ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ (ΜΑΣ181) - 27 Οκτωβρίου 2004 (♡♡♡)

Όνομα: **ΑΠΤ:**

Πρόβλημα 1.
Διατυπώστε τους ορισμούς των πιο κάτω:
(α) Διατυπώστε τον ορισμό του **διπλού ολοκληρώματος** (πάνω σε ορθογώνιο). **5μ.**
(β) Διατυπώστε το **Θεώρημα Μέσης Τιμής για Διπλά Ολοκληρώματα**. **5μ.**
(γ) Διατυπώστε το **Θεώρημα Fubini** για διπλά ολοκληρώματα. **5μ.**

(α) **Διπλό ολοκλήρωμα**
Έστω η συνάρτηση $f : R \to \mathbf{R}$, όπου $R=[a,b]\times[c,d]$. Θεωρούμε μια διαμέριση του R τάξης n:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\,, \qquad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$$

με

$$\Delta x \;=\; x_{j+1} - x_j \;=\; \frac{b-a}{n}\,, \qquad \Delta y \;=\; y_{k+1} - y_k \;=\; \frac{d-c}{n}\,,$$

και το αντίστοιχο άθροισμα Riemann:

$$S_n \;=\; \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} f(\mathbf{c}_{jk})\,\Delta x \Delta y\,,$$

όπου $\mathbf{c}_{jk} \in R_{jk} = [x_j, x_{j+1}] \times [y_k, y_{k+1}]$. Αν η ακολουθία $\{S_n\}$ συγκλίνει σε ένα όριο S όταν $n \to \infty$ και το όριο S είναι το ίδιο για οποιαδήποτε επιλογή σημείων $\mathbf{c}_{jk}$ στα ορθογώνια R_{jk}, τότε λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη πάνω στο R και γράφουμε

$$\int\!\!\int_R f(x,y)\,dxdy \;=\; \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} f(\mathbf{c}_{jk})\,\Delta x \Delta y \;=\; S\,.$$

(β) **Θεώρημα Μέσης Τιμής για Διπλά Ολοκληρώματα**
Υποθέτουμε ότι η $f : D \to \mathbf{R}$ είναι συνεχής και το D είναι ένα στοιχειώδες χωρίο στο επίπεδο. Τότε για κάποιο σημείο $(x_0, y_0) \in D$ ισχύει

$$\int_D f(x,y)\,dA \;=\; f(x_0,y_0)\,A(D)\,,$$

όπου $A(D)$ το εμβαδόν του D:

$$A(D) \;=\; \int_D dA\,.$$

(γ) **Θεώρημα Fubini**
Έστω f συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $R=[a,b]\times[c,d]$. Τότε ισχύει

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dydx \;=\; \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dxdy \;=\; \int_R f(x,y)\,dA\,.$$

Πρόβλημα 2.

(α) Σχεδιάστε το χωρίο

$$D \;=\; \left\{(x,y)\in \mathbf{R}^2 \mid x\in[0,\pi/2],\;\sin x\le y\le 1\right\}\;.$$

5μ.

(β) Υπολογίστε το

$$\int_0^{\pi/2}\int_{\sin x}^{1}\sin x\,dydx$$

15μ.

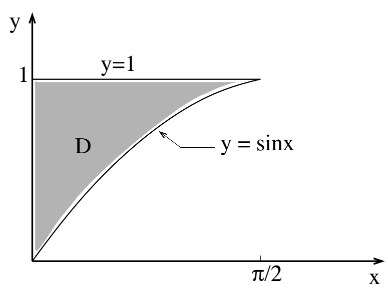
(γ) Υπολογίστε το πιο πάνω ολοκλήρωμα αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης. **15μ.**

Βοηθητικά ολοκληρώματα

$$\int \sin^2 x\,dx \;=\; -\frac{\sin 2x}{4}\;+\;\frac{x}{2} \qquad \text{και} \qquad \int \sqrt{1-x^2}\,dx \;=\; \frac{x}{2}\,\sqrt{1-x^2}\;+\;\frac{1}{2}\sin^{-1}x$$

(α)

$$D \;=\; \left\{(x,y)\in \mathbf{R}^2 \mid x\in[0,\pi/2],\;\sin x\le y\le 1\right\}\;.$$



(β) Το D λαμβάνεται σαν χωρίο τύπου 1.

$$\begin{aligned} I \;&=\; \int_0^{\pi/2}\int_{\sin x}^{1}\sin x\,dydx \;=\; \int_0^{\pi/2}\left[\sin x\;y\right]_{\sin x}^{1}\,dx \;=\; \int_0^{\pi/2}\left(\sin x\;-\;\sin^2 x\right)\,dx \\ &=\; \left[-\cos x\;+\;\frac{\sin 2x}{4}\;-\;\frac{x}{2}\right]_0^{\pi/2} \;=\; 1\;-\;\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

(γ) Θεωρούμε τώρα το D σαν χωρίο τύπου 2:

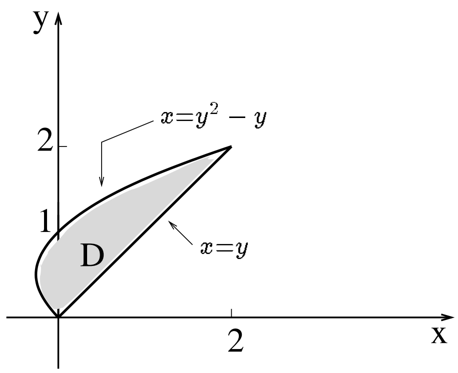
$$D \;=\; \left\{(x,y)\in \mathbf{R}^2 \mid y\in[0,1],\;0\le x\le \sin^{-1}y\right\}\;.$$

Αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης παίρνουμε:

$$\begin{aligned} I \;&=\; \int_0^{1}\int_0^{\sin^{-1}y}\sin x\,dxdy \;=\; \int_0^1\left[-\cos x\right]_0^{\sin^{-1}y}\,dy \;=\; \int_0^1\left[-\cos(\sin^{-1}y)\;+\;\cos 0\right]\,dy \\ &=\; \int_0^1\left[1\;-\;\sqrt{1-y^2}\right]\,dy \;=\; \left[y\;-\;\frac{y}{2}\sqrt{1-y^2}\;-\;\frac{1}{2}\sin^{-1}y\right]_0^1 \;=\; 1\;-\;\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Πρόβλημα 3.

Βρείτε τον όγκο του στερεού που βρίσκεται κάτω από το παραβολοειδές $z=3x^2+y^2$ και πάνω από το χωρίο που περικλείεται από τις $x=y$ και $x=y^2$-y. **30μ.**



Βρίσκουμε τα σημεία τομής των $x=y$ και $x=y^2$-y:

$$\left.\begin{array}{l} x = y \\ x = y^2 - y \end{array}\right\} \implies y^2 - 2y = 0$$

Οι καμπύλες τέμνονται στα y=0 και y=2.

Το D είναι χωρίο τύπου 2:

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \in [0,2],\ y^2 - y \le x \le y\} .$$

Επειδή $z=3x^2+y^2 \geq 0$ για όλα τα x και y, έχουμε για τον ζητούμενο όγκο:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 \int_{y^2-y}^{y} (3x^2+y^2)\,dxdy = \int_0^2 \left[x^3 + y^2 x\right]_{y^2-y}^{y} dy \\ &= \int_0^2 \left[2y^3 - (y^2-y)^3 - y^2(y^2-y)\right] dy = \int_0^2 \left(-y^6 + 3y^5 - 4y^4 + 4y^3\right) dy \\ &= \left[-\frac{y^7}{7} + \frac{y^6}{2} - \frac{4}{5}y^5 + y^4\right]_0^2 = \frac{144}{35} \end{aligned}$$

Πρόβλημα 4.
Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} \sin\frac{j}{n}\, \sin\frac{k}{n} \;=\; (1-\cos 1)^2$$

20μ.

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x,y) \;=\; \sin x\, \sin y$$

στο τετράγωνο $R{=}[0,1]\times[0,1]$ και την κανονική διαμέριση του R σε $n\times n$ τετράγωνα:

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1\,, \qquad 0 = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = 1\,,$$

Έχουμε τότε

$$x_j \;=\; \frac{j}{n}\,, \qquad y_k \;=\; \frac{k}{n}\,, \qquad \Delta x \;=\; \frac{1}{n}\,, \qquad \Delta y \;=\; \frac{1}{n}\,.$$

Επιλέγοντας το $\mathbf{c}_{jk} = (x_j, y_k) \in R_{jk} = [x_j, x_{j+1}]\times[y_k, y_{k+1}]$ έχουμε το άθροισμα Riemann:

$$S_n \;=\; \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} f(\mathbf{c}_{jk})\,\Delta x\Delta y \;=\; \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} \sin\frac{j}{n}\, \sin\frac{k}{n}\; \frac{1}{n^2} \;=\; \frac{1}{n^2}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} \sin\frac{j}{n}\, \sin\frac{k}{n}\,.$$

Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} S_n \;&=\; \int_R \sin x\, \sin y\, dxdy \;=\; \int_0^1\int_0^1 \sin x\, \sin y\, dxdy \\ &=\; \int_0^1 \sin x\, dx \int_0^1 \sin y\, dy \;=\; [-\cos x]_0^1\; [-\cos y]_0^1 \;=\; (1-\cos 1)^2\,.\end{aligned}$$

Από τις πιο πάνω σχέσεις έχουμε τελικά:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} \sin\frac{j}{n}\, \sin\frac{k}{n} \;=\; \lim_{n\to\infty} S_n \;=\; (1-\cos 1)^2$$