ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ (ΜΑΣ181) - 17 Νοεμβρίου 2004 (♡♡♡♡)

Όνομα: **ΑΠΤ:**

Πρόβλημα 1.
Αν D το χωρίο στο πρώτο τεταρτημόριο που ορίζεται από τις

$$x^2+y^2=1\,,\qquad x^2+y^2=4\,,\qquad y\;=\;2x^2\,,\qquad y\;=\;3x^2\,,$$

υπολογίστε το ολοκλήρωμα:

$$\int_D\left(\frac{x}{y}+2\frac{y}{x}\right)\,dxdy\,.$$

40μ.

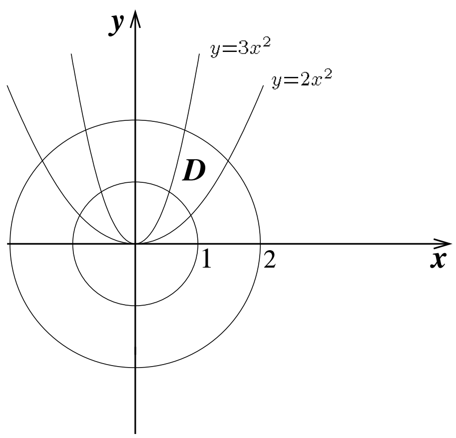
Θεωρούμε τον μετασχηματισμό:

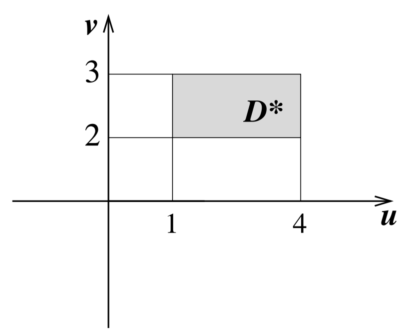
$$u\;=\;x^2+y^2\,,\qquad v\;=\;\frac{y}{x^2}$$

οπότε

$$1\le u\le 4\qquad \text{και}\qquad 2\le v\le 3\,.$$

Έτσι, το χωρίο D του επιπέδου xy απεικονίζεται στο χωρίο D^* του επιπέδου uv.





Για την Ιακωβιανή του μετασχηματισμού έχουμε

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\;=\;\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}\;=\;\begin{vmatrix}2x & -2y\\ -2\dfrac{y}{x^3} & \dfrac{1}{x^2}\end{vmatrix}\;=\;2\,\frac{x^2+2y^2}{x^3}$$

οπότε

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\;=\;1\left/\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right.\;=\;\frac{x^3}{2\,(x^2+2y^2)}\,.$$

Για το ολοκλήρωμα έχουμε:

$$\begin{aligned}\int_D\left(\frac{x}{y}+2\frac{y}{x}\right)\,dxdy\;&=\;\int_{D^*}\left(\frac{x}{y}+2\frac{y}{x}\right)\,\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\,dudv\;=\;\int_1^4\int_2^3\frac{x^2+2y^2}{xy}\,\frac{x^3}{2\,(x^2+2y^2)}\,dvdu\\ &=\;\frac{1}{2}\int_1^4\int_2^3\frac{x^2}{y}\,dvdu\;=\;\frac{1}{2}\int_1^4\int_2^3\frac{1}{v}\,dvdu\;=\;\frac{1}{2}\,[u]_1^4\;[\ln v]_2^3\;=\;\frac{3}{2}\;\ln\frac{3}{2}\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2.

(α) Να βρεθεί ο όγκος του χωρίου R που φράσσεται από τις επιφάνειες

$$z = 4 - (x^2 + y^2) \quad \text{και} \quad z = 3\sqrt{x^2+y^2}$$

20μ.

(β) Υπολογίστε το

$$\int_R (x^2 + y^2)\, dV$$

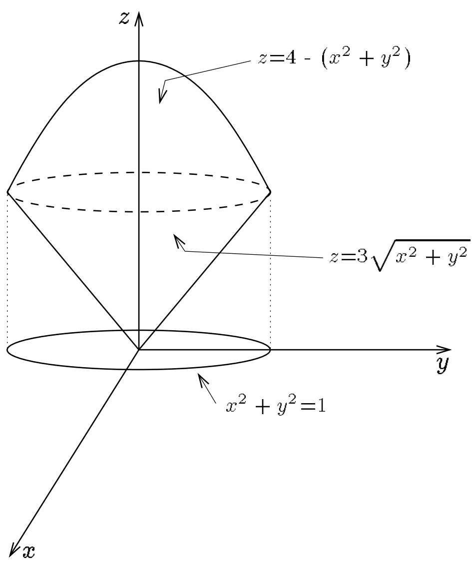
20μ.

(γ) Να βρεθεί ο όγκος του χωρίου R' που φράσσεται από τις επιφάνειες

$$z = 4 - (x^2 + y^2), \quad z = 3\sqrt{x^2+y^2} \quad \text{και} \quad x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

20μ.

(α)



Βρίσκουμε την τομή των δύο επιφανειών:

$$4 - (x^2+y^2) = 3\sqrt{x^2+y^2} \quad \Longrightarrow$$

$$(x^2+y^2) + 3\sqrt{x^2+y^2} - 4 = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$(\sqrt{x^2+y^2} + 4)(\sqrt{x^2+y^2} - 1) = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$x^2 + y^2 = 1\,.$$

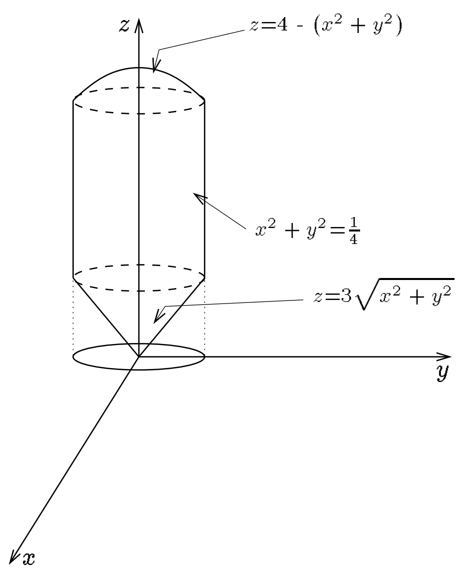
Το στερεό που σχηματίζεται φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Εργαζόμενοι σε κυλινδρικές συντεταγμένες έχουμε:

$$\begin{aligned} V(R) &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{3r}^{4-r^2} r\,dz\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\,(4-r^2-3r)\,dr\,d\theta \\ &= 2\pi\left[2r^2 - \frac{r^4}{4} - r^3\right]_0^1 = \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

(β) Εργαζόμαστε πάλι σε κυλινδρικές συντεταγμένες:

$$\int_R (x^2+y^2)dV = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{3r}^{4-r^2} r^2 r dz dr d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3(4-r^2-3r)dr d\theta = 2\pi\left[r^4 - \frac{r^6}{6} - \frac{r^5}{5}\right]_0^1 = \frac{7\pi}{15}$$

(γ)



Το στερεό που σχηματίζεται φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

$$\begin{aligned} V(R') &= \int_0^{2\pi}\int_0^{1/2}\int_{3r}^{4-r^2} r\,dz\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2} r\,(4-r^2-3r)\,dr\,d\theta \\ &= 2\pi\left[2r^2 - \frac{r^4}{4} - r^3\right]_0^{1/2} = \frac{27\pi}{32} \end{aligned}$$