermite της Άσκησης 5.5. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_{x_0}^{x_1} H_3(x)dx,$$

και στη συνέχεια δείξτε ότι

$$\int_{x_0}^{x_1} y(x)dx - [\frac{h}{2}(y_0 + y_1) + \frac{h^2}{12}(y_0^{(1)} - y_1^{(1)})] = \frac{h^5}{720}y^{(4)}(\xi),$$

για κάποιο $\xi \in [x_0, x_1]$.

5.8 Έστω A_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, τα βάρη και E_n το σφάλμα ολοκλήρωσης του τύπου Newton-Cotes

$$\int_a^b y(x)dx = \sum_{i=0}^{n} A_i y(x_i) + E_n(y), \tag{5.8}$$

που έχει ως κόμβους τα σημεία

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \quad h = (b - a)/h.$$

Δείξτε ότι

$$A_i = A_{n-i}, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Στη συνέχεια δείξτε ότι αν ο n είναι άρτιος, τότε ο τύπος (5.8) έχει βαθμό ακρίβειας $n + 1$.

5.9 (**Πολυώνυμα Legendre**) Αρχίζοντας από τον ορισμό

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\{(x^2 - 1)^n\},$$

δείξτε ότι

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)g(x)dx = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1}(x^2 - 1)^n g^{(n)}(x)dx, \quad \forall g \in C^n[-1, 1].$$

Στη συνέχεια δείξτε ότι τα πολυώνυμα P_n είναι ορθογώνια στο διάστημα $(-1, 1)$, ως προς τη συνάρτηση βάρους $w(x) = 1$, δηλ.

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = 0, \quad m \neq n.$$

5.10 (**Πολυώνυμα Chebyshev**) Αρχίζοντας από τον ορισμό

$$T_n(x) = \cos(n \ \arccos x),$$

δείξτε τα πιο κάτω:

(i) Τα πολυώνυμα T_n είναι ορθογώνια στο διάστημα $(-1,1)$, ως προς τη συνάρτηση βάρους $(1-x^2)^{-1/2}$, δηλ.

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{-1/2}T_m(x)T_n(x)dx = 0, \quad m \neq n.$$

(ii) Για $n \geq 1$, το πολυώνυμο T_n έχει ακριβώς n διακεκριμένες ρίζες στα σημεία

$$x_k = \cos\{\frac{(2k+1)\pi}{2n}\}, \quad k = 0,1,\dots,n-1.$$

(iii)

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n = 1,2,\dots\ .$$

5.11 Έστω $\{\varphi_k\}$ μια ακολουθία ορθογωνίων πολυωνύμων, ως προς τη συνάρτηση βάρους w στο διάστημα $[a,b]$, και έστω $x_i \in [a,b]$, $i = 0,1,\dots,n$, $n+1$ διακεκριμένα σημεία. Δείξτε ότι αν ένας προσεγγιστικός τύπος της μορφής

$$\int_a^b w(x)y(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i y(x_i)$$

είναι ακριβής $\forall y \in \mathbb{P}_{2n+1}$, τότε τα σημεία x_i είναι οι ρίζες του πολυωνύμου φ_{n+1}.

5.12 Με τους συμβολισμούς της Άσκησης 5.10, δείξτε τα πιο κάτω:

(i) Ο συντελεστής c_n του μεγιστοβαθμίου όρου του T_n ειναι $c_n = 2^{n-1}$.

(ii)

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{-1/2}\{T_n(x)\}^2dx = \frac{\pi}{2}.$$

Στη συνέχεια δείξτε ότι αν $y \in C^{2n+2}[-1,1]$, τότε το σφάλμα ολοκλήρωσης $E_n(y)$ του προσεγγιστικού τύπου Gauus-Chebyshev,

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{-1/2}y(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i y(x_i),$$

είναι

$$E_n(y) = \frac{\pi}{2^{2n+1}(2n+2)!}y^{(2n+2)}(\xi), \quad \xi \in [-1,1].$$

5.13 Έστω $\{\varphi_k\}$ μια ακολουθία ορθογωνίων πολυωνύμων, ως προς τη συνάρτηση βάρους w στο διάστημα $[a,b]$, και

$$\int_a^b w(x)y(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i y(x_i)$$

ο αντίστοιχος προσεγγιστικός τύπος Gauus. Δείξτε τα πιο κάτω:

(i)

$$\sum_{i=0}^{n} A_i = \int_a^b w(x)dx.$$

(ii)

$$A_i = \int_a^b w(x)\{l_i(x)\}^2 dx > 0,$$

όπου $l_i(x) = \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \{(x - x_j)/(x_i - x_j)\}$.

(iii)

$$\sum_{i=0}^{n} A_i \varphi_k(x_i)\varphi_l(x_i) = 0, \quad k, l \leq n, \quad k \neq l.$$

5.14 Δείξτε τα πιο κάτω:

(i) Με $n = 1$ και $n = 2$ ο τύπος Gauss-Legendre δίνει αντίστοιχα

$$\int_{-1}^{1} y(x)dx \approx y(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + y(\frac{1}{\sqrt{3}}),$$

και

$$\int_{-1}^{1} y(x)dx \approx \frac{1}{9}\{5y(-\frac{\sqrt{15}}{5}) + 8y(0) + 5y(\frac{\sqrt{15}}{5})\}.$$

(ii) Με $n = 1$ και $n = 2$, ο τύπος Gauss-Chebyshev δίνει αντίστοιχα

$$\int_{-1}^{1} (1 - x^2)^{-1/2} y(x) \approx \frac{\pi}{2}\{y(-\frac{1}{\sqrt{2}}) + y(\frac{1}{\sqrt{2}})\},$$

και

$$\int_{-1}^{1} (1 - x^2)^{-1/2} y(x) \approx \frac{\pi}{3}\{y(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + y(0) + y(\frac{\sqrt{3}}{2})\}.$$

(iii) Με $n = 0$ και $n = 1$ ο τύπος Gauss-Hermite δίνει αντίστοιχα

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} y(x)dx \approx \sqrt{\pi} y(0),$$

και

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} y(x)dx \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2}\{y(-\frac{1}{\sqrt{2}}) + y(\frac{1}{\sqrt{2}})\}.$$

5.15 Εφαρμόζοντας τον τύπο Gauss-Chebyshev με κατάλληλο n, βρείτε τις ακριβείς τιμές των ολοκληρωμάτων

$$I_1 := \int_0^1 \frac{t^2}{t^{1/2}(1-t)^{1/2}} dt \quad \text{και} \quad I_2 := \int_0^1 \frac{t^5}{t^{1/2}(1-t)^{1/2}} dt.$$

5.16 Εφαρμόζοντας τον τύπο Gauss-Hermite με κατάλληλο n, βρείτε την ακριβή τιμή του ολοκληρώματος

$$I := \int_0^\infty e^{-x^2} dx.$$

5.17 Υπολογίστε την τιμή του ολοκληρώματος

$$I := \int_0^1 e^{-t^2} dt,$$

χρησιμοποιώντας τους τύπους (i) Simpson, και (ii) Gauss-Legendre με $n = 2$. (**Σημείωση:** Σε 5 δ.ψ., η ακριβής τιμή του I είναι $I = 0.74682$.)

5.18 Υπολογίστε τις τιμές των ολοκληρωμάτων

$$I_1 := \int_1^3 \frac{\sin^2 t}{t} dt \quad \text{και} \quad I_2 := \int_0^1 \frac{\sin t}{\{t(1-t)\}^{1/2}} dt,$$

χρησιμοποιώντας κατάλληλους τύπους Gauss με $n = 2$. (**Σημείωση:** Σε 5 δ.ψ., οι ακριβείς τιμές είναι $I_1 = 0.79483$ και $I_2 = 1.41349$.)

Λύσεις Ασκήσεων

5.1

$$\begin{aligned}
&\ln \pi_{n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} \ln(x - x_j), \\
&\Rightarrow \frac{\pi_{n+1}^{(1)}(x)}{\pi_{n+1}(x)} = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{x - x_j}, \\
&\Rightarrow \pi_{n+1}^{(1)}(x) = \pi_{n+1}(x) \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{x - x_j}, \\
&\Rightarrow \pi_{n+1}^{(1)}(x_i) = (x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n).
\end{aligned}$$

Συνεπώς

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} [(x - x_j)/(x_i - x_j)] = \frac{\pi_{n+1}(x)}{\pi_{n+1}^{(1)}(x_i)(x - x_i)}.$$

Η πολυωνυμική παρεμβολή βαθμού n είναι ακριβής για πολυώνυμα βαθμού $\leq n \Rightarrow$

$$x^k = \sum_{i=1}^{n} l_i(x) x_i^k, \quad k \leq n.$$

Ιδιαίτερα, με $k = 0$,

$$1 = \sum_{i=1}^{n} l_i(x).$$

5.2 Έστω $\pi_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$. Τότε το σφάλμα παρεμβολής είναι

$$y(x) - p_n(x) = \frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \pi_{n+1}(x),$$

για κάποιο $\xi = \xi(x) \in [x_0, x_n]$. $\Rightarrow$

$$||y - p_n|| \leq \frac{1}{(n+1)!} ||\pi_{n+1}|| \cdot ||y^{(n+1)}||.$$

Τα ζητούμενα αποτελέσματα προκύπτουν επειδή

$$||\pi_2|| = \frac{h^2}{4} \;\text{ και }\; ||\pi_4|| = h^4.$$

Υποδείξεις:

- Ο μετασχηματισμός $x \to hx + x_0$ οδηγεί στη σχέση

  $$\pi_{n+1} = h^{n+1} \widehat{\pi}_{n+1}, \quad \text{όπου } \; \widehat{\pi}_{n+1}(x) = x(x-1) \cdots (x-n).$$

  Συνεπώς $||\pi_{n+1}|| = h^{n+1} \max_{x\in[0,n]} |\widehat{\pi}_{n+1}|$. $\Rightarrow$ Για την απλοποίηση των πράξεων, προσδιορίστε το $||\pi_{n+1}||$ απο την πιο πάνω σχέση, αφού πρώτα βρείτε το $\max_{x\in[0,n]} |\widehat{\pi}_{n+1}|$.

- Για το δεύτερο μέρος της Άσκησης: Λόγω συμμετρίας το σημείο $x = 3/2$ είναι σημείο καμπής του $\widehat{\pi}_4$.

5.3 Έστω $p_{n+1} \in \mathbb{P}_{n+1}$ το πολυώνυμο παρεμβολής της y στα $n+2$ σημεία x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, και $x \neq x_i$. Δηλαδή το p_{n+1} πληροί τις συνθήκες

$$p_{n+1}(x_i) = y(x_i), \; i = 0, 1, \ldots, n, \;\; \text{και} \;\; p_{n+1}(x) = y(x).$$

$\Rightarrow$ Η αναπαράσταση Newton του p_{n+1} είναι

$$p_{n+1}(t) = p_n(x) + y[x_0, x_1, \ldots, x_n, x] \prod_{i=0}^{n} (t - x_i)$$
$$\Rightarrow y(x) - p_n(x) = y[x_0, x_1, \ldots, x_n, x] \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

5.4 Έστω p_n το πολυώνυμο παρεμβολής της y στα σημεία x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, και έστω $e_n := y - p_n$. Τότε $e_n \in C^n[a, b]$ και $e_n(x_i) = 0$, $i = 0, 1, \ldots, n$. $\Rightarrow$ Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Rolle n φορές:

$$e_n^{(n)}(\xi) = 0, \;\; \text{για κάποιο } \xi \in [a, b], \;\; \Rightarrow \;\; y^{(n)}(\xi) = p_n^{(n)}(\xi).$$

Όμως

$$\begin{aligned} p_n(x) \;\; = \;\; & y(x_0) + y[x_0, x_1](x - x_0) + y[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ & + \cdots + y[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$p_n^{(n)}(x) = n! \times y[x_0, x_1, \ldots, x_n] \;\Rightarrow\; y[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \frac{1}{n!} y^{(n)}(\xi).$$

5.5 Η θεμελιώδη αναπαράσταση του H_3 είναι (βλ. (5.6)-(5.7)):

$$H_3(x) = a(x) y_0 + b(x) y_1 + c(x) y_0^{(1)} + d(x) y_1^{(1)},$$

όπου

$$\begin{aligned} a(x) &= \frac{1}{h^2}(x_1 - x)^2 [2(x - x_0) + h] \\ b(x) &= \frac{1}{h^2}(x - x_0)^2 [2(x_1 - x) + h] \\ c(x) &= \frac{1}{h^2}(x_1 - x)^2 (x - x_0) \\ d(x) &= \frac{1}{h}(x - x_0)^2 (x - x_1). \end{aligned}$$

,

Επίσης, αν $y \in C^4[x_0, x_1]$, τότε (από το Θεώρημα 5.4) το σφάλμα παρεμβολής είναι

$$y(x) - H_3(x) = \frac{y^{(4)}(\xi)}{4!}\{\pi_2(x)\}^2, \quad \text{όπου} \;\; \pi_2(x) = (x - x_0)(x - x_1),$$

για κάποιο $\xi = \xi(x) \in [x_0, x_1]$. $\Rightarrow$

$$||y - H_3|| \le \frac{1}{24}||y^{(4)}|| \cdot ||\pi_2^2||,$$
$$\Rightarrow ||y - H_3|| \le \frac{h^4}{384}||y^{(4)}||,$$

επειδή $||\pi_2|| = h^2/4$ και συνεπώς $||\pi_2^2|| = h^4/16$.

5.6 Από την Άσκηση 5.5 έχουμε ότι αν $y \in C^4[x_0, x_1]$, τότε $||y - H_3|| \le h^4||y^{(4)}||/384$.

- $x_0 = 1$ και $x_1 = 2 \Rightarrow h = 1$. Έπίσης $y(x) = 1/x \Rightarrow y^{(4)}(x) = 24/x^4 \Rightarrow ||y^{(4)}|| \le 24 \Rightarrow ||y - H_3|| \le 1/16$.
- $x_0 = 0$ και $x_1 = 0.1 \Rightarrow h = 0.1$. Επίσης $y(x) = \sin x \Rightarrow y^{(4)}(x) = \sin x \Rightarrow ||y^{(4)}|| = \sin 0.1 \Rightarrow ||y - H_3|| \le (0.1)^4 \sin 0.1/384 \le 2.6 \times 10^{-8}$.

5.7 Χρησιμοποιώντας τη θεμελιώδη μορφή (Άσκ. 5.5) του H_3,

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_1} H_3(x)dx &= \int_{x_0}^{x_1} [a(x)y_0 + b(x)y_1 + c(x)y_0^{(1)} + d(x)y_1^{(1)}]dx \\ &= \frac{h}{2}(y_0 + y_1) + \frac{h^2}{12}(y_0^{(1)} - y_1^{(1)}).\end{aligned}$$

Έστω

$$E(y) = \int_{x_0}^{x_1} y(x)dx - [\frac{h}{2}(y_0 + y_1) + \frac{h^2}{12}(y_0^{(1)} - y_1^{(1)})].$$

Τότε (βλ. Άσκ. 5.5)

$$\begin{aligned}E(y) &= \int_{x_0}^{x_1} [y(x) - H_3(x)]dx \\ &= \frac{1}{4!}\int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)^2(x - x_1)^2 y^{(4)}(\eta)dx,\end{aligned}$$

όπου $\eta = \eta(x) \in [x_0, x_1]$. Άρα το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής $\Rightarrow$

$$E(y) = \frac{1}{4!}y^{(4)}(\xi)\int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)^2(x - x_1)^2 dx = \frac{1}{720}h^5 y^{(4)}(\xi),$$

για κάποιο $\xi \in [x_0, x_1]$.

5.8

$$\begin{aligned}A_i &= \int_{x_0}^{x_n} l_i(x)dx \\ &= \int_{x_0}^{x_n} \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)}dx.\end{aligned}$$

Έστω $x = x_0 + th$. Τότε

$$\begin{aligned} A_i &= \int_0^n \frac{t(t-1)\cdots(t-i+1)(t-i-1)\cdots(t-n)}{i(i-1)\cdots(1)(-1)\cdots(i-n)} hdt \\ &= \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} h \int_0^n t(t-1)\cdots(t-i+1)(t-i-1)\cdots(t-n)dt \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} A_{n-i} &= \frac{(-1)^i}{(n-i)!i!} h \\ &\quad \times \int_0^n t(t-1)\cdots(t-n+i+1)(t-n+i-1)\cdots(t-n)dt, \end{aligned}$$

ή, με $s = n - t$,

$$\begin{aligned} A_{n-i} &= \frac{(-1)^i}{i!(n-i)!} h \int_0^n (s-n)\cdots(s-i-1)(s-i+1)\cdots s(-1)^n ds \\ &= A_i. \end{aligned}$$

Αν $n = 2m$, τότε

$$\sum_{i=0}^{n} A_i y(x_i) = \sum_{i=0}^{m-1} A_i \{y(x_i) + y(x_{2m-i})\} + A_m y(x_m). \tag{5.9}$$

Από τον τρόπο κατασκευής των τύπων Newton-Cotes, γνωρίζουμε ότι $E_n(y) = 0$, $\forall y \in \mathbb{P}_n$. Συνεπώς (για την απόδειξη του ζητούμενου αποτελέσματος) αρκεί να δείξουμε ότι αν $n = 2m$, τότε ισχύει επίσης ότι $E_n(x^{n+1}) = 0$. Για το σκοπό αυτό υποθέτουμε (χωρίς απώλεια της γενικότητας) ότι οι κόμβοι είναι συμμετρικοί ως προς το 0, δηλαδή ότι οι κόμβοι είναι $-mh, \ldots, 0, \ldots, mh$. Τότε

$$\int_{a=x_0}^{b=x_n} x^{n+1} dx = \int_{-mh}^{mh} x^{2m+1} dx = 0$$

και, από την (5.9),

$$\sum_{i=0}^{n} A_i x_i^{n+1} = \sum_{i=0}^{m-1} \{(-m+i)^{2m+1} + (m-i)^{2m+1}\} + A_m \times 0.$$

$\Rightarrow E_n(x^{n+1}) = 0$.

5.9 Έστω $r(x) = (x^2-1)^n$. Τότε $r^{(k)}(\pm 1) = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, και $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} r^{(n)}(x) \Rightarrow$ Αν $g \in C^n[-1,1]$, τότε ολοκληρώνοντας κατά μέλη,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} P_n(x) g(x) dx &= \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^{1} r^{(n)}(x) g(x) dx \\ &= \frac{1}{2^n n!} \{[r^{(n-1)}(x) g(x)]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} r^{(n-1)}(x) g^{(1)}(x) dx\} \\ &= \frac{-1}{2^n n!} \int_{-1}^{1} r^{(n-1)}(x) g^{(1)}(x) dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2^n n!}\{[r^{(n-2)}(x)g^{(1)}(x)]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} r^{(n-2)}(x)g^{(2)}(x)dx\} \\
&= \frac{(-1)^2}{2^n n!}\int_{-1}^{1} r^{(n-2)}(x)g^{(2)}(x)dx.
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ Απλή επαγωγή:

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} P_n(x)g(x)dx &= \frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1} r^{(0)}(x)g^{(n)}(x)dx \\
&= \frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1} (x^2-1)^n g^{(n)}(x)dx.
\end{aligned}
$$

Έστω $n > m$. Τότε το πιο πάνω αποτέλεσμα με $g = P_m \Rightarrow$

$$
\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1} (x^2-1)^n P_m^{(n)}(x)dx = 0,
$$

διότι $P_m^{(n)}(x) = 0$, αφού $n > m$.

5.10 (i)

$$
\begin{aligned}
I_{m,n} &:= \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-1/2} T_m(x)T_n(x)dx \\
&= \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-1/2}\cos(m\ \arccos x)\cos(n\ \arccos x)dx.
\end{aligned}
$$

Συνεπώς, με $\theta = \arccos x$,

$$
I_{m,n} = \int_0^{\pi} \cos m\theta \cos n\theta d\theta = 0.
$$

(ii) Έστω $\theta = \arccos x$. Τότε $T_n(x) = 0$ όταν $\cos n\theta = 0 \Rightarrow$ όταν

$$
\theta = \frac{(2k+1)}{2n}\pi, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.
$$

$\Rightarrow$ Οι ρίζες του T_n στο διάστημα $(-1, 1)$ είναι

$$
x_k = \cos\{\frac{(2k+1)}{2n}\pi\}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.
$$

(iii) $\cos\{(n+1)\theta\} + \cos\{(n-1)\theta\} = 2\cos\theta\cos n\theta \Rightarrow$ Συνεπώς, θέτοντας $\theta = \arccos x$,

$$
T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x), \quad n = 1, 2, \ldots, \ .
$$

5.11

$$
\int_a^b w(x)y(x)dx = \sum_{i=0}^{n} A_i y(x_i), \quad \forall y \in \mathbb{P}_{2n+1}.
$$

Έστω $\pi_{n+1}(x) = \Pi_{i=0}^{n}(x - x_i)$. Τότε $\forall p \in \mathbb{P}_n$, $p\pi_{n+1} \in \mathbb{P}_{2n+1} \Rightarrow$

$$\int_a^b w(x)\pi_{n+1}(x)p(x)dx = \sum_{i=0}^{n} A_i \pi_{n+1}(x_i)p(x_i) = 0, \ \forall p \in \mathbb{P}_n.$$

Συνεπώς (βλ. Σημειώσεις), $\pi_{n+1} = c_{n+1}\varphi_{n+1} \Rightarrow$ Τα x_i, $i = 0, 1, \ldots$, είναι οι ρίζες του φ_{n+1}.

5.12 (i) Αναδρομική σχέση: $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$, $n \geq 1$, $\Rightarrow c_{n+1} = 2c_n$ $\Rightarrow c_{n+1} = 2c_n = 2^2 c_{n-1} = \cdots = 2^n c_1$. Συνεπώς $c_{n+1} = 2^n$, επειδή $c_1 = 1$.
(ii) Έστω $\theta = \arccos x$. Τότε

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^{-1/2}\{T_n(x)\}^2 dx &= \int_0^{\pi} \cos^2 n\theta d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (1 + \cos 2n\theta)d\theta = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Από τις σημειώσεις και τα πιο πάνω αποτελέσματα $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} E_n(y) &= \frac{1}{c_{n+1}^2} \cdot \frac{y^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^{-1/2}\{T_{n+1}(x)\}^2 dx \\ &= \frac{1}{2^{2n+1}} \cdot \frac{\pi}{(2n+2)!} y^{(2n+2)}(\xi), \quad \xi \in [-1, 1]. \end{aligned}$$

5.13 (i) Ο προσεγγιστικός τύπος είναι ακριβής $\forall y \in \mathbb{P}_{2n+1} \Rightarrow$

$$\int_a^b w(x)x^j dx = \sum_{i=0}^{n} A_i x_i^j, \quad j = 0, 1, \ldots, 2n + 1.$$

$\Rightarrow$ Με $j = 0$,

$$\int_a^b w(x)dx = \sum_{i=0}^{n} A_i.$$

(ii) $l_i^2 \in \mathbb{P}_{2n}$ και $w \geq 0$, $l_i^2 \geq 0$, για $x \in [a, b] \Rightarrow$

$$0 < \int_a^b w(x)\{l_i(x)\}^2 dx = \sum_{j=0}^{n} A_j \{l_i(x_j)\}^2 = A_i.$$

(iii) Αν $k, l \leq n$, τότε $\varphi_k \varphi_l \in \mathbb{P}_m$, όπου $m \leq 2n \Rightarrow$ Αν $k, l \leq n$ και $k \neq l$, τότε

$$0 = \int_a^b w(x)\varphi_k(x)\varphi_l(x)dx = \sum_{i=0}^{n} A_i \varphi_k(x_i)\varphi_l(x_i) \ .$$

5.15 Με $t = \frac{1}{2}(x + 1)$ (δηλ. $x = 2t - 1$),

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} \frac{(x+1)^2}{\sqrt{1 - x^2}} dx \\ &= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} (1 - x^2)^{-1/2} y(x) dx, \end{aligned}$$

όπου $y(x) = (x+1)^2 \in \mathbb{P}_2$.

Ο τύπος Gauss-Chebyshev με $n = 1$ είναι ακριβής $\forall y \in \mathbb{P}_3 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{-1/2}(x+1)^2 dx \\ &= \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{2}\{(-1/\sqrt{2}+1)^2+(1\sqrt{2}+1)^2\} = \frac{3\pi}{8}. \end{aligned}$$

Με τον ίδιο μετασχηματισμό, χρησιμοποιώντας τον τύπο Gauss-Chebyshev με $n = 2$, βρίσκουμε ότι

$$I_2 = \frac{63}{256}\pi.$$

5.16

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx.$$

Ο τύπος Gauss-Hermite με $n = 0$ είναι ακριβής για πολυώνυμα βαθμού $n \le 1$. $\Rightarrow$ $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

5.17 (i) Η εφαρμογή του τύπου Simpson με $n = 2$ δίνει

$$I \approx 0.747\ 18.$$

(ii) Έστω $t = \frac{1}{2}(x+1)$. Τότε

$$I = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-\frac{1}{4}(x+1)^2}dx.$$

Η εφαρμογή του τύπου Gauss-Legendre, με $n = 2$, στο πιο πάνω ολοκλήρωμα δίνει

$$I \approx 0.746\ 81.$$

5.18 Έστω $t = x+2$. Τότε

$$I_1 = \int_{-1}^{1}\frac{\sin^2(x+2)}{x+2}dx.$$

$\Rightarrow$ Χρησιμοποιήστε τον τύπο Gauss-Legendre.

Έστω $t = \frac{1}{2}(x+1)$. Τότε

$$I_2 = \int_{-1}^{1}(1-x^2)^{-1/2}\sin\{0.5(x+1)\}dx.$$

$\Rightarrow$ Χρησιμοποιήστε τον τύπο Gauss-Chebyshev.