

## ΧΡΟΝΟΙ ΠΑΥΣΗΣ ΣΕ ΙΞΩΔΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΡΟΕΣ ΠΛΑΣΤΙΚΩΝ BINGHAM

**Μ. Χατζημηνά, Γ. Γεωργίου**

*Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής, Πανεπιστήμιο Κύπρου, ΤΘ 20537, 1678 Λευκωσία, Κύπρος*

**Ε. Μητσούλης**

*Σχολή Μηχανικών Μεταλλείων Μεταλλουργών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Ηρώων Πολυτεχνείου 9, 15780 Ζωγράφου, Αθήνα*

**R.R. Huilgol**

*School of Informatics and Engineering, Flinders University of South Australia, G.P.O. Box 2100, Adelaide, SA 5001, Australia*

### ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην εργασία αυτή υπολογίζουμε αριθμητικά τους χρόνους παύσης σε τρεις μονοδιάστατες ιξωδομετρικές ροές ρευστών Bingham: την επίπεδη ροή Couette, την επίπεδη ροή Poiseuille και την αξονοσυμμετρική ροή Poiseuille. Στις προσομοιώσεις χρησιμοποιούμε την ομαλοποιημένη εξίσωση που πρότεινε ο Παπαναστασίου για πλαστικά Bingham. Για τη διακριτοποίηση της εξίσωσης διατήρησης της ορμής χρησιμοποιούμε πεπερασμένα στοιχεία στον χώρο και ανάδρομες πεπερασμένες διαφορές στον χρόνο. Οι αριθμητικοί μας υπολογισμοί επιβεβαιώνουν τη θεωρία σύμφωνα με την οποία οι χρόνοι παύσης για μη μηδενική τάση διαρροής είναι πεπερασμένοι. Η μείωση της ογκομετρικής παροχής, η οποία είναι εκθετική στη Νευτώνεια περίπτωση, επιταχύνεται και καθίσταται τελικά γραμμική με την αύξηση της τιμής της τάσης διαρροής. Οι αριθμητικοί χρόνοι παύσης συμφωνούν με τα θεωρητικά άνω φράγματα της βιβλιογραφίας.

### ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Μια ιξωδομετρική ροή μπορεί να σταματήσει τελείως είτε με ακινητοποίηση του κινούμενου συνόρου στην περίπτωση ροών Couette είτε με μηδενισμό της εφαρμοζόμενης βαθμίδας πίεσης στην περίπτωση ροών Poiseuille. Στα Νευτώνεια ρευστά, τα αντίστοιχα πεδία ταχύτητας φθίνουν προς το μηδέν σε θεωρητικά άπειρο χρόνο [1]. Στα πλαστικά Bingham ο απαιτούμενος χρόνος για τον μηδενισμό της ταχύτητας είναι πεπερασμένος, γεγονός που υποδεικνύει τη σημασία της τάσης διαρροής (yield stress) [2]. Ο Glowinski [3] καθώς και οι Huilgol et al. [2,4] βρήκαν σε λυμένη μορφή θεωρητικά πεπερασμένα άνω φράγματα για τον χρόνο που χρειάζεται ένα υλικό Bingham για να ηρεμήσει σε διάφορες ροές, όπως η επίπεδη και η κυκλική ροή Couette και η επίπεδη και η αξονοσυμμετρική ροή Poiseuille. Σε όλες αυτές τις ροές, το θεωρητικό άνω φράγμα είναι συνάρτηση της πυκνότητας, του ιξώδους, της τάσης διαρροής και της ελάχιστης ιδιοτιμής του τελεστή Laplace στο πεδίο ροής. Σε μια πρόσφατη εργασία, ο Huilgol [5] βρήκε επίσης άνω φράγματα για την παύση της αξονοσυμμετρικής ροής Poiseuille άλλων γενικότερων ιξωδοπλαστικών ρευστών.

Στόχος της παρούσας είναι ο αριθμητικός υπολογισμός των χρόνων παύσης (stopping

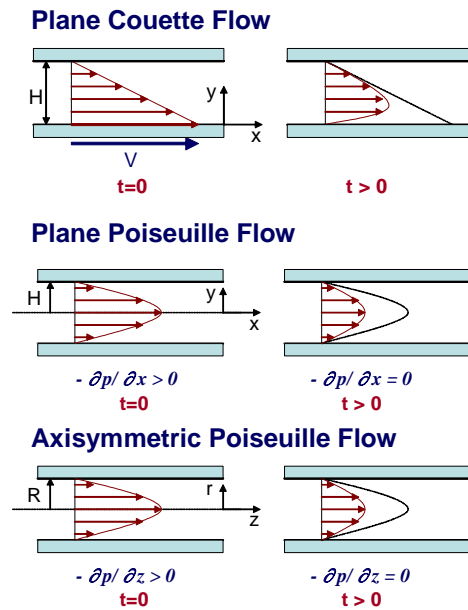
times) και η σύγκρισή τους με τα θεωρητικά άνω φράγματα της βιβλιογραφίας για την επίπεδη ροή Couette, και την επίπεδη και την αξονοσυμμετρική ροή Poiseuille ενός ρευστού Bingham. Στο άρθρο αυτό θα παραθέσουμε μόνο αποτελέσματα για την επίπεδη ροή Poiseuille. Προκειμένου να αποφύγουμε την ανάγκη του εκ των προτέρων προσδιορισμού των περιοχών διαρροής και μη διαρροής στο πεδίο ροής, αντί του ασυνεχούς μοντέλου Bingham, χρησιμοποιούμε την ομαλοποιημένη εξίσωση του Παπαναστασίου [6]:

$$\underline{\underline{\tau}} = \left\{ \frac{\tau_0 [1 - \exp(-m \dot{\gamma})]}{\dot{\gamma}} + \mu \right\} \dot{\gamma} \quad (1)$$

όπου  $\underline{\underline{\tau}}$  ο τανυστής τάσεων,  $\dot{\gamma}$  ο τανυστής ρυθμών παραμόρφωσης με μέτρο  $\dot{\gamma}$ ,  $\tau_0$  η τάση διαρροής,  $\mu$  το ιξώδες και  $m$  η παράμετρος ομαλοποίησης ή ανάπτυξης.

### ΛΙΕΠΟΥΣΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Η γεωμετρία των υπό μελέτη ροών φαίνεται στο Σχήμα 1. Όπως προαναφέραμε, θα συζητήσουμε μόνο την επίπεδη ροή Poiseuille.



**Σχήμα 1:** Γεωμετρία των τριών ιξωδομετρικών ροών.

Με την χρήση κατάλληλων κλιμάκων, η  $x$ -συνιστώσα της εξίσωσης διατήρησης της ορμής γράφεται σε αδιάστατη μορφή ως εξής:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = f + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \quad (2)$$

όπου  $f$  η αδιάστατη βαθμίδα πίεσης. Η αδιάστατη εξίσωση Παπαναστασίου ανάγεται στην

$$\tau_{yx} = \left\{ \frac{Bn [1 - \exp(-M \dot{\gamma})]}{\dot{\gamma}} + 1 \right\} \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (3)$$

όπου  $\dot{\gamma} = |\partial u_x / \partial y|$ ,  $Bn = \tau_0 H / \mu V$  ο αριθμός Bingham και  $M = mV / H$  ο αδιάστατος αριθμός ανάπτυξης. Στην περίπτωση παύσης της Νευτώνειας ροής ( $Bn=0$ ), η βαθμίδα της πίεσης μηδενίζεται σε χρόνο μηδέν και η χρονομεταβαλλόμενη ταχύτητα δίνεται από την [1]:

$$u_x(y, t) = \frac{48}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3} \cos \left\{ \frac{(2k-1)\pi}{2} y \right\} \exp \left\{ -\frac{(2k-1)^2 \pi^2}{4} t \right\} \quad (4)$$

η οποία καταδεικνύει ότι η ροή σταματά πλήρως με την παρέλευση άπειρου χρόνου. Στην περίπτωση ρευστού Bingham ( $Bn > 0$ ), το θεωρητικό άνω φράγμα για τον χρόνο διακοπής είναι [2]:

$$T_f = \frac{4}{\pi^2} \ln \left[ 1 + \frac{\pi^2}{4} \frac{\|u_x(y, 0)\|}{Bn - f} \right], \quad f < Bn \quad (5)$$

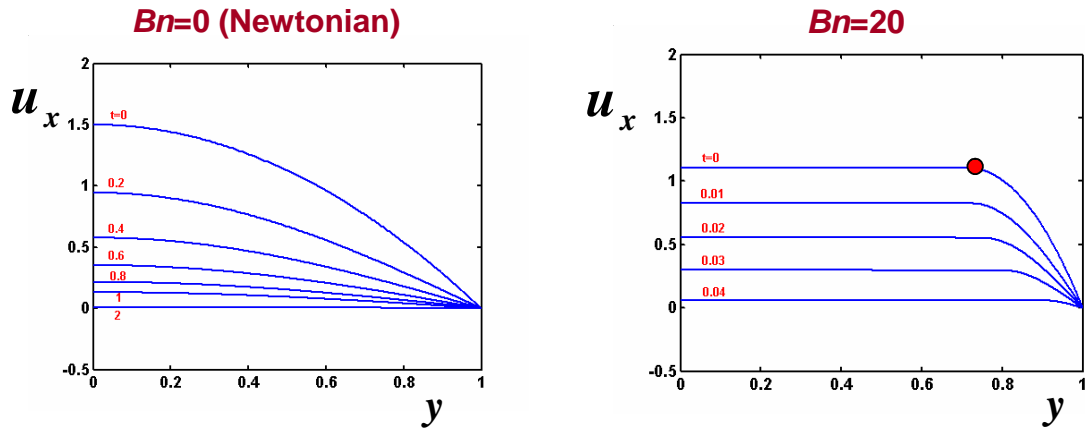
Η πιο πάνω εκτίμηση ισχύει όταν  $f < Bn$ , αφού στην αντίθετη περίπτωση η ροή δεν σταματά. Στη συνέχεια θα δείξουμε αποτελέσματα μόνο για την περίπτωση όπου η βαθμίδα πίεσης  $f$  μηδενίζεται.

#### ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

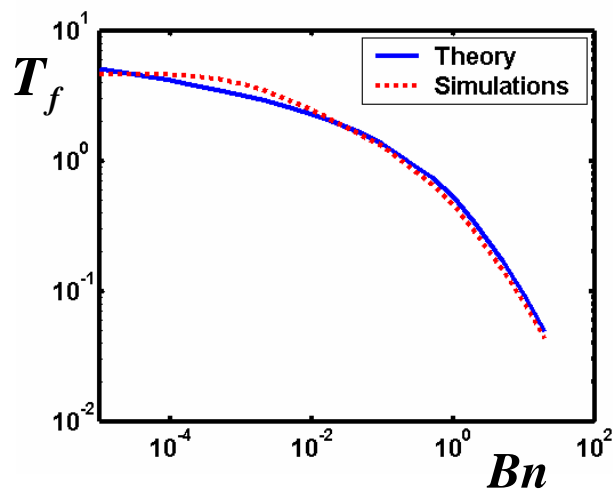
Για την αριθμητική επίλυση του υπό μελέτη προβλήματος ροής χρησιμοποιήσαμε τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων με τετραγωνικές συνάρτησεις βάσης για την ταχύτητα. Για τη χρονική διακριτοποίηση χρησιμοποιήσαμε το σχήμα των ανόδρων πεπερασμένων διαφορών.

Στο Σχήμα 2 βλέπουμε την εξέλιξη της κατανομής της ταχύτητας στην περίπτωση Νευτώνειας ροής ( $Bn=0$ ) και στην περίπτωση ροής Bingham με  $Bn=20$ . Τα αποτελέσματά μας δείχνουν ότι για μικρούς αριθμούς Bingham η μείωση της ογκομετρικής παροχής είναι εκθετική. Με την αύξηση του αριθμού Bingham η μείωση αυτή καθίσταται πολυωνυμική και στη συνέχεια γραμμική.

Στο Σχήμα 3, συγκρίνουμε τον αριθμητικό χρόνο διακοπής (δηλ. τον χρόνο που απαιτείται έτσι ώστε η ογκομετρική παροχή να μειωθεί στην τιμή  $10^{-5}$ ) με το θεωρητικό άνω φράγμα που δίνεται από την εξίσωση (5). Παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματά μας συμφωνούν αρκετά καλά με τα θεωρητικά με εξαίρεση μια μικρή περιοχή που αντιστοιχεί σε μικρούς έως πολύ μικρούς αριθμούς Bingham. Αυτές οι μικροδιαφορές οφείλονται στο ότι η τιμή  $M=500$  που χρησιμοποιήσαμε για τον αδιάστατο αριθμό ανάπτυξης δεν ήταν αρκούντως μεγάλη για να περιγραφεί η ροή Bingham από το ομαλοποιημένο μοντέλο Παπαναστασίου. Η επίδραση αυτή γίνεται πιο σημαντική στην περίπτωση που η εφαρμοζόμενη βαθμίδα πίεσης είναι μη μηδενική (αλλά φυσικά μικρότερη από  $Bn$ ). Ενώ θεωρητικά η ροή Bingham σταματά πλήρως, το ομαλοποιημένο μοντέλο προβλέπει αρκετά καλά μόνο την αρχική μείωση της ογκομετρικής παροχής, αφού οδηγεί σε μια νέα μόνιμη κατάσταση όπου η ογκομετρική παροχή είναι μεν μικρή αλλά όχι μηδενική. Αυτή η τελική τιμή της ογκομετρικής παροχής μειώνεται με αύξηση του αριθμού ανάπτυξης αλλά δεν μηδενίζεται.



**Σχήμα 2:** Εξέλιξη της κατανομής της ταχύτητας για Νευτώνειο ρευστό ( $Bn=0$ ) και ρευστό Bingham ( $Bn=20$ ).



**Σχήμα 3:** Σύγκριση του αριθμητικού με τον θεωρητικό χρόνο παύσης.

#### ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Papanastasiou T., Georgiou G. and Alexandrou A., *Viscous Fluid Flow*, CRC Press, Boca Raton, 1999.
- [2] Huilgol R.R., B. Mena B. and Piau J.M., *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* **102**:97 (2002).
- [3] Glowinski R., *Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems*, Springer-Verlag, New York, 1984.
- [4] Huilgol R.R. and Mena B., *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* **123**:215 (2004).
- [5] Huilgol R.R., *Phys. Fluids* **14**:1269 (2002).
- [6] Papanastasiou T.C., *J. Rheology* **31**:385 (1987).