Αριθμητική Ανάλυση Ι
(ΜΑΣ 171)

Σύντομες Σημειώσεις και Ασκήσεις

Νικόλας Παπαμιχαήλ
Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής, Πανεπιστήμιο Κύπρου
Εαρινό Εξάμηνο 2003-04

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Συμβολισμοί **5**

1 Μετάδοση και ανάλυση σφαλμάτων **7**

Ασκήσεις Κεφ. 1 **7**

Λύσεις Κεφ. 1 **13**

2 Επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων **21**
2.1 Βασικά θεωρήματα 21

Ασκήσεις Κεφ. 2 **24**

Λύσεις Κεφ. 2 **27**

3 Επίλυση γραμμικών συστημάτων **31**
3.1 Μέθοδος απαλοιφής Gauss 31
3.2 Προς τα πίσω αντικατάσταση για άνω τριγωνικά συστήματα 34
3.3 Απαλοιφή Gauss με μερική οδήγηση 35

Ασκήσεις Κεφ. 3 **36**

Λύσεις Κεφ. 3 **40**

4 Πολυωνυμική παρεμβολή και αριθμητική ολοκλήρωση **47**
4.1 Παρεμβολή κατά Lagrange 47
4.2 Παρεμβολή κατά Hermite 48
4.3 Κανόνες ολοκλήρωσης Newton-Cotes 49

Ασκήσεις Κεφ. 4 **51**

Λύσεις Κεφ. 4 **54**

Συμβολισμοί

- $\mathbb{N}$: σύνολο φυσικών αριθμών,
- $\mathbb{N}_0$: σύνολο φυσικών αριθμών μαζί με το μηδέν,
- $\mathbb{Z}$: σύνολο ακέραιων αριθμών,
- $\mathbb{R}$: σύνολο πραγματικών αριθμών,
- $\mathbb{R}^n$: γραμμικός χώρος των n-διάστατων διανυσμάτων $\underline{x} = (x_i)$ με $x_i \in \mathbb{R}$,
- $\mathbb{R}^{n,n}$: γραμμικός χώρος των $n \times n$ πινάκων $A = (a_{i,j})$ με $a_{i,j} \in \mathbb{R}$,
- $\mathbb{C}$: σύνολο μιγαδικών αριθμών,
- $\mathbb{C}^n$: γραμμικός χώρος των n-διάστατων διανυσμάτων $\underline{x} = (x_i)$ με $x_i \in \mathbb{C}$,
- $\mathbb{C}^{n,n}$: γραμμικός χώρος των $n \times n$ πινάκων $A = (a_{i,j})$ με $a_{i,j} \in \mathbb{C}$,
- $\underline{o}$: μηδενικό διάνυσμα των $\mathbb{C}^n$ και $\mathbb{R}^n$,
- $\mathcal{O}$: μηδενικός πίνακας των $\mathbb{C}^{n,n}$ και $\mathbb{R}^{n,n}$,
- I: μοναδιαίος (ταυτοτικός) πίνακας των $\mathbb{C}^{n,n}$ και $\mathbb{R}^{n,n}$,
- $\mathbb{P}_n$: σύνολο πραγματικών πολυωνύμων βαθμού $\leq n$,
- $C^n[a,b]$: σύνολο πραγματικών συναρτήσεων μιας μεταβλητής με n συνεχείς παραγώγους στο διάστημα $[a,b]$,
- $y^{(n)}$: η n παράγωγος μιας συνάρτησης y, δηλαδή

$$y^{(n)}(x) := \frac{d^n y}{dx^n}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Μετάδοση και ανάλυση σφαλμάτων

Αριθμητική κινητής υποδιαστολής t δυαδικών ψηφίων - Βασικά αποτελέσματα

- Έστω $x \in \mathbb{R}$. Τότε

$$fl(x) = x(1+\varepsilon), \quad \text{όπου} \ \ |\varepsilon| \leq 2^{-t}.$$

- Έστω x_1 και x_2 δυο δυαδικοί αριθμοί κινητής υποδιαστολής t ψηφίων σε κανονικοποιημένη μορφή, και έστω $\circledcirc$ μια από τις πράξεις κινητής υποδιαστλής $\pm, \times, \div$. Τότε

$$fl(x_1 \circledcirc x_2) = (x_1 \circledcirc x_2)(1+\varepsilon), \quad |\varepsilon| \leq 2^{-t}.$$

Ασκήσεις

1.1 Έστω

$$x_1 = (.3827)10^4, \ x_2 = (.1254)10^2, \ x_3 = (.8951)10^0 \text{ και } x_4 = (.2213)10^{-2}.$$

Χρησιμοποιώντας δεκαδική αριθμητική κινητής υποδιαστολής 4 ψηφίων, υπολογίστε τις τιμές των

$$fl(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \ \text{ και } \ fl(x_4 + x_3 + x_2 + x_1).$$

1.2 Έστω x_i και y_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, $2n$ δυαδικοί αριθμοί κινητής υποδιαστολής t ψηφίων σε κανονικοποιημένη μορφή. Με τους συνήθεις συμβολισμούς της δυαδικής αριθμητικής κινητής υποδιαστολής t ψηφίων, δείξτε ότι:

(i)

$$fl(\sum_{r=1}^{n} x_r) = \sum_{r=1}^{n} x_r(1+\eta_r),$$

όπου

$$(1-2^{-t})^{n-1} \leq 1+\eta_1 \leq (1+2^{-t})^{n-1},$$

και

$$(1-2^{-t})^{n+1-r} \leq 1+\eta_r \leq (1+2^{-t})^{n+1-r}, \quad r = 2,3,\ldots,n.$$

(ii)

$$fl(\sum_{r=1}^{n} x_r y_r) = \sum_{r=1}^{n} x_r y_r(1+\varepsilon_r),$$

όπου

$$(1-2^{-t})^{n} \leq 1+\varepsilon_1 \leq (1+2^{-t})^{n},$$

και

$$(1-2^{-t})^{n+2-r} \leq 1+\varepsilon_r \leq (1+2^{-t})^{n+2-r}, \quad r = 2,3,\ldots,n.$$

1.3 Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $a > 0$. Δείξτε ότι αν $na < 0.1$, τότε

$$(1+a)^n < 1 + 1.06na \ \text{ και } \ (1-a)^n > 1 - 1.06na.$$

Στη συνέχεια (με τους συμβολισμούς της Άσκησης 1.2) δείξτε ότι αν $n2^{-t} < 0.1$ και $t_1 = t - \log_2(1.06)$, τότε:

(i)

$$fl(\sum_{r=1}^{n} x_r) = \sum_{r=1}^{n} x_r(1+\eta_r),$$

όπου

$$|\eta_1| < (n-1)2^{-t_1} \ \text{ και } \ |\eta_r| < (n+1-r)2^{-t_1}, \quad r = 2,3,\ldots,n.$$

(ii)

$$fl(\sum_{r=1}^{n} x_r y_r) = \sum_{r=1}^{n} x_r y_r(1+\varepsilon_r),$$

όπου

$$|\varepsilon_1| < n2^{-t_1} \ \text{ και } \ |\varepsilon_r| < (n+2-r)2^{-t_1}, \quad r = 2,3,\ldots,n.$$

(iii) Αν $\sum_{r=1}^{n}|x_r| < 1$, τότε

$$|fl(\sum_{r=1}^{n} x_r) - \sum_{r=1}^{n} x_r| < (n-1)2^{-t_1}.$$

1.4 Έστω $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ δύο πίνακες τα στοιχεία των οποίων είναι σε κανονικοποιημένη μορφή δυαδικής αριθμητικής κινητής υποδιαστολής t ψηφίων. Με τους συμβολισμούς της Άσκησης 1.3, δείξτε ότι

$$fl(AB) = AB + F,$$

όπου $F \in \mathbb{R}^{n,n}$ είναι τέτοιος ώστε

$$|F| < n2^{-t_1}|A||B|.$$

(**Σημείωση:** Αν $Q = (q_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ και $R = (r_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n,n}$, τότε $|Q|, |R|$ είναι οι πίνακες $|Q| = (|q_{i,j}|)$, $|R| = (|r_{i,j}|)$ και $|Q| < |R| \Rightarrow |q_{i,j}| < |r_{i,j}|$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.)

1.5 (i) Δείξτε ότι αν $\varepsilon_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, όπου $|\varepsilon_i| \le \xi < 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, τότε $\exists \varepsilon$, $|\varepsilon| \le \xi$, τέτιοιο ώστε

$$\prod_{i=1}^{n}(1+\varepsilon_i) = (1+\varepsilon)^n.$$

(ii) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Με τους συνήθεις συμβολισμούς δυαδικής αριθμητικής κινητής υποδιαστιολής t ψηφείων, δείξτε ότι αν

$$s := fl(fl(x_1) + fl(x_2)),$$

τότε κατά προσέγγιση

$$\frac{|s - (x_1 + x_2)|}{|x_1 + x_2|}| \le 2^{-t+1}\frac{|x_1| + |x_2|}{|x_1 + x_2|}.$$

Σχολιάστε το πιο πάνω αποτέλεσμα ως προς την επιρροή των σφαλμάτων στρογγύλευσης κατά την εκτέλεση προσθέσεων στον υπολογιστή.

1.6 Βρείτε κατάλληλους τρόπους υπολογισμού των παρακάτω, για την αποφυγή σφαλμάτων απώλειας σημαντικότητας:

(a) $\quad (x - \sin x)/\tan x, \quad x \approx 0,$

(b) $\quad (a + x)^n - a^n, \quad a, x > 0$ και $x \approx 0,$

(c) $\quad \sin(a + x) - \sin a, \quad x \approx 0,$

(d) $\quad x - \sqrt{(x^2 - a)}, \quad x > 0$ και $x >> a.$

1.7 Με ακρίβεια τεσσάρων σημαντικών ψηφίων

$$\sqrt{4899} \simeq (0.6999)10^2.$$

Με το δεδομένο αυτό, υπολογίστε (χρησιμοποιώντας δεκαδική αριθμητική κινητής υποδιαστολής 4 ψηφίων) την τιμή της διαφοράς

$$70 - \sqrt{4899}.$$

Με ακρίβεια 4 σημαντικών ψηφίων, η πραγματική τιμή της διαφοράς είναι $(0.7143)10^{-2}$. Σχολιάστε την ακρίβεια της προσέγγισης που υπολογίσατε, και εφαρμόστε έναν άλλο τρόπο υπολογισμού της διαφοράς ώστε η προσέγγιση που θα προκύψει να έχει ακρίβεια 4 σημαντικών ψηφίων.

1.8 Έστω p_n ένα πολύωνυμο

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

όπου $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, και $a_n \neq 0$. Τότε ο υπολογισμός της τιμής $p_n(x_o)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, με το συμβατικό τρόπο (που βασίζεται στον υπολογισμό των γινομένων $x_0^2, x_0^3, \ldots, x_0^n$, στη συνέχεια των γινομένων $a_1x_0, a_2x_0^2, \ldots, a_nx_0^n$ και τέλος του αθροίσματος $\sum_{j=0}^n a_j x_0^j$) απαιτεί $2n-1$ πολλαπλασιασμούς και n προσθέσεις.

Ο υπολογισμός της $p_n(x_0)$ με τη μέθοδο του "εγκιβωτισμένου πολλαπλασιασμού" (nested multiplication) βασίζεται στην εκτέλεση των πράξεων σύμφωνα με το σχήμα

$$p_n(x_0) = ((a_n x_0 + a_{n-1})x_0 + a_{n-2})x_0 + \cdots + a_1)x_0 + a_0.$$

Δηλαδή, η τιμή $b_0 = p_n(x_0)$ υπολογίζεται αναδρομικά από τη σχέση

$$b_n = a_n, \quad b_k = b_{k+1}x_0 + a_k, \quad k = n-1, n-2, \ldots, 0.$$

Δείξτε τα πιο κάτω:

(i) Η μέθοδος εγκιβωτισμένου πολλαπλασιασμού απαιτεί n πολλαπλασιασμούς και n προσθέσεις.

(ii)

$$p_n(x) = q_{n-1}(x)(x - x_0) + r,$$

όπου

$$q_{n-1}(x) = b_n x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + \cdots + b_1 \quad \text{και} \quad r = p_n(x_0).$$

(Δηλαδή οι αριθμοί b_i, $i = n, n-1, \ldots, 1$, είναι οι συντελεστές του πολυωνύμου που προκύπτει ως πηλίκο κατά τη διαίρεση του p_n δια του $x - x_0$.)

(iii) Αν $n = 2$ και ο x_0 καθώς και οι συντελεστές a_i, $i = 0, 1, 2$, του p_2 είναι σε κανονικοποιημένη μορφή δυαδικής αριθμητικής κινητής υποδιαστολής t ψηφίων, τότε (με τους συμβολισμούς της Άσκησης 1.3),

$$fl(p_2(x_0)) = p_2(x_0) + a_2E_2x_0^2 + a_1E_1x_0 + a_0E_0,$$

όπου

$$|E_2| < 4 \times 2^{-t_1}, \quad |E_1| < 3 \times 2^{-t_1}, \quad \text{και} \quad |E_0| < 2^{-t_1}.$$

(**Σημείωση:** Πιο γενικά μπορεί να δειχτεί ότι

$$fl(p_n(x_0)) = p_n(x_0) + \sum_{k=0}^{n} a_k E_k x_0^k,$$

όπου

$$|E_k| < (2k+1)2^{-t_1}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \quad \text{και} \quad |E_n| < 2n \times 2^{-t_1}.)$$

1.9 Γράψτε ένα πρόγραμμα σε Fortran για τον υπολογισμό, με τη μέθοδο εγκιβωτισμένου πολλαπλασιασμού, της τιμής $p_n(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, όπου $p_n \in \mathbb{P}_n$. Χρησιμοποιήστε το πρόγραμμά σας για τον υπολογισμό της τιμής $p_6(2)$, όπου

$$p_6(x) = 6x^4 - 53x^3 + 184x^2 - 295x + 196.$$

1.10 Έστω Δ_h ο ομοιόμορφος δαιμερισμός

$$\Delta_h: \; x_i = a + ih, \; i = 0, 1, \ldots, n, \quad h = (b-a)/n,$$

ενός διαστήματος $[a, b] \in \mathbb{R}$. Δείξτε τα παρακάτω:

(i) Αν $y \in C^2[a, b]$, τότε

$$y^{(1)}(x_i) = \frac{1}{h}(y(x_{i+1}) - y(x_i)) + \mathcal{O}(h), \quad i = 0, 1, \ldots, n-1,$$

και

$$y^{(1)}(x_i) = \frac{1}{h}(y(x_i) - y(x_{i-1})) + \mathcal{O}(h), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

(ii) Αν $y \in C^3[a, b]$, τότε

$$y^{(1)}(x_i) = \frac{1}{2h}(y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})) + \mathcal{O}(h^2), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

(iii) Αν $y \in C^4[a, b]$, τότε

$$y^{(2)}(x_i) = \frac{1}{h^2}(y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})) + \mathcal{O}(h^2), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

1.11 Η τεχνική παρεκβολής Richardson (Richardson extrapolation) Έστω:

• Δ_h ο διαμερισμός του διαστήματος $[a, b]$ της Άσκησης 1.10.

• $T(y)$ η τιμή μιας ποσότητας που εξαρτάται από μια συνάρτηση $y : [a, b] \to \mathbb{R}$. (Για παράδειγμα $T(y)$ μπορεί να είναι η τιμή του ολοκληρώματος $\int_a^b y(x)dx$ ή η τιμή μιας παραγώγου της y σε κάποιο σημείο $x \in [a, b]$.)

• $\widetilde{T}(h)$ μια προσέγγιση της $T(y)$ που εξαρτάται από τον διαμερισμό Δ_h (και συνεπώς από το μέγεθος του h) τέτοια ώστε

$$T(y) - \widetilde{T}(h) = ch^k + \mathcal{O}(h^m), \quad k, m \in \mathbb{N} \;\; \text{και} \;\; m > k,$$

όπου η σταθερά $c \in \mathbb{R}$ εξαρτάται από την y αλλά είναι ανεξάρτητη του h.

Δείξτε ότι αν

$$\widetilde{T_1}(h) := \frac{2^k \widetilde{T}(\frac{h}{2}) - \widetilde{T}(h)}{2^k - 1},$$

τότε

$$T(y) - \widetilde{T_1}(h) = \mathcal{O}(h^m).$$

(**Σημείωση:** Το αποτέλεσμα δείχνει ότι η προσέγγιση $\widetilde{T_1}(h)$ είναι της τάξης $\mathcal{O}(h^m)$, ενώ η αρχική προσέγγιση $\widetilde{T}(h)$ είναι της τάξης $O(h^k)$ με $k < m$.)

1.12 Έστω

$$y(x) = \frac{1}{x^2 + 4}.$$

Με μόνα δεδομένα τις τιμές

$$y(0) = 0.25,\ y(\pm 0.25) = 0.246154 \ \text{ και } \ y(\pm 0.5) = 0.235294,$$

χρησιμοποιήστε τον προσεγγιστικό τύπο (iii) της Άσκησης 1.10 και την τεχνική παρεκβολής Richardson για να υπολογίστε μια όσο το δυνατόν πιο ακριβή προσέγγιση της $y^{(2)}(0)$. Συγκρίνεται την προσέγγισή σας με την ακριβή τιμή $y^{(2)}(0) = -1/8$ και σχολιάστε τα αποτελέσματα σας.

Λύσεις Ασκήσεων

1.1 Οι τιμές είναι $(0.3841)10^4$ και $(0.3840)10^4$.

1.2 (i) Έστω

$$\begin{aligned} s_1 &= x_1, \\ s_r &= fl(s_{r-1} + x_r), \quad r = 2, 3, \ldots, n, \end{aligned}$$

έτσι ώστε

$$s_n = fl(\sum_{r=1}^{n} x_r).$$

Τότε, για $r = 2, 3, \ldots, n$,

$$s_r = (s_{r-1} + x_r)(1 + \varepsilon_r), \quad \text{με} \quad |\varepsilon_r| \le 2^{-t}.$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} s_2 &= (x_1 + x_2)(1 + \varepsilon_2), \\ s_3 &= [(x_1 + x_2)(1 + \varepsilon_2) + x_3](1 + \varepsilon_3), \\ s_4 &= \{[(x_1 + x_2)(1 + \varepsilon_2) + x_3](1 + \varepsilon_3) + x_4\}(1 + \varepsilon_4), \end{aligned}$$

κ.λ.π. $\Rightarrow$

$$s_n = \sum_{r=1}^{n} x_r(1 + \eta_r),$$

όπου

$$\begin{aligned} 1 + \eta_1 &= (1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) \cdots (1 + \varepsilon_n), \\ 1 + \eta_n &= (1 + \varepsilon_r)(1 + \varepsilon_{r+1}) \cdots (1 + \varepsilon_n), \quad r = 2, 3, \ldots, n. \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$fl(\sum_{r=1}^{n} x_r) = \sum_{r=1}^{n} x_r(1 + \eta_r),$$

όπου

$$(1 - 2^{-t})^{n-1} \le 1 + \eta_1 \le (1 + 2^{-t})^{n-1},$$

και

$$(1 - 2^{-t})^{n+1-r} \le 1 + \eta_r \le (1 + 2^{-t})^{n+1-r}, \quad r = 2, 3, \ldots, n.$$

(ii) Έστω

$$\begin{aligned} t_r &:= fl(x_r y_r), \quad r = 1, 2, \ldots, n, \\ s_1 &:= t_1 \quad \text{και} \quad s_r := fl(s_{r-1} + t_r), \quad r = 2, 3, \ldots, \end{aligned}$$

έτσι ώστε

$$s_n = fl(\sum_{r=1}^{n} x_r y_r).$$

Τότε

$$t_r = x_r y_r (1+\xi_r) \text{ και } s_r = (s_{r-1} + t_r)(1+\eta_r), \text{ με } |\xi_r|, |\eta_r| \le 2^{-t}.$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} s_2 &= [x_1 y_1 (1+\xi_1) + x_2 y_2 (1+\xi_2)](1+\eta_2), \\ s_3 &= \{[x_1 y_1 (1+\xi_1) + x_2 y_2 (1+\xi_2)](1+\eta_2) + x_3 y_3 (1+\xi_3)\}(1+\eta_3), \end{aligned}$$

κ.λ.π. $\Rightarrow$

$$s_n = \sum_{r=1}^{n} x_r y_r (1+\varepsilon_r),$$

όπου

$$\begin{aligned} 1+\varepsilon_1 &= (1+\xi_1)(1+\eta_2)\cdots(1+\eta_n), \\ 1+\varepsilon_r &= (1+\xi_r)(1+\eta_r)\cdots(1+\eta_n), \quad r = 2,3,\ldots,n. \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$fl(\sum_{r=1}^{n} x_r y_r) = \sum_{r=1}^{n} x_r y_r (1+\varepsilon_r),$$

όπου

$$(1-2^{-t})^n \le 1+\varepsilon_1 \le (1+2^{-t})^n,$$

και

$$(1-2^{-t})^{n+2-r} \le 1+\varepsilon_r \le (1+2^{-t})^{n+2-r}, \quad r = 2,3,\ldots,n.$$

1.3

$$\begin{aligned} (1+a)^n &= 1 + na + \frac{n(n-1)}{2!}a^2 + \cdots + \frac{n!}{n!}a^n \\ &= 1 + na\{1 + \frac{(n-1)}{2!}a + \cdots + \frac{(n-1)(n-2)\cdots 2.1}{n!}a^{n-1}\} \\ &< 1 + na\{1 + \frac{0.1}{2!} + \cdots + \frac{(0.1)^{n-1}}{n!}\} \\ &= 1 + 10na\{0.1 + \frac{(0.1)^2}{2!} + \cdots + \frac{(0.1)^n}{n!}\} \\ &< 1 + 10na\{-1 + \exp 0.1\} \\ &< 1 + 10na(-1 + 1.10517) \\ &< 1 + 1.06na. \end{aligned}$$

Με ανάλογο τρόπο

$$(1-a)^n > 1 - na\{1 + \frac{(n-1)}{2!} + \cdots + \frac{(n-1)(n-2),\cdots 2.1}{n!}a^{n-1}\}$$

κ.λ.π.

(i)-(ii) Αν $n2^{-t} < 0.1$, τότε

$$(1+2^{-t})^n < 1 + (1.06)n2^{-t} = 1 + n2^{-t_1}$$

και

$$(1-2^{-t})^n > 1 - (1.06)n2^{-t} = 1 - n2^{-t_1},$$

όπου

$$2^{-t_1} = 1.06 \times 2^{-t} \ \Rightarrow \ t_1 = t - \log_2(1.06).$$

Συνεπώς, αν $n2^{-t} < 0.1$, τότε φράγματα της μορφής

$$(1-2^{-t})^n \le 1 + \varepsilon \le (1+2^{-t})^n$$

μπορούν να εκφραστούν ως

$$|\varepsilon| < n2^{-t_1}.$$

Αυτό, σε συνδυασμό με τις σχέσεις για τα σφάλματα των

$$fl(\sum_{r=1}^{n} x_r) \ \ \text{και} \ \ fl(\sum_{r=1}^{n} x_r y_r),$$

που έχουμε ήδη βρεί (βλ. Άσκηση 1.2), οδηγεί εύκολα στα ζητούμενα αποτελέσματα.

(iii) Από το (i):

$$|fl(\sum_{r=1}^{n} x_r) - \sum_{r=1}^{n} x_r| = |\sum_{r=1}^{n} x_r(1+\eta_r) - \sum_{r=1}^{n} x_r| = |\sum_{r=1}^{n} x_r \eta_r| \le \sum_{r=1}^{n} |x_r||\eta_r|$$

όπου

$$|\eta_1| < (n-1)2^{-t_1} \ \ \text{και} \ \ |\eta_r| < (n+1-r)2^{-t_1}, \ r = 2, 3, \ldots, n.$$

$\Rightarrow$

$$|fl(\sum_{r=1}^{n} x_r) - \sum_{r=1}^{n} x_r| < |\eta_1| \sum_{r=1}^{n} |x_r| < \eta_1 < (n-1)2^{-t_1}.$$

1.4 Έστω $C = fl(AB)$. Τότε, από την Άσκηση 1.3 (ii),

$$c_{i,j} = a_{i1}b_{1j}(1+\varepsilon_1^{(ij)}) + a_{i2}b_{2j}(1+\varepsilon_2^{(ij)}) + \cdots + a_{in}b_{nj}(1+\varepsilon_n^{(ij)}),$$

όπου

$$|\epsilon_1^{(ij)}| < n2^{-t_1} \quad \text{και} \quad |\epsilon_r^{(ij)}| < (n+2-r)2^{-t_1}, \quad r = 2,3,\ldots,n.$$

$\Rightarrow$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} + f_{ij},$$

όπου

$$\begin{aligned} |f_{ij}| &< 2^{-t_1}\{n|a_{i1}||b_{j1}| + n|a_{i2}||b_{2j}| + (n-1)|a_{i3}||b_{j3}| + \cdots + 2|a_{in}||b_{jn}|\} \\ &< 2^{-t_1}n\{|a_{i1}||b_{j1}| + |a_{i2}||b_{2j}| + |a_{i3}||b_{j3}| + \cdots + |a_{in}||b_{jn}|\}. \end{aligned}$$

Συνεπώς, αν $F = (f_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$, τότε $C = AB + F$ και

$$|F| < 2^{-t_1}n|A||B|.$$

1.5 **(i)** Έστω $\lambda = \Pi_{i=1}^{n}(1+\varepsilon_i)$. Τότε

$$(1-\xi)^n \le \lambda \le (1+\xi)^n.$$

Η εφαρμογή του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής στη συνεχή συνάρτηση $(1+x)^n$, $x \in [-\xi,\xi]$, $\Rightarrow \exists\, \varepsilon \in [-\xi,\xi]$, τέτοιο ώστε $(1+\varepsilon)^n = \lambda$.

(ii)

$$\begin{aligned} s &= fl(fl(x_1) + fl(x_2)) = fl(x_1(1+\varepsilon_1) + x_2(1+\varepsilon_2)) \\ &= [x_1(1+\varepsilon_1) + x_2(1+\varepsilon_2)](1+\varepsilon) \\ &= x_1(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon) + x_2(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon), \quad |\varepsilon| \le 2^{-t} \text{ και } |\varepsilon_i| \le 2^{-t}, i = 1,2. \end{aligned}$$

Άρα, (i) $\Rightarrow$

$$s = x_1(1+\delta)^2 + x_2(1+\eta)^2, \quad |\delta|, |\eta| \le 2^{-t},$$

ή, αγνοώντας όρους της τάξης 2^{-2t},

$$s \approx (x_1 + x_2) + 2(\delta x_1 + \eta x_2).$$

$\Rightarrow$

$$\frac{|s - (x_1+x_2)|}{|x_1+x_2|} \approx 2\frac{|\delta x_1 + \eta x_2|}{|x_1+x_2|} \le 2^{-t+1}\frac{|x_1| + |x_2|}{|x_1+x_2|}.$$

$\Rightarrow$ Αν οι x_1, x_2 είναι ομόσημοι, τότε $|x_1| + |x_2| = |x_1 + x_2| \Rightarrow$ Το φράγμα του σχετικού σφάλματος είνα μικρό (δηλ. $\approx 2^{-t+1}$). Αν, όμως, οι x_1, x_2 είναι ετερόσημοι και $|x_1| \approx |x_2|$, τότε το φράγμα του σχετικού σφάλματος είναι "μεγάλο" $\Rightarrow$ Κίνδυνος απώλειας ακρίβειας.

1.6

(a) $$\frac{(x - \sin x)}{\tan x} \approx \frac{x - (x - x^3/6)}{\tan x} = \frac{x^3}{6\tan x},$$

(b) $$(a+x)^n - a^n = na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}x^2 + \cdots + nax^{n-1} + x^n,$$

(c) $$\sin(a+x) - \sin a = 2\cos(a + \frac{x}{2}))\sin\frac{x}{2},$$

(d) $$x - \sqrt{(x^2 - a)} = \frac{a}{x + \sqrt{(x^2-a)}}.$$

1.7 Έστω

$$x = 70 + \sqrt{4899}.$$

Με δεκαδική αριθμητική κινητής υποδιαστολής 4 ψηφίων βρίσκουμε την τιμή

$$\widetilde{x} = (0.1000)10^{-1}.$$

$\Rightarrow$ Η τιμή αυτή δεν είναι ακριβής σε κανένα σημαντικό ψηφίο.

Για μεγαλύτερη ακρίβεια, χρησιμοποιούμε την ταυτότητα

$$x = \frac{70 \times 70 - 4899}{70 + \sqrt{4899}}.$$

Τότε, με δεκαδική αριθμητική κινητής υποδιαστολής 4 ψηφίων βρίσκουμε την τιμή

$$\widetilde{\widetilde{x}} = (0.7143)10^{-2},$$

η οποία είναι ακριβής σε 4 σημαντικά ψηφία.

1.8 (ii) Προφανώς $r = p_n(x_0)$. Έστω

$$q_n(x) = c_n x^{n-1} + c_{n-1} x^{n-2} + \cdots + c_2 x + c_1.$$

Τότε

$$\begin{aligned} &a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots a_1 x + a_0 \\ &\qquad = (x - x_0)[c_n x^{n-1} + c_{n-1} x^{n-2} + c_{n-2} x^{n-3} \cdots + c_2 x + c_1] + r. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Εξισώνοντας συντελεστές ίσων δυνάμεων,

$$\begin{aligned} &c_n = a_n = b_n, \quad c_{n-1} = c_n x_0 + a_{n-1} = b_{n-1}, \\ &c_{n-2} = c_{n-1} x_0 + a_{n-2} = b_{n-2}, \quad \ldots, \quad c_1 = c_2 x_0 + a_1 = b_1. \end{aligned}$$

(iii)

$$p_2(x_0) = (a_2 x_0 + a_1) x_0 + a_0.$$

$\Rightarrow$

$$fl(p_2(x_0)) \quad = \quad \{[(a_2 x_0 (1 + \eta_1) + a_1](1 + \eta_2) x_0 (1 + \eta_3) + a_0\}(1 + \eta_4),$$

όπου $|\eta_i| \leq 2^{-t}$, $i = 0, 1, 2 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} fl(p_2(x_0)) &= a_2 x_0^2 (1 + E_2) + a_1 x_0 (1 + E_1) + a_0 (1 + E_0) \\ &= p_2(x_0) + a_2 E_2 x_0^2 + a_1 E_1 x_0 + a_0 E_0, \end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned} &(1 - 2^{-t})^4 \leq 1 + E_2 \leq (1 + 2^{-t})^4, \\ &(1 - 2^{-t})^3 \leq 1 + E_1 \leq (1 + 2^{-t})^3, \\ &1 - 2^{-t} \leq 1 + E_0 \leq 1 + 2^{-t}, \end{aligned}$$

ή (βλ. Άσκηση 1.3)

$$|E_2| < 4 \times 2^{-t_1}, \quad |E_1| < 3 \times 2^{-t_1} \quad kai \quad E_0 < 2^{-t_1}.$$

1.10 Αναπτύσσοντας κατά Taylor:

(i) Αν $y \in C^2[a,b]$, τότε για $i = 0, 1, \ldots, n-1$,

$$\begin{aligned}
& y(x_{i+1}) = y(x_i + h) = y(x_i) + hy^{(1)}(x_i) + \frac{h^2}{2} y^{(2)}(\xi), \quad \xi \in (x_i, x_{i+1}),\\
& \Rightarrow y(x_{i+1}) - y(x_i) = hy^{(1)}(x_i) + \mathcal{O}(h^2),\\
& \Rightarrow \; y^{(1)}(x_i) = \frac{1}{h}(y(x_{i+1}) - y(x_i)) + \mathcal{O}(h),
\end{aligned}$$

και, για $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$\begin{aligned}
& y(x_{i-1}) = y(x_i - h) = y(x_i) - hy^{(1)}(x_i) + \frac{h^2}{2} y^{(2)}(\xi), \quad \xi \in (x_{i-1}, x_i),\\
& \Rightarrow y(x_i) - y(x_{i-1}) = hy^{(1)}(x_i) + \mathcal{O}(h^2),\\
& \Rightarrow \; y^{(1)}(x_i) = \frac{1}{h}(y(x_i) - y(x_{i-1})) + \mathcal{O}(h).
\end{aligned}$$

(ii) Αν $y \in C^3[a,b]$, τότε για $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\begin{aligned}
& y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy^{(1)}(x_i) + \frac{h^2}{2} y^{(2)}(x_i) + \frac{h^3}{6} y^{(3)}(\xi_1), \quad \xi_1 \in (x_i, x_{i+1}),\\
& y(x_{i-1}) = y(x_i) - hy^{(1)}(x_i) + \frac{h^2}{2} y^{(2)}(x_i) - \frac{h^3}{6} y^{(3)}(\xi_2), \quad \xi_2 \in (x_{i-1}, x_i),\\
& \Rightarrow y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}) = 2hy^{(1)}(x_i) + \mathcal{O}(h^3),\\
& \Rightarrow \; y^{(1)}(x_i) = \frac{1}{2h}(y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})) + \mathcal{O}(h^2).
\end{aligned}$$

(iii) Αν $y \in C^4[a,b]$, τότε για $i = 1, 2, \ldots, n-1$,

$$\begin{aligned}
& y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy^{(1)}(x_i) + \frac{h^2}{2} y^{(2)}(x_i) + \frac{h^3}{6} y^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{24} y^{(4)}(\xi_1), \; \xi_1 \in (x_i, x_{i+1}),\\
& y(x_{i-1}) = y(x_i) - hy^{(1)}(x_i) + \frac{h^2}{2} y^{(2)}(x_i) - \frac{h^3}{6} y^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{24} y^{(4)}(\xi_2), \; \xi_2 \in (x_{i-1}, x_i),\\
& \Rightarrow y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}) = h^2 y^{(2)}(x_i) + \mathcal{O}(h^4)\\
& \Rightarrow \; y^{(2)}(x_i) = \frac{1}{h^2}(y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})) + \mathcal{O}(h^2).
\end{aligned}$$

1.11

$$\begin{aligned}
& T(y) - T(h) = ch^k + \mathcal{O}(h^m),\\
& \Rightarrow T(y) - T(\frac{h}{2}) = c(\frac{h}{2})^k + \mathcal{O}(h^m),\\
& \Rightarrow (1 - 2^k)T(y) - T(h) + 2^k T(\frac{h}{2}) = \mathcal{O}(h^m),\\
& \Rightarrow T(y) - \frac{2^k T(\frac{h}{2}) - T(h)}{2^k - 1} = \mathcal{O}(h^m).
\end{aligned}$$

1.12 Ο τύπος της Άσκησης 1.10 (iii) δίνει την προσσέγγιση

$$\widetilde{y}^{(2)}(h) = \frac{1}{h^2}(y(x_i - h) - 2y(x_i) + y(x_i + h)),$$

για την τιμή της $y^{(2)}(x_i)$. $\Rightarrow$ Με $y(x) = 1/(x^2+4)$, $x_i = 0$ και $h = 0.5$, ο τύπος δίνει τις πιο κάτω προσεγγίσεις για την τιμή της $y^{(2)}(0)$:

$$\widetilde{y}^{(2)}(h) = \frac{1}{(0.5)^2}(0.235294 - 2 \times 0.25 + 0.235294) = -0.117648$$

και

$$\widetilde{y}^{(2)}(\frac{h}{2}) = \frac{1}{(0.25)^2}(0.246154 - 2 \times 0.25 + 0.246154) = -0.123072.$$

Συνεπώς, σύμφωνα με την τεχνική παρεκβολής Richardson (επειδή στην περίπτωση μας το k της Άσκησης 1.11 είναι $k = 2$), μια πιο ακριβής προσέγγιση της $y^{(2)}(0)$ είναι η

$$\widetilde{y}_1^{(2)}(h) = \frac{1}{3}(4\widetilde{y}^{(2)}(\frac{h}{2}) - \widetilde{y}^{(2)}(h)) = -0.124880.$$

$\Rightarrow$

$$|y^{(2)}(0) - \widetilde{y}^{(2)}(h)| = 7.4 \times 10^{-3}, \quad |y^{(2)}(0) - \widetilde{y}^{(2)}(\frac{h}{2})| = 1.9 \times 10^{-3}$$

και

$$|y^{(2)}(0) - \widetilde{y}_1^{(2)}(h)| = 1.2 \times 10^{-4}.$$

$\Rightarrow$ Η $\widetilde{y}_1^{(2)}(h)$ είναι κατά μια δύναμη του 10 πιο ακριβής από την ακριβέστερη προσέγγιση που μπορούμε να υπολογίσουμε χρησιμοποιώντας τα δεδόμένα της άσκησης και τον προσεγγιστικό τύπο της Άσκησης 1.10 (iii). Πιο συγκεκριμένα, η προσέγγιση $\widetilde{y}_1^{(2)}(h)$ είναι της τάξης $\mathcal{O}(h^4)$ (γιατί;) ενώ οι $\widetilde{y}^{(2)}(h)$ και $\widetilde{y}^{(2)}(\frac{h}{2})$ είναι της τάξης $\mathcal{O}(h^2)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων

2.1 Βασικά θεωρήματα

Θεώρημα 2.1 *Έστω $[a,b] \subset \mathbb{R}$ και $\varphi : [a,b] \to [a,b]$. Αν $\forall x, x' \in [a,b]$,*

$$|\varphi(x) - \varphi(x')| \leq l|x - x'|, \quad 0 \leq l < 1,$$

τότε:

(i) *Η φ έχει στο $[a,b]$ ένα μοναδικό σταθερό σημείο α. (Δηλαδή, η $x = \varphi(x)$ έχει στο $[a,b]$ μια μοναδική ρίζα α.)*

(ii) *$\forall x_0 \in [a,b]$, η ακολουθία x_i, $i \in \mathbb{N}_0$, που προκύπτει από την επαναληπτική μέθοδο*

$$x_{i+1} = \varphi(x_i), \quad i = 0, 1, \dots ,$$

είναι καλώς ορισμένη (δηλ. $x_i \in [a,b]$, $\forall i \in \mathbb{N}$) και συγκλίνει στο α.

Πόρισμα 2.1 *Η συνθήκη Lipschitz*

$$|\varphi(x) - \varphi(x')| \leq l|x - x'|, \quad 0 \leq l < 1,$$

του Θεωρήματος 2.1 μπορεί να αντικατασταθεί από τις συνθήκες $\phi \in C^1[a,b]$ και

$$|\varphi^{(1)}(x)| < 1, \quad \forall x \in [a,b].$$

Θεώρημα 2.2 *Με τους συμβολισμούς και τις συνθήκες του Θεωρήματος 2.1 :*

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{l^n}{1-l}|x_1 - x_0|,$$

και

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{l}{1-l}|x_n - x_{n-1}|.$$

Θεώρημα 2.3 *Έστω α ένα σταθερό σημείο της φ και*

$$I := [\alpha - \varrho, \alpha + \varrho], \quad \varrho > 0,$$

μια περιοχή του α. Αν $\varphi \in C^1(I)$ και

$$|\varphi^{(1)}(x)| \leq l, \quad 0 < l < 1, \quad x \in I,$$

τότε:

(i) *$\forall x_0 \in I$, η ακολουθία που προκύπτει από την επαναληπτική μέθοδο*

$$x_{i+1} = \varphi(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots$$

είναι καλώς ορισμένη.

(ii) *Η ακολουθία συγκλίνει στο α.*

(iii) *Το α είναι το μοναδικό σταθρερό σημείο της φ στο I.*

Θεώρημα 2.4 *Έστω φ μια συνάρτηση επανάληψης επαρκώς συνεχώς παραγωγίσιμη σε μια περιοχή I του α, όπου α είναι ένα σταθερό σημείο της φ. Αν*

$$|\varphi^{(1)}(x)| \leq l, \quad 0 < l < 1, \quad \forall x \in I,$$

τότε η φ έχει τάξη σύγκλισης $p \geq 1$, για τον προσδιορισμό του α, αν και μόνο αν

$$\varphi^{(k)}(\alpha) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, p-1, \quad \text{και} \quad \varphi^{(p)}(\alpha) \neq 0.$$

Επιπλέον

$$\lim_{i \to \infty} \frac{|\varepsilon_{i+1}|}{|\varepsilon_i|^p} = \frac{1}{p!}|\varphi^{(p)}(\alpha)|.$$

Θεώρημα 2.5 *Έστω α ένα σταθερό σημείο μιας συνάρτησης $\varphi \in C^p(I)$, $(p \geq 1)$ όπου*

$$I := [\alpha - \varrho, \alpha + \varrho], \quad \varrho > 0,$$

μια περιοχή του α, και έστω $\{x_i\}$ η ακολουθία που προκύπτει από την επαναληπτική μέθοδο

$$x_{i+1} = \varphi(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots \ .$$

Αν

$$\frac{1}{p!}|\varphi^{(p)}(x)| \leq M, \quad \forall x \in I,$$

και η φ πληροί τις συνθήκες

$$\varphi^{(k)}(\alpha) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, p-1, \quad \varphi^{(p)}(\alpha) \neq 0,$$

και

$$M\varrho^{p-1} < 1,$$

τότε $\forall x_0 \in I$ *:*

(i) $x_i \in I$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

(ii) *Η ακολουθία* $\{x_i\}$ *συγκλίνει στο* α, *με τάξη σύγκλισης* p.

(iii) *Το* α *είναι το μοναδικό σταθερό σημείο της* φ *στο* I.

Θεώρημα 2.6 *Αν η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη σε μια περιοχή μιας απλής ρίζας α της εξίσωσης*

$$f(x) = 0,$$

τότε (για κάθε x_0 αρκούντως κοντά στην α) η ακολουθία που προκύπτει από τη μέθοδο Newton συγκλίνει στην α και η τάξη σύγκλισης είναι (τουλάχιστον) τετραγωνική.

Θεώρημα 2.7 *Έστω α μια απλή ρίζα της εξίσωσης*

$$f(x) = 0,$$

όπου η f είναι δυο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη σε μια περιοχή $I := [\alpha-\varrho, \alpha+\varrho]$, $\varrho > 0$, της α, και έστω $\{x_i\}$ η ακολουθία που προκύπτει από την εφαρμογή της μεθόδου της τέμουσας. Αν $f^{(2)}(\alpha) \neq 0$,

$$\frac{1}{2}\left|\frac{f^{(2)}(x)}{f^{(1)}(x)}\right| \leq M, \quad \forall x \in I,$$

και το ϱ είναι αρκούντως μικρό ώστε

$$M\varrho < 1,$$

τότε:

(i) $x_i \in I$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

(ii) *Η ακολουθία* $\{x_i\}$ *συγκλίνει στην* α.

(iii) *Η τάξη σύγκλισης είναι* $p = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \approx 1.62$.

Ασκήσεις

2.1 Δείξτε ότι η εξίσωση $x^3 + 2x - 1 = 0$ έχει μια πραγματική ρίζα $\alpha \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$.

Προσδιορίστε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις επανάληψης φ μπορούν να χρησιμοποιηθούν (με κατάλληλο x_0) για την προσέγγιση της α με την επαναληπτική μέθοδο $x_{i+1} = \varphi(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots,$:

$$\text{(i) } \frac{1}{2}(1 - x^3), \quad \text{(ii) } (1 - 2x)/x^2, \quad \text{(iii) } x - \frac{x^3 + 2x - 1}{3x^2 + 2}.$$

2.2 Θεωρήστε την εφαρμογή της επαναληπτικής μεθόδου

$$x_{i+1} = \frac{x_i(2a + x_i^3)}{2x_i^3 + a}, \quad i = 0, 1, \ldots,$$

για την προσέγγιση της ρίζας $\alpha = \sqrt[3]{a}$, $a > 0$, της εξίσωσης

$$f(x) := x(x^3 - a) = 0.$$

Δείξτε ότι, με κατάλληλο x_0, η μέθοδος είναι τρίτης τάξης σύγκλισης.

2.3 Έστω $f \in C^2[a, b]$. Δείξτε γεωμετρικά ότι αν η f πληροί τις παρακάτω συνθήκες

(i) $f(a)f(b) < 0$,

(ii) $f^{(1)}(x) \neq 0$, $x \in [a, b]$,

(iii) $f^{(2)}(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$, ή $f^{(2)}(x) \leq 0$, $\forall x \in [a, b]$,

(iv) $|f(a)|/|f^{(1)}(a)| < b - a$ και $|f(b)|/|f^{(1)}(b)| < b - a$,

τότε η μέθοδος Newton συγκλίνει στη μοναδική ρίζα $\alpha \in (a, b)$ της εξίσωσης $f(x) = 0$, $\forall x_0 \in [a, b]$.

2.4 Θεωρήστε την εφαρμογή της μεθόδου Newton για την προσέγγιση της ρίζας $\sqrt[m]{\beta}$, $\beta > 0$, της εξίσωσης

$$f(x) := x^m - \beta = 0, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Δείξτε ότι ο αλγόριθμος είναι

$$x_{i+1} = \frac{m-1}{m} x_i + \frac{\beta}{m x_i^{m-1}}, \quad i = 0, 1, \ldots .$$

Δείξτε επίσης ότι ο αλγόριθμος συγκλίνει στην $\sqrt[m]{\beta}$, $\forall x_0 > 0$.

2.5 Εφαρμόστε τον αλγόριθμο Newton της προηγούμενης άσκησης, με $m = 2$, για τον υπολογισμό της τιμής της $\sqrt{2}$ (με αριθμητική τριών δ.ψ.) χρησιμοποιώντας τις αρχικές τιμές: (i) $x_0 = 0.1$, και (ii) $x_0 = 2$. Σχολιάστε τα αποτελέσματά σας.

2.6 Θεωρήστε την εφαρμογή της μεθόδου Newton για την προσέγγιση της ρίζας $1/a$ της εξίσωσης

$$f(x) := \frac{1}{x} - a = 0, \quad a \in \mathbb{R}, \quad a > 0.$$

Δείξτε ότι ο αλγόριθμος είναι

$$x_{i+1} = x_i(2 - ax_i), \quad i = 0, 1, \dots \ .$$

Δείξτε επίσης ότι ο αλγόριθμος συγκλίνει $\forall x_0 \in (0, 2/a)$. (**Σημείωση:** Ο υπολογισμός των διαδοχικών προσεγγίσεων x_i δεν απαιτεί διαιρέσεις.)

2.7 Δείξτε ότι αν α είναι μια ρίζα πολλαπλότητας $m > 1$ της εξίσωσης $f(x) = 0$ και η f είναι δυο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη σε μια περιοχή του α, τότε ($\forall x_0$, αρκούντως κοντά στο α) η ακολουθία $\{x_i\}$ που προκύπτει από τη μέθοδο Newton συγκλίνει στην α με γραμμική τάξη σύγκλισης, και

$$\lim_{i\to\infty} \frac{|\varepsilon_{i+1}|}{|\varepsilon_i|} = 1 - \frac{1}{m},$$

όπου $\epsilon_i = x_i - \alpha$. (**Υπόδειξη:** $f(x) = (x - \alpha)^m g(x)$, όπου $g(\alpha) \neq 0$.)

2.8 Με τους συμβολισμούς και τις συνθήκες της Άσκησης 2.7, δείξτε ότι η επαναληπτική μέθοδος

$$x_{i+1} = x_i - m\frac{f(x_i)}{f^{(1)}(x_i)}, \quad i = 0, 1, \dots,$$

συγκλίνει στην α με τετραγωνική τάξη σύγκλισης.

2.9 Η διαδικασία επιτάχυνσης Aitken Έστω $\{x_i\}$ μια ακολουθία που συγκλίνει με γραμμική τάξη σύγκλισης σε μια τιμή α. Δείξτε ότι για μεγάλες τιμές του i,

$$\alpha \approx x_{i+2} - \frac{(x_{i+2} - x_{i+1})^2}{x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i}.$$

(**Σημείωση:** Από το πιο πάνω μπορούμε να συμπεράνουμε ότι αν x_i, x_{i+1} και x_{i+2} είναι τρεις διαδοχικές προσεγγίσεις της α, τότε η

$$\widetilde{\alpha} = x_{i+2} - \frac{(x_{i+2} - x_{i+1})^2}{x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i}$$

είναι μια καλύτερη προσέγγιση. Αυτή είναι η διαδικασία παρεκβολής Aitken - Aitken's extrapolation procedure.)

2.10 Η επαναληπτική μέθοδος

$$x_{i+1} = 0.5(10 - x_i^3)^{1/2}, \quad i = 0, 1, \dots \ ,$$

με $x_0 = 1.5$, συγκλίνει γραμμικά στη μοναδική ρίζα $\alpha \in [1, 2]$ της εξίσωσης

$$x^3 + 4x^2 - 10 = 0.$$

Εφαρμόστε 10 βήματα της επαναληπτικής μεθόδου. Στη συνέχεια, χρησιμοποιήστε τις προσεγγίσεις: (i) x_2, x_3, x_4, (ii) x_3, x_4, x_5, και (iii) x_4, x_5, x_6, γαι να προσδιορίστε με τη διαδικασία Aitken τις αντίστοιχες βελτιωμένες προσεγγίσεις $\widetilde{\alpha}_1$, $\widetilde{\alpha}_2$ και $\widetilde{\alpha}_3$. Σχολιάστε τα αποτελέσματά σας, δεδομένου ότι σε 8 δ.ψ. $\alpha = 1.36523001$.

2.11 Σε μια εφαρμογή της μεθόδου Newton (για τον προσδιορισμό της ρίζας α μιας εξίσωσης $f(x) = 0$) παρατηρείται αργή σύγκλιση, γεγονός που υποδεικνύει ότι η α έχει πολλαπλότητα $m > 1$. Εξηγήστε πως μπορούν να χρησιμοποιηθούν τα αποτελέσματα της Άσκησης 2.7, σε συνδυασμό με τη διαδικασία παρεκβολής Aitken της Άσκησης 2.9, για τον προσδιορισμό της πολλαπλότητας m. (**Σημείωση:** Μετά τον προσδιορισμό της m, η μέθοδος της Άσκησης 2.8 μπορεί να χρησιμοποιηθεί για ταχεία σύγλιση στην α.)

2.12 Γράψτε ένα πρόγραμμα Fortran διπλής ακρίβειας για την προσέγγιση με τη μέθοδο Newton των ριζών μιας εξίσωσης της μορφής $f(x) = 0$.

Χρησιμοπιήστε το πρόγραμμά σας για τον υπολογισμό των πραγματικών ριζών των εξισώσεων: (i) $x - 2^{-x} = 0$, αρχίζοντας με $x_0 = 0.5$, και (ii) $x^3 - 2x - 5 = 0$, αρχίζοντας με $x_0 = 3$. Και στις δύο περιπτώσεις, χρησιμοποιήστε το κριτήριο τερματισμού $|x_{N+1} - x_N| < 10^{-13}$. (**Σημείωση:** Βλ. το βιβλίο των Γ. Δ. Ακρίβη και Β. Α. Δουγαλή, "*Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση*", σελ. 51, για τις τιμές των διαδοχικών προσεγγίσεων που πρέπει να προκύψουν από το πρόγραμμά σας.)

Λύσεις Ασκήσεων

2.2 Η συνάρτηση επανάληψης είναι

$$\varphi(x) = \frac{x(2a + x^3)}{2x^3 + a} \ .$$

Συνεπώς αν $\alpha := \sqrt[3]{a}$, τότε $\varphi(\alpha) = \alpha$. Επίσης

$$\begin{aligned}
\varphi^{(1)}(x) &= \frac{2(x^3 - a)^2}{(2x^3 + a)^2} \quad \Rightarrow \quad \varphi^{(1)}(\alpha) = 0, \\
\varphi^{(2)}(x) &= \frac{36ax^2(x^3 - a)}{(2x^3 + a)^3} \quad \Rightarrow \quad \varphi^{(2)}(\alpha) = 0, \\
\varphi^{(3)}(x) &= \frac{36a}{(2x^3 + a)^4}[x(5x^3 - 2a)(2x^3 + a) - 18x^4(x^3 - a)], \\
\Rightarrow \quad \varphi^{(3)}(\alpha) &= \frac{4}{\sqrt[3]{a^2}} \neq 0.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Η επαναληπτική μέθοδος, με κατάλληλο x_0, συγκλίνει στην τιμή $\alpha = \sqrt[3]{a}$ με τάξη σύγκλισης 3. (Βλ. Θεωρήματα 2.4 και 2.5.) Πιο συγκεκριμένα: Έστω $I := [\alpha - \varrho, \alpha + \varrho]$, όπου το ϱ είναι τ.ω.

$$\frac{1}{6}|\varphi^{(3)}(x)|\varrho^2 < 1, \quad x \in I.$$

Τότε, $\forall x_0 \in I$, η μέθοδος συγκλίνει στο α με τάξη σύγκλισης 3.

2.3 Παρατηρούμε τα εξής:

- Συνθήκες (i) και (ii): $\Rightarrow$ Η εξίσωση έχει μια μοναδική ρίζα $\alpha \in [a, b]$.
- Συνθήκες (iii) και (ii): $\Rightarrow$ Η συνάρτηση $f^{(1)}$ είναι μονότονη στο $[a, b]$.
- Συνθήκη (iv): $\Rightarrow$ Οι εφάπτομενες της $y = f(x)$ στα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$ τέμνουν τον άξονα του x εντός του $[a, b]$.

Αν υποθέσουμε τώρα ότι

$$f(a) < 0, \quad f(b) > 0 \;\; \text{και} \;\; f^{(2)}(x) \geq 0, \; \forall x \in [a, b],$$

(οι άλλες περιπτώσεις εξετάζονται ανάλογα), τότε από το γράφημα της $y = f(x)$ μπορούμε να συμπεράνουμε αμέσως ότι:

- Αν $\alpha < x_0 \leq b$, τότε η ακολουθία $\{x_i\}$ που προκύπτει από τη μέθοδο Newton συγκλίνει μονοτονικά στην α.
- Αν $a \leq x_0 < \alpha$, τότε $x_1 \in (\alpha, b)$ και οι διαδοχικές προσεγγίσεις $x_2, x_3 \ldots$, που ακολουθούν, συγκλίνουν μονοτονικά στην α.

2.4 Για την εξίσωση

$$f(x) := x^m - \beta = 0,$$

ο αλγόριθμος Newton δίνει

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^m - \beta}{m x_i^{m-1}} \quad i = 0, 1, \dots ,$$

ή

$$x_{i+1} = \frac{m-1}{m} x_i + \frac{\beta}{m x_i^{m-1}}, \quad i = 0, 1, \dots .$$

Στο διάστημα $(0, \infty)$ η f πληροί τις συνθήκες (i) - (iv) της Άσκησης 2.3. $\Rightarrow$ O αλγόριθμος συγκλίνει στη ρίζα $\alpha = \sqrt[m]{\beta}$, $\forall x_0 > 0$.

2.5 Με $m = 2$ ο αλγόριθμος της Άσκησης 2.4 (για τον υπολογισμό της $\sqrt{2}$) είναι:

$$x_{i+1} = \frac{1}{2}(x_i + \frac{2}{x_i}), \quad i = 0, 1, \dots, .$$

(i) Με $x_0 = 0.1$ ο αλγόριθμος δίνει:

$$\begin{aligned} &x_1 = 10.050, \quad x_2 = 5.125 \quad x_3 = 2.758, \quad x_4 = 1.742 \\ &x_5 = 1.445, \quad x_6 = 1.415, \quad x_7 = 1.414, \quad x_8 = 1.414. \end{aligned}$$

(ii) Με $x_0 = 2$ ο αλγόριθμος δίνει:

$$x_1 = 1.500, \quad x_2 = 1.417, \quad x_3 = 1.414, \quad x_4 = 1.414.$$

Η συμπεριφορά της ακολουθίας $\{x_i\}$ στην περίπτωση (i) μπορεί να εξηγηθεί από το δεύτερο συμπέρασμα της Άσκησης 2.3. Δηλαδή, επειδή η $x_0 = 0.1$ δεν είναι αρκούντως κοντά στη ζητούμενη ρίζα και επειδή $0.1 < \sqrt{2}$, η πρώτη προσέγγιση x_1 είναι κατά πολύ χειρότερη από την αρχική τιμή x_0. Ωστόσο, $x_1 \in (\sqrt{2}, \infty)$ και, στη συνέχεια, οι προσεγγίσεις $x_2, x_3, \dots$, συγκλίνουν μονοτονικά στην $\sqrt{2}$.

2.6 Για την εξίσωση

$$f(x) := \frac{1}{x} - a = 0,$$

ο αλγόριθμος Newton δίνει

$$x_{i+1} = x_i + \frac{1/x_i - a}{1/x_i^2} \quad \Rightarrow \quad x_{i+1} = x_i(2 - a x_i), \quad i = 0, 1, \dots .$$

Συνεπώς ο αλγόριθμος είναι

$$x_{i+1} = \varphi(x_i), \quad i = 0, 1, \dots,$$

όπου $\varphi(x) = x(2 - ax) \Rightarrow \varphi^{(1)}(x) = 2(1 - ax)$ και $\varphi^{(2)}(x) = -2a \Rightarrow |\varphi^{(2)}(x)| = 2a$, $\forall x$. Συνεπώς, σύμφωνα με το Θεώρημα 2.5, ο αλγόριθμος συγκλίνει $\forall x_0 \in [1/a - \varrho, 1/a + \varrho]$, όπου ϱ είναι τ.ω.

$$a\varrho < 1 \quad \Rightarrow \quad \varrho < \frac{1}{a}.$$

$\Rightarrow$ Ο αλγόριθμος συγκλίνει $\forall x_0 \in (0, 2/a)$.

2.7 $f(x) = (x-\alpha)^m g(x)$ όπου η g είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και $g(\alpha) \neq 0$. $\Rightarrow$

$$f^{(1)}(x) = m(x-\alpha)^{m-1}g(x) + (x-\alpha)^m g^{(1)}(x).$$

$\Rightarrow$ Η συνάρτηση επνάληψης της μεθόδου Newton είναι

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= x - \frac{(x-\alpha)^m g(x)}{m(x-\alpha)^{m-1}g(x) + (x-\alpha)^m g^{(1)}(x)} \\ &= x - \frac{(x-\alpha)g(x)}{mg(x) + (x-\alpha)g^{(1)}(x)}.\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\varphi^{(1)}(x) = 1 - \frac{[g(x) + (x-\alpha)g^{(1)}(x)]G(x) - (x-\alpha)g(x)G^{(1)}(x)}{\{G(x)\}^2},$$

όπου

$$G(x) = mg(x) + (x-\alpha)g^{(1)}(x).$$

$\Rightarrow$

$$\varphi^{(1)}(\alpha) = 1 - \frac{1}{m} \quad \Rightarrow \quad 0 < \varphi^{(1)}(\alpha) < 1.$$

Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα 2.4, η μέθοδος Newton (με κατάληλο x_0) είναι πρώτης τάξης σύγκλισης για τον προσδιορισμό της α, και αν $\varepsilon_i := x_i - \alpha$, τότε

$$\lim_{i\to\infty} \frac{|\varepsilon_{i+1}|}{|\varepsilon_i|} = |\varphi^{(1)}(\alpha)| = 1 - \frac{1}{m}.$$

2.8 Η συνάρτηση επανάληψης είναι

$$\varphi(x) = x - m\frac{f(x)}{f^{(1)}(x)},$$

όπου $f(x) = (x-\alpha)^m g(x)$. $\Rightarrow$ Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα της Άσκησης 2.7,

$$\varphi(\alpha) = \alpha, \quad \varphi^{(1)}(\alpha) = 0 \quad \text{και} \quad \varphi^{(2)}(\alpha) \neq 0.$$

Συνεπώς, σύμφωνα με το Θεώρημα 2.5, η μέθοδος (με κατάληλο x_0) συγκλίνει στην α με τετραγωνική τάξη σύγκλισης.

2.9 Η $\{x_i\}$ συγκλίνει στην α και η σύγκλιση είναι γραμμική $\Rightarrow$

$$x_{i+1} - \alpha = C_i(x_i - a), \quad |C_i| < 1,$$

όπου $C_i \to C$ και $|C|$ είναι η σταθερά του ασυμπτωτικού σφάλματος. $\Rightarrow$ Για μεγάλες τιμές του i,

$$x_{i+1} - \alpha \approx C(x_i - \alpha) \;\; \text{και} \;\; x_{i+2} - \alpha \approx C(x_{i+1} - \alpha),$$

$$\Rightarrow \ \frac{x_{i+2}-\alpha}{x_{i+1}-\alpha} \approx \frac{x_{i+1}-\alpha}{x_i-\alpha} \ \Rightarrow \ \alpha \approx x_{i+2} - \frac{(x_{i+2}-x_{i+1})^2}{x_{i+2}-2x_{i+1}+x_i}.$$

2.10 Οι 10 πρώτες προσεγγίσεις που προκύπτουν από την εφαρμογή της επαναληπτικής μεθόδου, αρχίζοντας με $x_0 = 1.5$, είναι:

$$\begin{aligned} &x_1 = 1.28695377, \quad x_2 = 1.40254080, \quad x_3 = 1.34545838,\\ &x_4 = 1.37517025, \quad x_5 = 1.36009419, \quad x_6 = 1.36784697,\\ &x_7 = 1.36388700, \quad x_8 = 1.36591673, \quad x_9 = 1.36487822,\\ &x_{10} = 1.36541006. \end{aligned}$$

Η διαδικασία Aitken δίνει αντίστοιχα:

(i) $\widetilde{\alpha}_1 = 1.36499913$, (ii) $\widetilde{\alpha}_2 = 1.36516894$, (iii) $\widetilde{\alpha}_3 = 1.3652140899$.

Συνεπώς:

$$|\widetilde{\alpha}_1-\alpha| \approx 2.3\times10^{-4}, \quad |\widetilde{\alpha}_2-\alpha| \approx 6.1\times10^{-5}, \quad |\widetilde{\alpha}_3-\alpha| \approx 1.6\times10^{-5},$$

ενώ

$$|x_9-\alpha| \approx 3.5\times10^{-4} \ \text{ και } \ |x_{10}-\alpha| \approx 1.8\times10^{-4}.$$

2.11 Αργή σύγκλιση $\Rightarrow$ Η α έχει πολλαπλότητα $m > 1 \Rightarrow$ Η μέθοδος Newton συγκλίνει γραμμικά και (βλ. Άσκηση 2.7) για μεγάλες τιμές του i,

$$x_{i+1}-\alpha \approx (1-\frac{1}{m})(x_i-\alpha).$$

Έστω x_i, x_{i+1} και x_{i+2} τρεις διαδοχικές προσεγγίσεις της μεθόδου Newton. Τότε, η διαδικασία Aitken δίνει την καλύτερη προσέγγιση

$$\widetilde{\alpha} = x_{i+2} - \frac{(x_{i+2}-x_{i+1})^2}{x_{i+2}-2x_{i+1}+x_i}.$$

Από τα πιο πάνω,

$$(1-\frac{1}{m}) \approx \frac{x_{i+1}-\widetilde{\alpha}}{x_i-\widetilde{\alpha}} \quad \Rightarrow \quad m \approx \frac{x_i-\widetilde{\alpha}}{x_i-x_{i+1}} =: \widetilde{m}.$$

Επειδή $m \in \mathbb{N}$, η προσέγγιση $\widetilde{m}$ δίνει ουσιαστικά την πολλαπλότητα της α.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Επίλυση γραμμικών συστημάτων

3.1 Μέθοδος απαλοιφής Gauss

Θεωρούμε ένα $n \times n$ γραμμικό σύστημα

$$A\underline{x} = \underline{b},$$

όπου $A := (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n,n}$, με $\det A \neq 0$, και $\underline{b} := (b_i) \in \mathbb{R}^n$. Στόχος μας είναι ο υπολογισμός της μοναδικής λύσης $\underline{x} := (x_i) \in \mathbb{R}^n$ του συστήματος.

Το γραμμικό σύστημα (σε πλήρη μορφή) είναι:

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdot & \cdot & \cdot & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdot & \cdot & \cdot & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \cdot & & \cdot & & & & & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & & & & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & & & & & \cdot & & \cdot \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdot & \cdot & \cdot & + & a_{n,n}x_n & = & b_n \end{array}$$

Η μέθοδος απαλοιφής Gauss (Gauassian elimination) βασίζεται στη μετατροπή του συστήματος $A\underline{x} = \underline{b}$, με κατάλληλους ματασχηματισμούς γραμμών (όπως της εναλλαγής της σειράς δυο εξισώσεων και της πρόσθεσης κατά μέλη ενός πολλαπλασίου κάποιας εξίσωσης σε μια άλλη), σε ένα ισοδύναμο γραμμικό σύστημα $U\underline{x} = \hat{\underline{b}}$ όπου ο πίνακας $U \in \mathbb{R}^{n,n}$ είναι άνω τριγωνικός. Η ζητούμενη λύση $\underline{x}$ υπολογίζεται στη συνέχεια, από το άνω τριγωνικό σύστημα $U\underline{x} = \hat{\underline{b}}$, με τη μέθοδο της προς τα πίσω αντικατάστασης (backsubstitution).

Απλή απαλοιφή Gauss

Σε ό,τι ακολουθεί, υποθέτουμε ότι $a_{1,1} \neq 0$ και ότι οι ποσότητες

$$a_{k,k}^{(k)}, \quad k = 2, 3, \ldots, n-1,$$

που προκύπτουν κατά τη διαδικασία (και χρησιμοποιούνται ως παρανομαστές) είναι μη-μηδενικές. Επίσης, για την απλοποίηση των συμβολισμών, θέτουμε

$$A^{(1)} := A, \quad \text{δηλ.} \quad a_{i,j}^{(1)} := a_{i,j}, \ i,j = 1,2,\ldots,n,$$

και

$$\underline{b}^{(1)} := \underline{b}, \quad \text{δηλ.} \quad b_i^{(1)} := b_i, \ i = 1,2,\ldots,n.$$

Μέθοδος: Μηδενίστε τα στοιχεία του αρχικού συστήματος που βρίσκονται κάτω από τη διαγώνιο, αφαιρώντας (διαδοχικά) κατάλληλα πολλαπλάσια της εξίσωσης i, με $i = 1,2,\ldots,n-1$, από τις εξισώσεις $i+1, i+2, \ldots, n$.

Βήμα 1: Μηδενίστε τα στοιχεία της πρώτης στήλης, που βρίσκονται κάτω από το $a_{1,1}^{(1)}$, αφαιρώντας τα πολλαπλάσια

$$m_{i,1} := a_{i,1}^{(1)}/a_{1,1}^{(1)}, \quad i = 2,3,\ldots,n,$$

της πρώτης εξίσωσης από τις εξισώσεις $i = 2,3,\ldots,n$, αντίστοιχα. Το γραμμικό σύστημα που προκύπτει έχει τη μορφή

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_{1,1}^{(1)}x_1 & + & a_{1,2}^{(1)}x_2 & + & \cdot & \cdot & \cdot & + & a_{1,n}^{(1)}x_n & = & b_1^{(1)} \\
 & & a_{2,2}^{(2)}x_2 & + & \cdot & \cdot & \cdot & + & a_{2,n}^{(2)}x_n & = & b_2^{(2)} \\
 & & \cdot & & & & & & \cdot & & \cdot \\
 & & \cdot & & & & & & \cdot & & \cdot \\
 & & \cdot & & & & & & \cdot & & \cdot \\
 & & a_{n,2}^{(2)}x_2 & + & \cdot & \cdot & \cdot & + & a_{n,n}^{(2)}x_n & = & b_n^{(2)}
\end{array}$$

όπου

$$a_{i,j}^{(2)} = a_{i,j}^{(1)} - m_{i,1} \times a_{1,j}^{(1)}, \quad i,j = 2,3\ldots,n,$$

και

$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - m_{i,1} \times b_1^{(1)}, \quad i = 2,3,\ldots,n.$$

Βήμα 2: Μηδενίστε τα στοιχεία της δεύτερης στήλης, που βρίσκονται κάτω από το $a_{2,2}^{(2)}$, αφαιρώντας τα πολλαπλάσια

$$m_{i,2} := a_{i,2}^{(2)}/a_{2,2}^{(2)}, \quad i = 3,4,\ldots,n,$$

της δεύτερης εξίσωσης από τις εξισώσεις $i = 3,4,\ldots,n$ αντίστοιχα. Το γραμμικό σύστημα που προκύπτει έχει τη μορφή

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_{1,1}^{(1)}x_1 & + & a_{1,2}^{(1)}x_2 & + & a_{1,3}^{(1)}x_3 & + & \cdot & + & a_{1,n}^{(1)}x_n & = & b_1^{(1)} \\
 & & a_{2,2}^{(2)}x_2 & + & a_{2,3}^{(2)}x_3 & + & \cdot & + & a_{2,n}^{(2)}x_n & = & b_2^{(2)} \\
 & & & & a_{3,3}^{(3)}x_3 & + & \cdot & + & a_{3,n}^{(3)}x_n & = & b_3^{(3)} \\
 & & & & \cdot & & & & \cdot & & \cdot \\
 & & & & \cdot & & & & \cdot & & \cdot \\
 & & & & a_{n,3}^{(3)}x_3 & + & \cdot & + & a_{n,n}^{(3)}x_n & = & b_n^{(3)}
\end{array}$$

όπου

$$a_{i,j}^{(3)} = a_{i,j}^{(2)} - m_{i,2} \times a_{2,j}^{(2)}, \quad i,j = 3,4\ldots,n,$$

και

$$b_i^{(3)} = b_i^{(2)} - m_{i,2} \times b_2^{(2)}, \quad i = 3,4,\ldots,n.$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, ύστερα από $k-1$ βήματα το αρχικό σύστημα ανάγεται σε ένα ισοδύναμο σύστημα της μορφής

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_{1,1}^{(1)}x_1 & + & a_{1,2}^{(1)}x_2 & + & \cdot & + & a_{1,k}^{(1)}x_k & + & \cdot & + & a_{1,n}^{(1)}x_n & = & b_1^{(1)} \\
 & & a_{2,2}^{(2)}x_2 & + & \cdot & + & a_{2,k}^{(2)}x_k & + & \cdot & + & a_{2,n}^{(2)}x_n & = & b_2^{(2)} \\
 & & \cdot & & & & & & & & \cdot & & \cdot \\
 & & & & \cdot & & & & & & \cdot & & \cdot \\
 & & & & & \cdot & & & & & \cdot & & \cdot \\
 & & & & & & a_{k,k}^{(k)}x_k & + & \cdot & + & a_{k,n}^{(k)}x_n & = & b_k^{(k)} \\
 & & & & & & \cdot & & & & \cdot & & \cdot \\
 & & & & & & \cdot & & & & \cdot & & \cdot \\
 & & & & & & a_{n,k}^{(k)}x_k & + & \cdot & + & a_{n,n}^{(k)}x_n & = & b_n^{(k)}
\end{array}$$

Άρα , το γενικό βήμα k ($k = 1,2,\ldots,n-1$) είναι:

Βήμα k: Μηδενίστε τα στοιχεία της k στήλης, που βρίσκονται κάτω από το $a_{k,k}^{(k)}$, αφαιρώντας τα πολλαπλάσια

$$m_{i,k} := a_{i,k}^{(k)}/a_{k,k}^{(k)}, \quad i = k+1, k+2, \ldots, n,$$

της k εξίσωσης από τις εξισώσεις $i = k+1, k+2, \ldots, n$ αντίστοιχα. Τα νέα στοιχεία, στις θέσεις με δείκτες $i,j = k+1, k+2, \ldots, n$, δίνονται από τις σχέσεις

$$a_{i,j}^{(k+1)} = a_{i,j}^{(k)} - m_{i,k} \times a_{k,j}^{(k)}, \quad i,j = k+1, k+2\ldots,n,$$

και

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - m_{i,k} \times b_k^{(k)}, \quad i = k+1, k+2, \ldots, n.$$

Συνεπώς, ύστερα από $n-1$ βήματα το αρχικό σύστημα ανάγεται σε ένα άνω τριγωνικό σύστημα της μορφής

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_{1,1}^{(1)}x_1 & + & a_{1,2}^{(1)}x_2 & + & \cdot & + & a_{1,n-1}^{(1)}x_{n-1} & + & a_{1,n}^{(1)}x_n & = & b_1^{(1)} \\
 & & a_{2,2}^{(2)}x_2 & + & \cdot & + & a_{2,n-1}^{(2)}x_{n-1} & + & a_{2,n}^{(2)}x_n & = & b_2^{(2)} \\
 & & \cdot & & & & & & \cdot & & \cdot \\
 & & & & \cdot & & & & \cdot & & \cdot \\
 & & & & & \cdot & & & \cdot & & \cdot \\
 & & & & & & a_{n-1,n-1}^{(n-1)}x_{n-1} & + & a_{n-1,n}^{(n-1)}x_n & = & b_{n-1}^{(n-1)} \\
 & & & & & & & & a_{n,n}^{(n)}x_n & = & b_n^{(n)}
\end{array}$$

Σημείωση: Η εξίσωση

$$a_{k,k}^{(k)}x_k + \cdots + a_{k,n}^{(k)}x_n = b_k^{(k)},$$

που χρησιμοποιείται στο k-βήμα ($k = 1, 2, \ldots, n-1$) για το μηδενισμό των στοιχείων $a_{i,k}^{(k)}$, $i = k+1, k+2, \ldots, n$, ονόμάζεται "οδηγός εξίσωση" (pivotal equation). Επίσης το διαγώνιο στοιχείο $a_{k,k}^{(k)}$, της k οδηγού εξίσωσης, ονομάζεται "το οδηγό στοιχείο" ή "ο οδηγός" (pivot) του k-βήματος.

Αλγόριθμος απαλοιφής Gauss

Σε κάθε βήμα k, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, τα νέα στοιχεία $a_{i,j}^{(k+1)}$ και $b_i^{(k+1)}$, $i, j = k+1, k+2, \ldots, n$, αποθηκεύονται στις θέσεις των αντίστοιχων στοιχείων $a_{i,j}$, b_i του αρχικού πίνακα A και αρχικού διανύσματος $\underline{b}$. Επίσης, οι πολλαπλασιαστές $m_{i,k}$, $i = k+1, k+2, \ldots, n$, αποθηκεύονται στις θέσεις των στοιχείων $a_{i,k}$, $i = k+1, k+2, \ldots, n$, του αρχικού πίνακα, τα οποία μηδενίζονται και δεν χρησιμοποιούνται σε επόμενα βήματα. $\Rightarrow$ Ο αλγόριθμος είναι:

```
for k = 1(1)n − 1
    for i = k + 1(1)n
    a_{i,k} = a_{i,k}/a_{k,k}
        for j = k + 1(1)n
        a_{i,j} = a_{i,j} − a_{i,k} a_{k,j}
        repeat
    b_i = b_i − a_{i,k} b_k
    repeat
repeat
```

$\Rightarrow$ Στο τέλος της διαδικασίας, ο αρχικός πίνακας A περιέχει τους πολλαπλασιαστές στο αυστηρά κάτω τριγωνικό του μέρος και τα νέα στοιχεία $a_{i,j}$, $i \leq j$, του τελικού άνω τριγωνικού πίνακα, στο άνω τριγωνικό του μέρος.

3.2 Προς τα πίσω αντικατάσταση για άνω τριγωνικά συστήματα

Θεωρούμε το $n \times n$ άνω τριγωνικό γραμμικό σύστημα

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdot & \cdot & \cdot & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\
 & & a_{2,2}x_2 & + & \cdot & \cdot & \cdot & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\
 & & \cdot & & & & & & \cdot & & \cdot \\
 & & & & a_{i,i}x_i & + & \cdot & + & a_{i,n}x_n & = & b_i \\
 & & & & & \cdot & & & \cdot & & \cdot \\
 & & & & & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\
 & & & & & & & \cdot & \cdot & & \cdot \\
 & & & & & & & & a_{n,n}x_n & = & b_n
\end{array}
$$

Στη μέθοδο της προς τα πίσω αντικατάστασης τα στοιχεία x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, της λύσης $\underline{x}$ υπολογίζονται, σε αντίστροφη σειρά (χρησιμοποιώντας διαδοχικά τις εξισώσιες $n, n-1, \ldots, 1$), από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} x_n &= b_n / a_{n,n}, \\ x_{n-1} &= \frac{1}{a_{n-1,n-1}} \{b_{n-1} - a_{n-1,n} x_n\}, \\ x_{n-2} &= \frac{1}{a_{n-2,n-2}} \{b_{n-2} - a_{n-2,n-1} x_{n-1} - a_{n-2,n} x_n\}, \end{aligned}$$

κ.ο.κ. Δηλαδή, η λύση του συστήματος υπολογίζεται από τις σχέσεις,

$$\begin{aligned} x_n &= b_n / a_{n,n}, \\ x_i &= \frac{1}{a_{i,i}} \{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} x_j\}, \quad i = n-1, n-2, \ldots, 1. \end{aligned}$$

Στην πράξη τα στοιχεία x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, της λύσης αποθηκεύονται αντίστοιχα στις θέσεις των στοιχείων b_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, του διανύσματος $\underline{b}$. $\Rightarrow$ Ο αλγόριθμος είναι:

$$b_n = b_n / a_{n,n}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{for } i = (n-1)(-1)1 \\ \left[\begin{array}{l} \text{for } j = (i+1)(1)n \\ b_i = b_i - a_{i,j} b_j \\ \text{repeat} \end{array}\right. \\ b_i = b_i / a_{i,i} \\ \text{repeat} \end{array}\right.$$

3.3 Απαλοιφή Gauss με μερική οδήγηση

Στο k βήμα ($k = 1, 2, \ldots, n-1$) της διαδικασίας απαλοιφής επιλέγουμε την οδηγό γραμμή και το οδηγό στοιχείο ως εξής:

- Συγκρίνουμε τις απόλυτες τιμές των στοιχείων $a_{i,k}$, $i = k, k+1, \ldots, n$, και προσδιορίζουμε το στοιχείο με τη μέγιστη απόλυτη τιμή.
- Αν

$$\max_{k \le i \le n} |a_{i,k}| = |a_{l,k}|, \quad \text{με} \quad l \neq k,$$

  τότε ανταλλάσσουμε τις γραμμές k και l και εκτελούμε την απαλοιφή χρησιμοποιώντας ως οδηγούς τη γραμμή l (αντί της k) και το στοιχείο $a_{l,k}$ (αντί του $a_{k,k}$).

Με τον τρόπο αυτό όλοι οι πολλαπλασιαστές που χρησιμοποιούνται στη διαδικασία απαλοιφής είναι ≤ 1.

Στον υπολογιστή, η διαδικασία οδήγησης εφαρμόζεται ως εξής:

- Ορίζουμε ένα "διάνυσμα διάταξης"
$$\underline{p} = [p_1, p_n, \ldots, p_n]^T, \quad \text{με} \quad p_i \in \mathbb{N}.$$
- Στον αλγόριθμο απαλοιφής, αντικαθιστούμε κάθε δείκτη γραμμής i, των στοιχείων του πίνακα A και του διανύσματος $\underline{b}$, με p_i.
- Αρχικά θέτουμε
$$p_i = i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$
- Αν το k βήμα απαιτεί την ανταλλαγή k-γραμμή $\leftrightarrow$ l-γραμμή, τότε ανταλάσσουμε τα περιοεχόμενα των στοιχείων p_k και p_l, δηλαδή εκτελούμε την ανταλλαγή
$$r = p_l, \quad p_l = p_k, \quad p_k = r.$$

$\Rightarrow$ Ο αλγόριθμος μερικής οδήγησης είναι:

$$p_i = i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\left[\begin{array}{l}
\text{for } k = 1(1)n-1 \\
\max = |a_{p_k,k}| \\
\left[\begin{array}{l}
\text{for } i = k+1(1)n \\
\text{If } \max < |a_{p_i,k}|, \text{ let } l = i \text{ and } \max = |a_{p_l,k}| \\
\text{repeat}
\end{array}\right. \\
r = p_l, \quad p_l = p_k, \quad p_k = r \\
\left[\begin{array}{l}
\text{for } i = k+1(1)n \\
a_{p_i,k} = a_{p_i,k}/a_{p_k,k} \\
\left[\begin{array}{l}
\text{for } j = k+1(1)n \\
a_{p_i,j} = a_{p_i,j} - a_{p_i,k}a_{p_k,j} \\
\text{repeat}
\end{array}\right. \\
b_{p_i} = b_{p_i} - a_{p_i,k}b_{p_k} \\
\text{repeat}
\end{array}\right. \\
\text{repeat}
\end{array}\right.$$

Ασκήσεις

3.1 Έστω $M_k \in \mathbb{R}^{n,n}$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ $n-1$ πίνακες της μορφής
$$M_k = I - \underline{\mu}_k \underline{e}_k^T,$$
όπου $I \in \mathbb{R}^{n,n}$ είναι ο μοναδιαίος πίνακας, $\underline{e}_k \in \mathbb{R}^n$ η k στήλη του I και $\underline{\mu}_k \in \mathbb{R}^n$ ένα διάνυσμα της μορφής
$$\underline{\mu}_k = [\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{k}, m_{k+1,k}, m_{k+2,k}, \ldots, m_{n,k}]^T, \quad \text{με} \quad m_{i,k} \in \mathbb{R}, \ k+1 \le i \le n.$$

Δείξτε τα πιο κάτω:

(i) Αν $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ και $R_i(A) \equiv i$ γραμμή του A, τότε

$$R_i(M_k A) = \begin{cases} R_i(A), & 1 \le i \le k, \\ R_i(A) - m_{i,k} R_k(A), & k+1 \le i \le n. \end{cases}$$

(ii) $M_k^{-1} = I + \underline{\mu}_k \underline{e}_k^T$.

(iii) $M_1^{-1} M_2^{-1} \cdots M_{n-1}^{-1} = L$, όπου $L \in \mathbb{R}^{n,n}$ είναι ο μοναδιαίος κάτω τριγωνικός πίνακας

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ m_{2,1} & 1 & & & \\ \cdot & \cdot & 1 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \cdot & m_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}.$$

3.2 Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα της Άσκησης 3.1, δείξτε ότι η εφαρμογή της απλής μεθόδου απαλοιφής Gauss σε ένα πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ οδηγεί σε ένα άνω τριγωνικό πίνακα U και ένα μοναδιαίο κάτω τριγωνικό πίνακα L τέτοιους ώστε $A = LU$.

3.3 Βρείτε την LU-παραγοντοποίηση του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & 8 & -2 & 1 \\ 8 & 5 & 12 & 0 \\ 0 & 7 & 10 & 18 \end{bmatrix}$$

και στη συνέχεια υπολογίστε την τιμή της $\det A$.

3.4 Έστω $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ένας αντιστρέψιμος κάτω τριγωνικός πίνακας και $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$. Γράψτε ένα αλγόριθμο για την επίλυση του γραμμικού συστήματος $A\underline{x} = \underline{b}$ με τη μέθοδο της προς τα εμπρός αντικατάστασης.

3.5 Ο τριδιαγώνιος πίνακας του γραμμικού συστήματος

$$\begin{bmatrix} d_1 & c_2 & & & & \\ a_2 & d_2 & c_3 & & & \\ & a_3 & d_3 & c_4 & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot & c_n \\ & & & & a_n & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix},$$

έχει την LU παραγοντοποίηση

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ l_2 & 1 & & & & \\ & l_3 & 1 & & & \\ & & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \\ & & & & l_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & c_2 & & & & \\ & u_2 & c_3 & & & \\ & & u_3 & c_4 & & \\ & & & \cdot & \cdot & \\ & & & & \cdot & c_n \\ & & & & & u_n \end{bmatrix} =: LU,$$

η οποία υποθέτουμε ότι μπορεί να προσδιοριστεί χωρίς οδήγηση. Γράψτε ένα αλγόριθμο για τον προσδιορισμό των αγνώστων στοιχείων των πινάκων L και U και της λύσης του γραμμικού συστήματος.

3.6 Έστω $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n,n}$, με $\det A \neq 0$, και

$$A_k = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1,k} \\ a_{2,1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2,k} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ a_{k,1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{k,k} \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

οι κύριοι υποπίνακες του A. Δείξτε ότι αν $\exists$ πίνακες $L, U, D \in \mathbb{R}^{n,n}$ (όπου οι L και U είναι μοναδιαίοι κάτω και άνω τριγωνικοί αντίστοιχα, και $D = \mathrm{diag}(d_i)$) τέτοιοι ώστε

$$A = LDU,$$

τότε

$$d_1 = a_{1,1} \quad \text{και} \quad d_k = \det A_k / \det A_{k-1}, \; k = 2, 3, \ldots, n.$$

Δείξτε επίσης ότι αν, επιπρόσθετα, ο A είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, τότε η παραγοντοποίηση LDU μπορεί να εκφραστεί στη μορφή Cholesky

$$A = \widehat{L}\widehat{L}^T$$

όπου ο $\widehat{L} \in \mathbb{R}^{n,n}$ είναι κάτω τριγωνικός. (**Υπόδειξη:** Μπορείτε να υποθέσετε ότι αν ο A είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, τότε $\det A_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$.)

3.7 Βρείτε την Cholesky παραγοντοποίηση του συμμετρικού και θετικά ορισμένου πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 6 & -2 \\ 0 & 6 & 10 & -4 \\ 0 & -2 & -4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Στη συνέχεια βρείτε την τιμή της $\det A$ και την πρώτη στήλη του A^{-1}.

3.8 (i) Εστω $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε $\underline{v}^T\underline{u} \neq -1$, $I \in \mathbb{R}^{n,n}$ ο μοναδιαίος πίνακας, και $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ ο πίνακας $P = I + \underline{u}\underline{v}^T$. Δείξτε ότι ο P^{-1} είναι της μορφής

$$P^{-1} = I + \alpha\underline{u}\underline{v}^T, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

και προσδιορίστε το α.

(ii) Έστω $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ και $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, με $\det A \neq 0$. Δείξτε ότι αν $1 + \underline{y}^T A^{-1}\underline{x} \neq 0$, τότε

$$(A + \underline{x}\underline{y}^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}\underline{x}\underline{y}^T A^{-1}}{1 + \underline{y}^T A^{-1}\underline{x}}.$$

(iii) Έστω $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{4,4}$ ένας αντιστρέψιμος πίνακας και $B \in R^{4,4}$ ο πίνακας που προκύπτει προσθέτοντας 1 στο στοιχείο $a_{1,1}$ του A. Αν η πρώτη γραμμή και η πρώτη στήλη του A^{-1} είναι $[1, -1, 0, 2]$ και $[1, -2, 1, 3]^T$ αντίστοιχα, βρείτε την πρώτη γραμμή και την πρώτη στήλη του B^{-1}.

3.9 Δείξτε ότι η επίλυση ενός $n \times n$ μιγαδικού γραμμικού συστήματος της μορφής

$$(P + iQ)(\underline{x} + i\underline{y}) = \underline{b} + i\underline{c},$$

όπου $P, Q \in \mathbb{R}^{n,n}$ και $\underline{b}, \underline{c}, \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$, μπορεί να αναχθεί στην επίλυση ενός $2n \times 2n$ πραγματικού γραμμικού συστήματος $A\underline{\chi} = \underline{\beta}$.

Έστω C ο 2×2 μιγαδικός πίνακας

$$C = \begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ -2 & -1+i \end{bmatrix}.$$

Προσδιορίστε την LU-παραγοντοποίηση του αντίστοιχου 4×4 πραγματικού πίνακα A και στη συνέχεια βρείτε την πρώτη στήλη του C^{-1}.

3.10 Βρείτε (χρησιμποιώντας τη μέθοδο Cholesky) τη λύση ελαχίστων τετραγώνων του υπερκαθορισμένου γραμμικού συστήματος

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & -1 \end{array}$$

Λύσεις Ασκήσεων

3.1 Παρατηρούμε ότι $\underline{e}_k^T A = R_k(A)$ και $\underline{e}_r^T \underline{\mu}_s = 0$, για $r \le s$.
(i)

$$M_k A = A - \underline{\mu}_k \underline{e}_k^T A = A - \underline{\mu}_k R_k(A).$$

$\Rightarrow$

$$R_i(M_k A) = \begin{cases} R_i(A), & 1 \le i \le k, \\ R_i(A) - m_{i,k} R_k(A), & k+1 \le i \le n. \end{cases}$$

(ii)

$$(I + \underline{\mu}_k \underline{e}_k^T)(I - \underline{\mu}_k \underline{e}_k^T) = I - \underline{\mu}_k \underline{e}_k^T \underline{\mu}_k \underline{e}_k^T = I,$$

επειδή $\underline{e}_k^T \underline{\mu}_k = 0$. $\Rightarrow M_k^{-1} = I + \underline{\mu}_k \underline{e}_k^T$
(iii) Επαγωγική απόδειξη:

$$\begin{aligned} M_1^{-1} M_2^{-1} &= (I + \underline{\mu}_1 \underline{e}_1^T)(I + \underline{\mu}_2 \underline{e}_2^T) \\ &= I + \underline{\mu}_1 \underline{e}_1^T + \underline{\mu}_2 \underline{e}_2^T + \underline{\mu}_1 \underline{e}_1^T \underline{\mu}_2 \underline{e}_2^T \\ &= I + \sum_{i=1}^{2} \underline{\mu}_i \underline{e}_i^T, \end{aligned}$$

επειδή $\underline{e}_1^T \underline{\mu}_2 = 0$.

Υποθέτουμε ότι $M_1^{-1} M_2^{-1} \cdots M_k^{-1} = I + \sum_{i=1}^{k} \underline{\mu}_i \underline{e}_i^T$. Τότε

$$\begin{aligned} M_1^{-1} M_2^{-1} \cdots M_k^{-1} M_{k+1}^{-1} &= (I + \sum_{i=1}^{k} \underline{\mu}_i \underline{e}_i^T)(I + \underline{\mu}_{k+1} \underline{e}_{k+1}^T) \\ &= I + \sum_{i=1}^{k+1} \underline{\mu}_i \underline{e}_i^T + \sum_{i=1}^{k} \underline{\mu}_i \underline{e}_i^T \underline{\mu}_{k+1} \underline{e}_{k+1}^T \\ &= I + \sum_{i=1}^{k+1} \underline{\mu}_i \underline{e}_i^T, \end{aligned}$$

επειδή $\underline{e}_i^T \underline{\mu}_{k+1} = 0$, για $i \le k$. Συνεπώς,

$$M_1^{-1} M_2^{-1} \cdots M_{n-1}^{-1} = L,$$

όπου

$$L = I + \sum_{i=1}^{n-1} \underline{\mu}_i \underline{e}_i^T = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ m_{2,1} & 1 & & & \\ \cdot & \cdot & 1 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \cdot & m_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}.$$

3.2 Έστω $A^{(k)}$ ο πίνακας που προκύπτει μετά την εφαρμογή και του $k-1$ βήματος της απλής απλοιφής Gauss. Τότε, από το αποτέλεσμα (i) της Άσκησης 3.1, το k βήμα της απαλοιφής μπορεί να εκφραστεί σε μορφή πινάκων ως

$$M_k A^{(k)} = A^{(k+1)}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

όπου τα στοιχεία $m_{i,k}$, $i = k+1, k+2, \ldots, n$, του πίνακα M_k είναι οι πολλαπλασιαστές

$$m_{i,k} = a_{i,k}^{(k)} / a_{k,k}^{(k)}, \quad i = k+1, k+2, \ldots, n.$$

$\Rightarrow$ Σε μορφή πινάκων η διαδικασία απαλοιφής είναι

$$M_{n-1} M_{n-2} \cdots M_1 A = U,$$

όπου U είναι ο τελικός άνω τριγωνικός πίνακας. $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} A &= (M_{n-1} M_{n-2} \cdots M_1)^{-1} U \\ &= M_1^{-1} M_2^{-1} \cdots M_{n-1}^{-1} U. \end{aligned}$$

Άρα, από το αποτέλεσμα (iii) της Άσκησης 3.1, $A = LU$.

3.3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{bmatrix} =: LU.$$

$\Rightarrow$

$$\det A = \det L \det U = \det U = 4 \times 7 \times 11 \times 18 = 5544.$$

3.4 Το κάτω τριγωνικό σύστημα είναι

$$\begin{array}{lllllllll} a_{1,1}x_1 & & & & & & & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & & & & & = & b_2 \\ \cdot & & \cdot & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & & & & & \cdot \\ a_{i,1}x_1 & + & a_{i,2}x_2 & + & \cdot & + & a_{i,i}x_i & = & b_i \\ \cdot & & & & & & \cdot & & \cdot \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & + & a_{n,n}x_n & = & b_n \end{array}$$

Στη μέθοδο της προς τα εμπρός αντικατάστασης τα στοιχεία x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, της λύσης $\underline{x}$, υπολογίζονται (χρησιμοποιώντας διαδοχικά τις εξισώσεις $1, 2, \ldots, n$), από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1 / a_{1,1} \\ x_i &= \frac{1}{a_{i,i}} \{ b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} x_j \}, \quad i = 2, 3, \ldots, n. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Αλγόριθμος (τα στοιχεία x_i αποθηκέυονται στις θέσεις των στοιχείων b_i του διανύσματος $\underline{b}$):

$$b_1 = b_1/a_{1,1}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{for } i = 2(1)n \\ \left[\begin{array}{l} \text{for } j = 1(1)i-1 \\ b_i = b_i - a_{i,j}b_j \\ \text{repeat} \end{array}\right. \\ b_i = b_i/a_{i,i} \\ \text{repeat} \end{array}\right.$$

3.5 $A = LU \Rightarrow$ Εξισώνοντας συντελεστές:

$$u_1 = d_1, \;\; l_i u_{i-1} = a_i \;\; \text{και} \;\; l_i c_i + u_i = d_i, \; i = 2, 3, \ldots, n.$$

$\Rightarrow$

$$u_1 = d_1, \;\; l_i = a_i/u_{i-1} \;\; \text{και} \;\; u_i = d_i - l_i c_i, \; i = 2, 3, \ldots, n.$$

$\Rightarrow$ Αλγόριθμος παραγοντοποίησης (τα στοιχεία l_i του L και u_i του U αποθηκεύονται αντίστοιχα στις θέσεις των στοιχείων a_i και d_i του A):

$$\left[\begin{array}{l} \text{for } i = 2(1)n \\ a_i = a_i/d_{i-1} \\ d_i = d_i - a_i c_i \\ \text{repeat} \end{array}\right.$$

Για την επίλυση του $LU\underline{x} = \underline{b}$ υπολογίζουμε: (i) τη λύση $\underline{y}$ του $L\underline{y} = \underline{b}$ με τη μέθοδο της προς τα εμπρός αντικατάστασης, και (ii) τη λύση $\underline{x}$ του $U\underline{x} = \underline{y}$ με τη μέθοδο της προς τα πίσω αντικατάστασης. $\Rightarrow$ (i) Προς τα εμπρός αντικατάσταση: $y_1 = b_1$ και $y_i = b_i - l_i y_{i-1}$, $i = 2, 3, \ldots, n$. (ii) Προς τα πίσω αντικατάσταση: $x_n = y_n/u_n$ και $x_i = (y_i - c_{i+1}x_{i+1})/u_i$, $i = n-1, n-2, \ldots, 1$. Τόσο τα στοιχεία y_i όσο και τα στοιχεία x_i μπορούν να αποθηκευτούν στις θέσεις των στοιχείων b_i του $\underline{b}$. $\Rightarrow$ Οι αλγόριθμοι για τις προς τα εμπρός και προς τα πίσω αντικαταστάσεις είναι αντίστοιχα:

$$\left[\begin{array}{l} \text{for } i = 2(1)n \\ b_i = b_i - a_i b_{i-1} \\ \text{repeat} \end{array}\right.$$

και

$$b_n = b_n/d_n$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{for } i = (n-1)(-1)1 \\ b_i = (b_i - c_{i+1}b_{i+1})/d_i \\ \text{repeat} \end{array}\right.$$

3.6 Έστω L_k, D_k και U_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, οι κύριοι υποπίνακες των L, D και U αντίστοιχα. Τότε $A_k = L_k D_k U_k$ και (επειδή $\det L_k = \det U_k = 1$)

$$\det A_k = \det D_k = d_1 d_2 \cdots d_{k-1} d_k = d_k \times \det A_{k-1}, \quad 1 < k \leq n.$$

$\Rightarrow$

$$d_1 = a_{1,1} \ \text{ και } \ d_k = \det A_k / det A_{k-1}, \quad k = 2, 3, \ldots, n.$$

Ο A είναι συμμετρικός $\Rightarrow A = A^T \Rightarrow$

$$LDU = U^T D L^T,$$

όπου $U^T \equiv$ μοναδιαίος κάτω τριγωνικός και $L^T \equiv$ μοναδιαίος άνω τριγωνικός. $\Rightarrow$ (Μοναδικότητα της LU-παραγοντοποίησης) $U = L^T$ (και $L = U^T$) $\Rightarrow$

$$A = LDL^T = LD^{1/2} D^{1/2} L^T = (LD^{1/2})(LD^{1/2})^T = \widehat{L}\widehat{L}^T,$$

όπου $\widehat{L} = LD^{1/2} \equiv$ κάτω τριγωνικός.

Ο A είναι θετικά ορισμένος $\Rightarrow \det A_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$. $\Rightarrow d_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$. $\Rightarrow$ Ο διαγώνιος πίνακας D είναι πραγματικός. $\Rightarrow$ Ο κάτω τριγωνικός πίνακας $\widehat{L}$ είναι πραγματικός.

3.7 $A = LL^T$, όπου

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$\Rightarrow \det A = \det L \det L^T = (1 \times 2 \times 1 \times 2)^2 = 16.$

Έστω $\underline{x}$ η πρώτη στήλη του A^{-1}. Τότε $LL^T \underline{x} = \underline{e}_1$, όπου $\underline{e}_1 = [1, 0, 0, 0]^T$. $\Rightarrow$ Για τον προσδιορισμό του $\underline{x}$: (i) από το $L\underline{y} = \underline{e}_1$, με προς τα εμπρός αντικατάσταση, $\underline{y} = [1, -1, 3, 1]^T$, και (ii) από το $L^T \underline{x} = \underline{y}$, με προς τα πίσω αντικατάσταση, $\underline{x} = [12, -11/12, 7/2, 1/2]^T$.

3.8 **(i)** Για να είναι $P^{-1} = I + \alpha \underline{u}\underline{v}^T$ πρέπει

$$\begin{aligned}
& (I + \underline{u}\underline{v}^T)(I + \alpha \underline{u}\underline{v}^T) = I \\
\Rightarrow \quad & I + \underline{u}\underline{v}^T + \alpha \underline{u}\underline{v}^T + \alpha \underline{u}\underline{v}^T \underline{u}\underline{v}^T = I \\
\Rightarrow \quad & [\alpha(1 + \underline{v}^T \underline{u}) + 1]\underline{u}\underline{v}^T = \mathcal{O} \\
\Rightarrow \quad & \alpha = -1/(1 + \underline{v}^T \underline{u}).
\end{aligned}$$

Συνεπώς

$$(I + \underline{u}\underline{v}^T)^{-1} = I - \underline{u}\underline{v}^T / (1 + \underline{v}^T \underline{u}).$$

(ii) $A + \underline{x}\underline{y}^T = A(I + A^{-1}\underline{x}\underline{y}^T) \Rightarrow (A + \underline{x}\underline{y}^T)^{-1} = (I + A^{-1}\underline{x}\underline{y}^T)^{-1} A^{-1}$. $\Rightarrow$ Από το (i) με $\underline{u} = A^{-1}\underline{x}$ και $\underline{v} = \underline{y}$,

$$(I + A^{-1}\underline{x}\underline{y}^T)^{-1} = I - \frac{A^{-1}\underline{x}\underline{y}^T}{1 + \underline{y}^T A^{-1} \underline{x}}$$

$$\Rightarrow \qquad (A + \underline{x}\underline{y}^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}\underline{x}\underline{y}^T A^{-1}}{1 + \underline{y}^T A^{-1}\underline{x}}.$$

(iii) $B = A + \underline{e}_1\underline{e}_1^T$, όπου $\underline{e}_1 = [1, 0, 0, 0]^T$. $\Rightarrow$ Από το (ii),

$$\begin{aligned} B^{-1} &= A^{-1} - \frac{A^{-1}\underline{e}_1\underline{e}_1^T A^{-1}}{1 + \underline{e}_1^T A^{-1}\underline{e}_1} \\ &= A^{-1} - \beta C_1(A^{-1})R_1(A^{-1}), \end{aligned}$$

όπου $R_1(A^{-1}) \equiv$ η πρώτη γραμμή του A^{-1}, $C_1(A^{-1}) \equiv$ η πρώτη στήλη του A^{-1} και $\beta = (1 + \underline{e}_1^T A^{-1}\underline{e}_1)^{-1} = (1 + \underline{e}_1^T C_1(A^{-1}))^{-1} = 1/2$. $\Rightarrow$

$$B^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$\Rightarrow$

$$R_1(B^{-1}) = R_1(A^{-1}) - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

και

$$C_1(B^{-1}) = C_1(A^{-1}) - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

3.9 $(P + iQ)(\underline{x} + i\underline{y}) = \underline{b} + i\underline{c} \Rightarrow P\underline{x} - Q\underline{y} = \underline{b}$ και $Q\underline{x} + P\underline{y} = \underline{c} \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} P & -Q \\ Q & P \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{b} \\ \underline{c} \end{bmatrix},$$

$\Rightarrow A\underline{\chi} = \underline{\beta}$ όπου $A \in \mathbb{R}^{2n,2n}$ είναι ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} P & -Q \\ Q & P \end{bmatrix},$$

και $\underline{\beta}, \underline{\chi} \in \mathbb{R}^{2n}$ τα διανύσματα

$$\begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{bmatrix} \; kai \; \begin{bmatrix} \underline{b} \\ \underline{c} \end{bmatrix}.$$

Ο 4×4 πίνακας A που αντιστοιχεί στον C είναι

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

$\Rightarrow A = LU$, όπου

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Έστω

$$\underline{z} = \begin{bmatrix} x_1 + iy_1 \\ x_2 + iy_2 \end{bmatrix}$$

η πρώτη στήλη του C^{-1}. Τότε

$$C\underline{z} = \begin{bmatrix} 1 + i0 \\ 0 + i0 \end{bmatrix}.$$

$\Rightarrow A\underline{\chi} = \underline{\beta}$, όπου $\underline{\chi} = [x_1, x_2, y_1, y_2]^T$ και $\underline{\beta} = [1, 0, 0, 0]^T$. $\Rightarrow$ Εφαρμόζοντας προς τα εμπρός και προς τα πίσω αντικαταστάσεις στο σύστημα $LU\underline{\chi} = \underline{\beta}$ βρίσκουμε ότι $\underline{\chi} = [-0.5, 0, -0.5, 1]^T$. $\Rightarrow$ Η πρώτη στήλη του πίνακα C^{-1} είναι

$$\begin{bmatrix} -0.5(1+i) \\ i \end{bmatrix}.$$

3.8 Η λύση ελαχίστων τετραγώνων είναι η λύση $\underline{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$ των κανονικών εξισώσεων $A^T A\underline{x} = A^T \underline{b}$, όπου A είναι ο 4×3 πίνακας του υπερκαθορισμένου γραμμικού συστήματος και $\underline{b} = [1, 3, 3, -1]^T$. $\Rightarrow$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 2 & 10 & 7 \\ 8 & 7 & 18 \end{bmatrix} =: B \quad \text{και} \quad A^T \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ 4 \end{bmatrix} =: \underline{\beta}.$$

$\Rightarrow B = LL^T$, όπου

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\Rightarrow$ Εφαρμόζοντας προς τα εμπρός και προς τα πίσω αντικαταστάσεις στο σύστημα $LL^T\underline{x} = \underline{\beta}$, βρίσκουμε ότι $\underline{x} = [-2/3, 4/3, 0]^T \Rightarrow$ Η λύση ελαχίστων τετραγώνων είναι $x_1 = -2/3$, $x_2 = 4/3$ και $x_3 = 0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Πολυωνυμική παρεμβολή και αριθμητική ολοκλήρωση

4.1 Παρεμβολή κατά Lagrange

Έστω $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $n+1$ διακεκριμένα σημεία σε κάποιο διάστημα $[a, b]$. Τότε η διαδικασία παρεμβολής κατά Lagrange αφορά στον προσδιορισμό ενός πολυωνύμου του οποίου οι τιμές στα σημεία $x_i,\ i = 0, 1, \ldots, n$, συμπίπτουν αντίστοιχα με τις τιμές $y(x_i),\ i = 0, 1, \ldots, n$, μιας συνάρτησης y ορισμένης στο $[a, b]$.

Θεώρημα 4.1 (Ύπαρξη και μοναδικότητα.) *Έστω y μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα $[a, b]$ και $x_i,\ i = 0, 1, \ldots, n$, $n+1$ διακεκριμένα σημεία στο $[a, b]$. Τότε $\exists$ ένα μοναδικό πολυώνυμο $p_n \in \mathbb{P}_n$ τέτοιο ώστε*

$$p_n(x_i) = y(x_i),\ i = 0, 1, \ldots, n.$$

Παρατήρηση 4.1 (Αναπαράσταση του πολυωνύμου p_n.) Το πολυώνυμο p_n μπορεί να εκφραστεί στις ακόλουθες δυο μορφές:

(i) Μορφή Lagrange ή Θεμελιώδη Μορφή:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) y(x_i), \tag{4.1}$$

όπου

$$l_i(x) = \prod_{j=0\ (j \neq i)}^{n} [(x - x_j)/(x_i - x_j)] \tag{4.2}$$

είναι οι συντελεστές παρεμβολής Lagrange.

(ii) Μορφή Newton:

$$\begin{aligned} p_n(x) \quad = \quad & y(x_0) + y[x_0, x_1](x - x_0) + y[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ & + \ldots + y[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}), \end{aligned} \tag{4.3}$$

όπου $y[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ είναι η διηρημένη διαφορά k-τάξεως της y στα σημεία $x_0, x_1, \ldots x_k$. Δηλαδή

$$y[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \sum_{i=0}^{k} \{ \frac{y(x_i)}{(x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_k)} \}. \tag{4.4}$$

Η $y[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ μπορεί επίσης να ορισθεί συναρτήσει διηρημένων διαφορών $(k-1)$-τάξεως από τον αναδρομικό τύπο

$$y[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{1}{x_k - x_0} \{ y[x_1, x_2, \ldots, x_k] - y[x_0, x_1, \ldots x_{k-1}] \}. \tag{4.5}$$

Θεώρημα 4.2 (Σφάλμα παρεμβολής.) *Έστω p_n το πολυώνυμο παρεμβολής μιάς συνάρτησης y στα $n+1$ σημεία*

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Αν $y \in C^{n+1}[a, b]$, τότε $\forall x \in [a, b]$, $\exists\ \xi = \xi(x) \in [a, b]$ τέτοιο ώστε

$$y(x) - p_n(x) = \frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

4.2 Παρεμβολή κατά Hermite

Έστω $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $n+1$ διακεκριμένα σημεία σε κάποιο διάστημα $[a, b]$. Τότε, στη βασική της μορφή, η διαδικασία παρεμβολής κατά Hermite αφορά στον προσδιορισμό ενός πολυωνύμου του οποίου: (i) οι τιμές στα σημεία x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, συμπίπτουν αντίστοιχα με τις τιμές $y(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, μιας συνάρτησης $y \in C^1[a, b]$, και (ii) οι τιμές της πρώτης παραγώγου του στα σημεία x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, συμπίπτουν αντίστοιχα με τις τιμές $y^{(1)}(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, της πρώτης παραγώγου της y.

Θεώρημα 4.3 (Ύπαρξη και μοναδικότητα.) *Έστω $y \in C^1[a, b]$ και x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, $n+1$ διακεκριμένα σημεία του $[a, b]$. Τότε $\exists$ ένα μοναδικό πολυώνυμο $H_{2n+1} \in \mathbb{P}_{2n+1}$ τέτοιο ώστε*

$$H_{2n+1}(x_i) = y(x_i), \quad H_{2n+1}^{(1)}(x_i) = y^{(1)}(x_i),\ i = 0, 1, \ldots, n.$$

Το πολυώνυμο H_{2n+1} του Θεωρήματος 1.3 μπορεί να εκφραστεί στη θεμελιώδη μορφή:

$$\begin{aligned} H_{2n+1}(x) &= \sum_{i=0}^{n} \{1 - 2l_i^{(1)}(x_i)(x - x_i)\}\{l_i(x)\}^2 y(x_i) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n} (x - x_i)\{l_i(x)\}^2 y^{(1)}(x_i), \end{aligned} \tag{4.6}$$

όπου

$$l_i(x) = \prod_{j=0\ (j \neq i)}^{n} [(x - x_j)/(x_i - x_j)] \tag{4.7}$$

είναι οι συντελεστές παρεμβολής Lagrange.

Θεώρημα 4.4 (Σφάλμα παρεμβολής.) *Έστω H_{2n+1} το πολυώνυμο παρεμβολής Hermite μιάς συνάρτησης y στα $n+1$ σημεία*

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Αν $y \in C^{2n+2}[a,b]$, τότε $\forall x \in [a,b]$, $\exists\ \xi = \xi(x) \in [a,b]$ τέτοιο ώστε

$$y(x) - H_{2n+1}(x) = \frac{y^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)^2.$$

4.3 Κανόνες ολοκλήρωσης Newton-Cotes

Έστω $[a,b] \in \mathbb{R}$, $y \in C[a,b]$ και $I : C[a,b] \to \mathbb{R}$ το ολοκλήρωμα

$$I(y) := \int_a^b y(x)dx.$$

Τότε ο (κλειστός) τύπος (ή κανόνας) ολοκλήρωσης Newton-Cotes, τάξης n, είναι

$$I(y) = \sum_{i=0}^{n} A_i y(x_i) + E_n(y),$$

όπου:

- Οι $n+1$ κόμβοι (σημεία ολοκλήρωσης) x_i είναι τα ισαπέχοντα σημεία

  $$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \quad h = (b-a)/n.$$

- Τα βάρη ολοκλήρωσης A_i και το σφάλμα ολοκλήρωσης $E_n(y)$ προκύπτουν θέτοντας

  $$y(x) = p_n(x) + e_n(y),$$

  όπου $p_n \in \mathbb{P}_n$ είναι το πολυώνυμο παρεμβολής της y στα σημεία x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, και $e_n(y)$ είναι το σφάλμα παρεμβολής.

Συνεπώς (βλ. (5.1)-(5.2) και Θεώρημα 5.2):

- $$A_i = \int_{a=x_0}^{b=x_n} l_i(x)dx, \quad \text{όπου} \quad l_i(x) = \prod_{j=0\ (j \neq i)}^{n} [(x - x_j)/(x_i - x_j)].$$

- Αν $y \in C^{n+1}[a,b]$, τότε

  $$E_n(y) = \int_{a=x_0}^{b=x_n} e_n(y)dx = \frac{1}{(n+1)!} \int_{x_0}^{x_n} \pi_{n+1}(x) y^{(n+1)}(\xi)dx,$$

  όπου $\xi = \xi(x) \in [a,b]$ και $\pi_{n+1}(x) = \Pi_{i=0}^{n}(x - x_i)$. (Προφανώς $E_n(p) = 0$, $\forall p \in \mathbb{P}$.)

Οι δύο πιο γνωστοί τύποι Newton-Cotes είναι οι κανόνες του τραπεζίου και του Simpson που δίνονται παρακάτω. Οι κανόνες αυτοί προκύπτουν με $n = 1$ και $n = 2$ αντίστοιχα.

(i) Κανόνας του τραπεζίου ($n = 1$): Το πολυώνυμο παρεμβολής της y στα σημεία

$$x_0 = a \ \text{ και } \ x_1 = b,$$

είναι

$$p_1(x) = \frac{1}{h}\{-(x - x_1)y(x_0) + (x - x_0)y(x_1)\}, \quad \text{όπου } \ h = b - a.$$

⇒ Ο αντίστοιχος τύπος Newton-Cotes είναι

$$\begin{aligned} I(y) &= \int_{x_0}^{x_1} p_1(x)dx + \int_{x_0}^{x_1} e_1(y)dx \\ &= \frac{h}{2}\{y(x_0) + y(x_1)\} + E_1(y), \end{aligned}$$

όπου, αν $y \in C^2[a, b]$,

$$E_1(y) = \int_{x_0}^{x_1} e_1(y)dx = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} \pi_2(x)y^{(2)}(\xi)dx.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\pi_2(x) = (x - x_0)(x - x_1) \le 0, \quad x \in [x_0, x_1].$$

⇒ Το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής δίνει

$$E_1(y) = \frac{y^{(2)}(\eta)}{2}\int_{x_0}^{x_1}(x - x_0)(x - x_1)dx = -\frac{h^3}{12}y^{(2)}(\eta),$$

για κάποιο $\eta \in [a, b]$. ⇒ Ο προσεγγιστικός τύπος είναι

$$I(y) \approx \frac{h}{2}\{y(x_0) + y(x_1)\},$$

και αν $y \in C^2[a, b]$, τότε

$$I(y) = \frac{h}{2}\{y(x_0) + y(x_1)\} - \frac{h^3}{12}y^{(2)}(\eta), \quad \eta \in [a, b].$$

(ii) Κανόνας του Simpson ($n = 2$): Το πολυώνυμο παρεμβολής της y στα σημεία

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, 2, \quad \text{με } \ h = (b - a)/2,$$

είναι

$$\begin{aligned} p_2(x) &= \frac{1}{2h^2}\{(x - x_1)(x - x_2)y(x_0) \\ &\quad - 2(x - x_0)(x - x_2)y(x_1) + (x - x_0)(x - x_1)y(x_2)\}. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Ο αντίστοιχος τύπος Newton-Cotes είναι

$$\begin{aligned} I(y) &= \int_{x_0}^{x_2} p_2(x)dx + \int_{x_0}^{x_2} e_2(y)dx \\ &= \frac{h}{3}\{y(x_0) + 4y(x_1) + y(x_2)\} + E_2(y), \end{aligned}$$

όπου, αν $y \in C^3[a,b]$,

$$E_2(y) = \int_{x_0}^{x_2} e_1(y)dx = \frac{1}{6}\int_{x_0}^{x_2} \pi_3(x)y^{(3)}(\xi)dx.$$

Στην περίπτωση αυτή το πολυώνυμο $\pi_3(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$ δεν διατηρεί το ίδιο πρόσημο στο διάστημα $[x_0, x_2]$. $\Rightarrow$ Δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής για τον υπολογισμό του σφάλματος $E_2(y)$. Ωστόσο, αν $y \in C^4[a,b]$, τότε μπορεί να δειχτεί (για παράδειγμα με τη βοήθεια της μεθόδου του πυρήνα Peano) ότι

$$E_2(y) = -\frac{h^5}{90}y^{(4)}(\eta), \quad \eta \in [a,b].$$

$\Rightarrow$ Ο προσεγγιστικός τύπος είναι

$$I(y) \approx \frac{h}{3}\{y(x_0) + 4y(x_1) + y(x_2)\},$$

και αν $y \in C^4[a,b]$, τότε

$$I(y) = \frac{h}{3}\{y(x_0) + 4y(x_1) + y(x_2)\} - \frac{h^5}{90}y^{(4)}(\eta), \quad \eta \in [a,b].$$

Ο βαθμός ακρίβειας ενός προσεγγιστικού τύπου ολοκλήρωσης ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 4.1 Ένας προσεγγιστικός τύπος ολοκλήρωσης της μορφής

$$\int_a^b y(x)dx = \sum_{i=0}^{n} A_i y(x_i) + E_n(y),$$

έχει "βαθμό ακρίβειας" (precision) ν αν $E_n(p) = 0$, $\forall p \in \mathbb{P}_\nu$ και $\exists$ κάποιο $p \in \mathbb{P}_{\nu+1}$ τ.ω. $E_n(p) \neq 0$.

$\Rightarrow$ Ο βαθμός ακρίβειας του κανόνα του τραπεζίου είναι $\nu = 1$ ενώ αυτός του κανόνα Simpson είναι $\nu = 3$. Πιο γενικά μπορεί να δειχτεί ότι αν ο αριθμός n των κόμβων ενός τύπου Newton-Cotes είναι περιττός, τότε ο τύπος έχει βαθμό ακρίβειας n, ενώ αν ο n είναι άρτιος τότε ο τύπος έχει βαθμό ακρίβειας $n+1$. (Βλ. Άσκηση 5.8.)

Ασκήσεις

4.1 Έστω $l_i \in \mathbb{P}_n$, $i = 0, 1, \ldots, n$, οι συντελεστές παρεμβολής Lagrange. Δηλαδή

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} [(x - x_j)/(x_i - x_j)], \ i = 0, 1, \ldots, n.$$

Δείξτε ότι οι l_i μπορούν να εκφραστούν στη μορφή

$$l_i(x) = \frac{\pi_{n+1}(x)}{(x-x_i)\pi^{(1)}_{n+1}(x_i)} \ ,$$

όπου $\pi_{n+1}(x) := \prod_{j=0}^{n}(x-x_j)$. Δείξτε επίσης ότι

$$\sum_{i=0}^{n} l_i(x) = 1.$$

4.2 Έστω $x_i,\ i=0,1,\dots,n$, τα $n+1$ ισαπέχοντα σημεία

$$x_i = x_0 + ih,\ i=0,1,\dots,n,$$

και p_n το πολυώνυμο παρεμβολής μιας συνάρτησης $y \in C^{n+1}[x_0,x_n]$ στα σημεία x_i. Αν $||\cdot|| := \max_{x\in[x_0,x_n]}|\cdot|$, αποδείξτε τα πιο κάτω δύο αποτελέσματα, που αντιστοιχούν στις δύο περιπτώσεις $n=1$ και $n=2$:

$$||y-p_1|| \le \frac{h^2}{8}||y^{(2)}||,$$

και

$$||y-p_3|| \le \frac{h^4}{24}||y^{(4)}||.$$

4.3 Έστω $x_0=0,\ x_1=1/2,\ x_2=1$, και p_2 το δευτεροβάθμιο πολυώνυμο παρεμβολής που πληροί τις συνθήκες

$$p_2(x_i) = \sin x_i \ , \quad i=0,1,2.$$

Δείξτε ότι

$$\max_{x\in[0,1]}|\sin x - p_2(x)| \le \frac{\sqrt{3}}{216}$$

4.4 Έστω p_n το πολυώνυμο παρεμβολής μιας συνάρτησης y στα $n+1$ διακεκριμένα σημεία $x_i,\ i=0,1,\dots,n$. Δείξτε ότι για κάθε $x \neq x_i$,

$$y(x) - p_n(x) = y[x_0,x_1,\dots,x_n,x]\prod_{i=0}^{n}(x-x_i).$$

(**Υπόδειξη:** Θεωρήστε την αναπαράσταση Newton του πολυωνύμου παρεμβολής της y στα $n+2$ σημεία $x_0,x_1,\dots,x_n$ και x.)

4.5 Έστω $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, $n+1$ διακεκριμένα σημεία. Αν $y\in C^n[a,b]$, δείξτε ότι

$$y[x_0,x_1,\dots,x_n] = \frac{1}{n!}y^{(n)}(\xi),$$

για κάποιο $\xi \in [a,b]$. (**Σημείωση:** Το πιο πάνω αποτέλεσμα σε συνδυασμό με αυτό της Άσκησης 5.3 οδηγεί στο σφάλμα παρεμβολής του Θεωρήματος 5.2.)

4.6 Έστω $H_3 \in \mathbb{P}_3$ το κυβικό πολυώνυμο Hermite που πληροί τις συνθήκες παρεμβολής $H_3(x_i) = y(x_i)$ και $H_3^{(1)}(x_i) = y^{(1)}(x_i)$, $i = 0, 1$, στα δύο σημεία x_0 και $x_1 = x_0 + h$. Δείξτε ότι

$$\begin{aligned} H_3(x) &= \frac{1}{h^3}(x_1 - x)^2[2(x - x_0) + h]y_0 \\ &\quad + \frac{1}{h^3}(x - x_0)^2[2(x_1 - x) + h]y_1 \\ &\quad + \frac{1}{h^2}(x_1 - x)^2(x - x_0)y_0^{(1)} + \frac{1}{h^2}(x - x_0)^2(x - x_1)y_1^{(1)}, \end{aligned}$$

όπου $y_i := y(x_i)$ και $y_i^{(1)} := y^{(1)}(x_i)$. Δείξτε επίσης ότι αν $y \in C^4[x_0, x_1]$, τότε

$$||y - H_3|| \leq \frac{h^4}{384}||y^{(4)}||,$$

όπου $||\cdot|| := \max_{x \in [x_0, x_1]} |\cdot|$.

4.7 Με τους συμβολισμούς της Άσκησης 5.5, δείξτε ότι:

- Αν $y(x) = 1/x$, $x_0 = 1$ και $x_1 = 2$, τότε

$$||y - H_3|| \leq 1/16.$$

- Αν $y(x) = \sin x$, $x_0 = 0$ και $x_1 = 0.1$, τότε

$$||y - H_3|| \leq 2.6 \times 10^{-8}.$$

4.8 Έστω $x_1 = x_0 + h$, $y \in C^4[x_0, x_1]$ και H_3 το πλυώνυμο παρεμβολής Hermite της Άσκησης 5.5. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_{x_0}^{x_1} H_3(x)dx,$$

και στη συνέχεια δείξτε ότι

$$\int_{x_0}^{x_1} y(x)dx - [\frac{h}{2}(y_0 + y_1) + \frac{h^2}{12}(y_0^{(1)} - y_1^{(1)})] = \frac{h^5}{720}y^{(4)}(\xi),$$

για κάποιο $\xi \in [x_0, x_1]$.

4.9 Έστω A_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, τα βάρη και E_n το σφάλμα ολοκλήρωσης του τύπου Newton-Cotes

$$\int_a^b y(x)dx = \sum_{i=0}^{n} A_i y(x_i) + E_n(y), \tag{4.8}$$

που έχει ως κόμβους τα σημεία

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \quad h = (b - a)/h.$$

Δείξτε ότι

$$A_i = A_{n-i}, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Στη συνέχεια δείξτε ότι αν ο n είναι άρτιος, τότε ο τύπος (4.8) έχει βαθμό ακρίβειας $n + 1$.

Λύσεις Ασκήσεων

4.1

$$\begin{aligned}
&\ln \pi_{n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} \ln(x - x_j), \\
&\Rightarrow \frac{\pi_{n+1}^{(1)}(x)}{\pi_{n+1}(x)} = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{x - x_j}, \\
&\Rightarrow \pi_{n+1}^{(1)}(x) = \pi_{n+1}(x) \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{x - x_j}, \\
&\Rightarrow \pi_{n+1}^{(1)}(x_i) = (x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n).
\end{aligned}$$

Συνεπώς

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^{n} [(x - x_j)/(x_i - x_j)] = \frac{\pi_{n+1}(x)}{\pi_{n+1}^{(1)}(x_i)(x - x_i)}.$$

Η πολυωνυμική παρεμβολή βαθμού n είναι ακριβής για πολυώνυμα βαθμού $\leq n \Rightarrow$

$$x^k = \sum_{i=1}^{n} l_i(x) x_i^k, \quad k \leq n.$$

Ιδιαίτερα, με $k = 0$,

$$1 = \sum_{i=1}^{n} l_i(x).$$

4.2 Έστω $\pi_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$. Τότε (βλ. Θεώρημα 5.2) το σφάλμα παρεμβολής είναι

$$y(x) - p_n(x) = \frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \pi_{n+1}(x),$$

για κάποιο $\xi = \xi(x) \in [x_0, x_n]$. $\Rightarrow$

$$||y - p_n|| \leq \frac{1}{(n+1)!} ||\pi_{n+1}|| \cdot ||y^{(n+1)}||.$$

Τα ζητούμενα αποτελέσματα προκύπτουν επειδή

$$||\pi_2|| = \frac{h^2}{4} \quad \text{και} \quad ||\pi_4|| = h^4.$$

Υποδείξεις:

- Ο μετασχηματισμός $x \to hx + x_0$ οδηγεί στη σχέση

  $$\pi_{n+1} = h^{n+1}\widehat{\pi}_{n+1}, \quad \text{όπου} \quad \widehat{\pi}_{n+1}(x) = x(x-1)\cdots(x-n).$$

  Συνεπώς $||\pi_{n+1}|| = h^{n+1}\max_{x\in[0,n]}|\widehat{\pi}_{n+1}|$. $\Rightarrow$ Για την απλοποίηση των πράξεων, προσδιορίστε το $||\pi_{n+1}||$ απο την πιο πάνω σχέση, αφού πρώτα βρείτε το $\max_{x\in[0,n]}|\widehat{\pi}_{n+1}|$.

- Για το δεύτερο μέρος της Άσκησης: Λόγω συμμετρίας το σημείο $x = 3/2$ είναι σημείο καμπής του $\widehat{\pi}_4$.

4.3 Το Θεώρημα 5.2, με $y(x) = \sin x$, $n = 2$ και $x_0 = 0$, $x_1 = 1/2$ και $x_2 = 1$, $\Rightarrow$

$$\sin x - p_2(x) = -\frac{1}{6}\pi_3(x) \times \cos\xi, \quad \xi \in [0,1],$$

όπου $\pi_3(x) = x(x-\frac{1}{2})(x-1) = \frac{1}{2}(2x^3 - 3x^2 + x)$. $\Rightarrow$

$$\max_{x\in[0,1]}|\sin x - p_2(x)| \le \frac{1}{6}\max_{x\in[0,1]}|\pi_3(x)|.$$

Οι ρίζες του πολυωνύμου $\pi_3^{(1)}(x) = \frac{1}{2}(6x^2 - 6x + 1)$ είναι $\alpha = \frac{1}{6}(3+\sqrt{3})$ και $\beta = \frac{1}{6}(3-\sqrt{3})$. Επίσης

$$\pi_3(\alpha) = -\frac{6\sqrt{3}}{216} \quad \text{και} \quad \pi_3(\beta) = \frac{6\sqrt{3}}{216}.$$

$\Rightarrow$

$$\max_{x\in[0,1]}|\pi_3(x)| = \frac{6\sqrt{3}}{216}, \quad \Rightarrow \quad \max_{x\in[0,1]}|\sin x - p_2(x)| \le \frac{\sqrt{3}}{216}.$$

4.4 Έστω $p_{n+1} \in \mathbb{P}_{n+1}$ το πολυώνυμο παρεμβολής της y στα $n+2$ σημεία x_i, $i = 0,1,\ldots,n$, και $x \ne x_i$. Δηλαδή το p_{n+1} πληροί τις συνθήκες

$$p_{n+1}(x_i) = y(x_i), \ i = 0,1,\ldots,n, \quad \text{και} \quad p_{n+1}(x) = y(x).$$

$\Rightarrow$ Η αναπαράσταση Newton του p_{n+1} είναι

$$p_{n+1}(t) = p_n(x) + y[x_0,x_1,\ldots,x_n,x]\prod_{i=0}^{n}(t-x_i)$$
$$\Rightarrow y(x) - p_n(x) = y[x_0,x_1,\ldots,x_n,x]\prod_{i=0}^{n}(x-x_i).$$

4.5 Έστω p_n το πολυώνυμο παρεμβολής της y στα σημεία x_i, $i = 0, 1, \dots, n$, και έστω $e_n := y - p_n$. Τότε $e_n \in C^n[a, b]$ και $e_n(x_i) = 0$, $i = 0, 1, \dots, n$. $\Rightarrow$ Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Rolle n φορές:

$$e_n^{(n)}(\xi) = 0, \quad \text{για κάποιο } \xi \in [a, b], \quad \Rightarrow \quad y^{(n)}(\xi) = p_n^{(n)}(\xi).$$

Όμως

$$\begin{aligned} p_n(x) &= y(x_0) + y[x_0, x_1](x - x_0) + y[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ &\quad + \cdots + y[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$p_n^{(n)}(x) = n! \times y[x_0, x_1, \dots, x_n] \;\Rightarrow\; y[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \frac{1}{n!} y^{(n)}(\xi).$$

4.6 Η θεμελιώδη αναπαράσταση του H_3 είναι (βλ. (5.6)-(5.7)):

$$H_3(x) = a(x)y_0 + b(x)y_1 + c(x)y_0^{(1)} + d(x)y_1^{(1)},$$

όπου

$$\begin{aligned} a(x) &= \frac{1}{h^2}(x_1 - x)^2[2(x - x_0) + h] \\ b(x) &= \frac{1}{h^2}(x - x_0)^2[2(x_1 - x) + h] \\ c(x) &= \frac{1}{h^2}(x_1 - x)^2(x - x_0) \\ d(x) &= \frac{1}{h}(x - x_0)^2(x - x_1). \end{aligned}$$

,

Επίσης, αν $y \in C^4[x_0, x_1]$, τότε (από το Θεώρημα 5.4) το σφάλμα παρεμβολής είναι

$$y(x) - H_3(x) = \frac{y^{(4)}(\xi)}{4!}\{\pi_2(x)\}^2, \quad \text{όπου } \; \pi_2(x) = (x - x_0)(x - x_1),$$

για κάποιο $\xi = \xi(x) \in [x_0, x_1]$. $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} ||y - H_3|| &\le \frac{1}{24}||y^{(4)}|| \cdot ||\pi_2^2||, \\ \Rightarrow ||y - H_3|| &\le \frac{h^4}{384}||y^{(4)}||, \end{aligned}$$

επειδή $||\pi_2|| = h^2/4$ και συνεπώς $||\pi_2^2|| = h^4/16$.

4.7 Από την Άσκηση 5.5 έχουμε ότι αν $y \in C^4[x_0, x_1]$, τότε $||y - H_3|| \le h^4||y^{(4)}||/384$.

- $x_0 = 1$ και $x_1 = 2 \Rightarrow h = 1$. Επίσης $y(x) = 1/x \Rightarrow y^{(4)}(x) = 24/x^4 \Rightarrow ||y^{(4)}|| \le 24 \Rightarrow ||y - H_3|| \le 1/16$.

- $x_0 = 0$ και $x_1 = 0.1 \Rightarrow h = 0.1$. Επίσης $y(x) = \sin x \Rightarrow y^{(4)}(x) = \sin x \Rightarrow ||y^{(4)}|| = \sin 0.1 \Rightarrow ||y - H_3|| \leq (0.1)^4 \sin 0.1/384 \leq 2.6 \times 10^{-8}$.

4.8 Χρησιμοποιώντας τη θεμελιώδη μορφή (Άσκ. 5.5) του H_3,

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_1} H_3(x)dx &= \int_{x_0}^{x_1} [a(x)y_0 + b(x)y_1 + c(x)y_0^{(1)} + d(x)y_1^{(1)}]dx \\ &= \frac{h}{2}(y_0 + y_1) + \frac{h^2}{12}(y_0^{(1)} - y_1^{(1)}).\end{aligned}$$

Έστω

$$E(y) = \int_{x_0}^{x_1} y(x)dx - [\frac{h}{2}(y_0 + y_1) + \frac{h^2}{12}(y_0^{(1)} - y_1^{(1)})].$$

Τότε (βλ. Άσκ. 5.5)

$$\begin{aligned}E(y) &= \int_{x_0}^{x_1} [y(x) - H_3(x)]dx \\ &= \frac{1}{4!}\int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)^2(x - x_1)^2 y^{(4)}(\eta)dx,\end{aligned}$$

όπου $\eta = \eta(x) \in [x_0, x_1]$. Άρα το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής $\Rightarrow$

$$E(y) = \frac{1}{4!}y^{(4)}(\xi)\int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)^2(x - x_1)^2 dx = \frac{1}{720}h^5 y^{(4)}(\xi),$$

για κάποιο $\xi \in [x_0, x_1]$.

4.9

$$\begin{aligned}A_i &= \int_{x_0}^{x_n} l_i(x)dx \\ &= \int_{x_0}^{x_n} \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)}dx.\end{aligned}$$

Έστω $x = x_0 + th$. Τότε

$$\begin{aligned}A_i &= \int_0^n \frac{t(t-1)\cdots(t-i+1)(t-i-1)\cdots(t-n)}{i(i-1)\cdots(1)(-1)\cdots(i-n)}hdt \\ &= \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!}h\int_0^n t(t-1)\cdots(t-i+1)(t-i-1)\cdots(t-n)dt\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}A_{n-i} &= \frac{(-1)^i}{(n-i)!i!}h \\ &\quad \times \int_0^n t(t-1)\cdots(t-n+i+1)(t-n+i-1)\cdots(t-n)dt,\end{aligned}$$

ή, με $s = n - t$,

$$\begin{aligned}A_{n-i} &= \frac{(-1)^i}{i!(n-i)!}h\int_0^n (s-n)\cdots(s-i-1)(s-i+1)\cdots s(-1)^n ds \\ &= A_i.\end{aligned}$$

Αν $n = 2m$, τότε

$$\sum_{i=0}^{n} A_i y(x_i) = \sum_{i=0}^{m-1} A_i \{y(x_i) + y(x_{2m-i})\} + A_m y(x_m). \tag{4.9}$$

Από τον τρόπο κατασκευής των τύπων Newton-Cotes, γνωρίζουμε ότι $E_n(y) = 0$, $\forall y \in \mathbb{P}_n$. Συνεπώς (για την απόδειξη του ζητούμενου αποτελέσματος) αρκεί να δείξουμε ότι αν $n = 2m$, τότε ισχύει επίσης ότι $E_n(x^{n+1}) = 0$. Για το σκοπό αυτό υποθέτουμε (χωρίς απώλεια της γενικότητας) ότι οι κόμβοι είναι συμμετρικοί ως προς το 0, δηλαδή ότι οι κόμβοι είναι $-mh, \ldots, 0, \ldots, mh$. Τότε

$$\int_{a=x_0}^{b=x_n} x^{n+1} dx = \int_{-mh}^{mh} x^{2m+1} dx = 0$$

και, από την (4.9),

$$\sum_{i=0}^{n} A_i x_i^{n+1} = \sum_{i=0}^{m-1} \{(-m+i)^{2m+1} + (m-i)^{2m+1}\} + A_m \times 0.$$

$\Rightarrow E_n(x^{n+1}) = 0.$