ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ (ΜΑΣ181)
ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΕΞΕΤΑΣΗ, 24 Νοεμβρίου 2004

Όνομα: **ΑΠΤ:**

Πρόβλημα 1.
Διατυπώστε τους ορισμούς των πιο κάτω:

(α) **Παραγωγίσιμη συνάρτηση** $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. **2μ.**
(β) **Ισοσταθμική καμπύλη.** **1μ.**
(γ) **Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα** β' **είδους.** **1μ.**
(δ) **Ιακωβιανή στον** $\mathbf{R}^3$. **1μ.**

(α) Η συνάρτηση $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ είναι **παραγωγίσιμη** στο (x_0, y_0) αν οι μερικές παράγωγοι $\partial f/\partial x$ και $\partial f/\partial y$ υπάρχουν στο (x_0, y_0) και

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) \, - \, f(x_0,y_0) \, - \, \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right] \, (x-x_0) \, - \, \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right] \, (y-y_0)}{||(x,y) \, - \, (x_0,y_0)||} \; = \; 0\,.$$

(β) **Ισοσταθμική καμπύλη**
Έστω $f : U \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ και $c \in \mathbf{R}$. Η **ισοσταθμική καμπύλη** με τιμή c ορίζεται σαν το σύνολο των σημείων $(x,y) \in U$ στα οποία $f(x,y)=c$:

$$\text{Ισοσταθμική καμπύλη:} \quad \{(x,y) \in U \, : \, f(x,y) = c\}.$$

(γ) **Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα** β' **είδους**
Έστω $\mathbf{F} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ διανυσματικό πεδίο συνεχές στη C^1 καμπύλη $\boldsymbol{\sigma} : [a,b] \to \mathbf{R}^3$. Το **επικαμπύλιο ολοκλήρωμα** β' **είδους του** $\mathbf{F}$ **κατά μήκος της** $\boldsymbol{\sigma}$ ορίζεται ως εξής:

$$\int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \; = \; \int_a^b \mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \cdot \boldsymbol{\sigma}'(t)\, dt\,.$$

(δ) Έστω $T : W \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ μια C^1 συνάρτηση που ορίζεται από τις

$$x \; = \; x(u,v,w)\,, \quad y \; = \; y(u,v,w)\,, \quad z \; = \; z(u,v,w)\,.$$

Η **Ιακωβιανή** του μετασχηματισμού T είναι η ορίζουσα:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \; = \; \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Πρόβλημα 2.

(α) Διατυπώστε το **Θεώρημα αλλαγής των μεταβλητών για διπλά ολοκληρώματα.** **2μ.**

(β) Διατυπώστε το **Θεώρημα Μέσης Τιμής για διπλά ολοκληρώματα.** **2μ.**

(γ) Διατυπώστε τον ορισμό της **κατά κατεύθυνση παραγώγου.** **1μ.**

(α) **Θεώρημα αλλαγής των μεταβλητών για διπλά ολοκληρώματα**

Έστω D και D^* στοιχειώδη χωρία στο επίπεδο τέτοια ώστε $T(D^*)=D$, όπου η απεικόνιση $T: D^* \to D$ είναι C^1 και ένα-προς-ένα στο D^*. Για κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f: D \to \mathbf{R}$ ισχύει

$$\int_D f(x,y)\, dxdy \;=\; \int_{D^*} f(x(u,v),\; y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

(β) **Θεώρημα Μέσης Τιμής για διπλά ολοκληρώματα**

Υποθέτουμε ότι η $f: D \to \mathbf{R}$ είναι συνεχής και το D είναι ένα στοιχειώδες χωρίο στο επίπεδο. Τότε για κάποιο σημείο $(x_0, y_0) \in D$ ισχύει

$$\int_D f(x,y)\, dA \;=\; f(x_0,y_0)\, A(D)\;,$$

όπου $A(D)$ το εμβαδόν του D:

$$A(D) \;=\; \int_D dA\,.$$

(γ) Η **κατά κατεύθυνση παράγωγος** της $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ στο σημείο $\mathbf{x}$ στη κατεύθυνση ενός διανύσματος $\mathbf{v}$ δίνεται από την

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{x} \,+\, t\mathbf{v})\Big|_{t=0}$$

Πρόβλημα 3.
Διατυπώστε και αποδείξτε το **Θεώρημα Fubini** για διπλά ολοκληρώματα. **10μ.**

Θεώρημα Fubini
Έστω f συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $R=[a,b]\times[c,d]$. Τότε ισχύει

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dydx \;=\; \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dxdy \;=\; \int_R f(x,y)\,dA\,.$$

Απόδειξη
Θα δείξουμε μόνο τη μια ισότητα,

$$I \;=\; \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dydx \;=\; \int_R f(x,y)\,dA\,,$$

αφού η άλλη αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο.

Έστω $c=y_0<y_1<\cdots<y_n=d$ μια κανονική διαμέριση του $[c,d]$. Έχουμε τότε:

$$I \;=\; \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx \;=\; \int_a^b \left[\sum_{k=0}^{n-1} \int_{y_k}^{y_{k+1}} f(x,y)\,dy\right] dx\,.$$

Επειδή η f είναι συνεχής, από την ολοκληρωτική εκδοχή του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, υπάρχει $Y_k(x)\in[y_k,y_{k+1}]$ τέτοιο ώστε

$$\int_{y_k}^{y_{k+1}} f(x,y)\,dy \;=\; f(x,Y_k(x))\,(y_{k+1}-y_k)\,.$$

Άρα

$$I \;=\; \int_a^b \left[\sum_{k=0}^{n-1} f(x,Y_k(x))\,(y_{k+1}-y_k)\right] dx\,.$$

Εκφράζοντας το τελευταίο ολοκλήρωμα ως όριο αθροίσματος Riemann, έχουμε

$$I \;=\; \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} f(P_j,Y_k(P_j))\,(y_{k+1}-y_k)\,(x_{j+1}-x_j)$$

όπου $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ μια διαμέριση του $[a,b]$ και $P_j\in[x_j,x_{j+1}]$. Θέτοντας $\mathbf{c}_{jk}=(P_j,Y_k(P_j))\in R_{jk}$ όπου $R_{jk}=[x_j,x_{j+1}]\times[y_k,y_{k+1}]$, έχουμε

$$I \;=\; \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} f(\mathbf{c}_{jk})\,(y_{k+1}-y_k)\,(x_{j+1}-x_j) \;=\; \int_R f(x,y)\,dA\,.$$

Πρόβλημα 4.
Αν οι f, g και h είναι συνεχείς στα $[a,b]$, $[c,d]$ και $[u,v]$ αντίστοιχα, δείξτε ότι

$$\int_a^b \int_c^d \int_u^v f(x)\, g(y)\, h(z)\, dzdydx \;=\; \left[\int_a^b f(x)\, dx\right] \left[\int_c^d g(y)\, dy\right] \left[\int_u^v h(z)\, dz\right] .$$

4μ.

Αν F, G και H είναι οι αντιπαράγωγοι των f, g και h αντίστοιχα, από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού έχουμε:

$$\int_a^b f(x)\, dx \;=\; F(b) \;-\; F(a)\,, \qquad \int_c^d g(y)\, dy \;=\; G(d) \;-\; G(c)\,, \qquad \int_u^v h(z)\, dz \;=\; H(v) \;-\; H(u)\,.$$

Θα δείξουμε λοιπόν ότι

$$I \;=\; \int_a^b \int_c^d \int_u^v f(x)\, g(y)\, h(z)\, dzdydx \;=\; [F(b) \;-\; F(a)]\,[G(d) \;-\; G(c)]\,[H(v) \;-\; H(u)]\,.$$

Ολοκληρώνοντας διαδοχικά έχουμε:

$$\begin{aligned}
I \;&=\; \int_a^b \int_c^d \left[f(x)\, g(y)\, H(z)\right]_u^v \, dydx \\
&=\; \int_a^b \int_c^d f(x)\, g(y)\, [H(v) \;-\; H(u)]\, dydx \\
&=\; [H(v) \;-\; H(u)] \int_a^b \left[f(x)\, G(y)\right]_c^d \, dx \\
&=\; [H(v) \;-\; H(u)] \int_a^b f(x)\, [G(d) \;-\; G(c)]\, dx \\
&=\; [G(d) \;-\; G(c)]\,[H(v) \;-\; H(u)] \int_a^b f(x)\, dx \\
&=\; [F(b) \;-\; F(a)]\,[G(d) \;-\; G(c)]\,[H(v) \;-\; H(u)]\,.
\end{aligned}$$

Πρόβλημα 5.

(α) Βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα $(0,0,0)$, $(1,1,1)$ και $(0,-2,3)$. **3μ.**

(β) Βρείτε τα σημεία του ελλειψοειδούς

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$$

όπου το εφαπτόμενο επίπεδο είναι παράλληλο στο επίπεδο $3x$-y+$3z$=1. **5μ.**

(α) Παρατηρούμε ότι το πρώτο σημείο είναι η αρχή. Θεωρούμε λοιπόν τα διανύσματα

$$\mathbf{a} = (1,\, 1,\, 1) \quad \text{και} \quad \mathbf{b} = (0,\, -2,\, 3)$$

Για το εμβαδόν του τριγώνου ισχύει

$$E = \frac{1}{2}\,||\mathbf{a}\times\mathbf{b}||\,. \tag{i}$$

Βρίσκουμε το $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 5\,\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}\,.$$

Αντικαθιστώντας στην (i) παίρνουμε

$$E = \frac{1}{2}\,||\mathbf{a}\times\mathbf{b}|| = \frac{1}{2}\sqrt{25+9+4} = \frac{1}{2}\sqrt{38}\,.$$

(β) Γνωρίζουμε ότι ένα κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς

$$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1 = 0$$

σε κάποιο σημείο (x_0,y_0,z_0) της επιφάνειας είναι το

$$\nabla f(x_0,y_0,z_0) = (2x_0,\, 4y_0, 6z_0)\,.$$

Αν τώρα στο σημείο αυτό το εφαπτόμενο στην επιφάνεια επίπεδο είναι παράλληλο στο επίπεδο $3x$-y+$3z$=1, τότε ισχύει

$$(2x_0,\, 4y_0, 6z_0) = a\,(3,\, -1,\, 3)\,, \quad a\in\mathbf{R}-\{0\} \quad \Longrightarrow$$

$$x_0 = \frac{3a}{2}\,, \quad y_0 = -\frac{a}{4}\,, \quad z_0 = \frac{a}{2}\,.$$

Επειδή το (x_0,y_0,z_0) είναι σημείο της επιφάνειας έχουμε

$$x_0^2+2y_0^2+3z_0^2 = 1 \quad\Longrightarrow\quad \left(\frac{3a}{2}\right)^2+2\left(-\frac{a}{4}\right)^2+3\left(\frac{a}{2}\right)^2 = 1 \quad\Longrightarrow\quad \frac{25}{8}a^2 = 1 \quad\Longrightarrow\quad a = \pm\frac{2\sqrt{2}}{5}.$$

Άρα έχουμε δύο σημεία της επιφάνειας του ελλειψοειδούς που ικανοποιούν τη συνθήκη της εκφώνησης:

$$\left(\pm\frac{3\sqrt{2}}{5},\, \mp\frac{1}{5\sqrt{2}},\, \pm\frac{\sqrt{2}}{5}\right)$$

Πρόβλημα 6.

(α) Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x,y) \;=\; x^3 \;-\; 3xy^2$$

είναι **αρμονική**. **2μ.**

(β) Βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της

$$f(x,y,z) \;=\; xy^2 \;+\; y^2z^3 \;+\; z^3x$$

στην κατεύθυνση του $\mathbf{v}=(\mathbf{i}+3\mathbf{j}+2\mathbf{k})/\sqrt{14}$ στο $(4,-2,1)$. **3μ.**

(α) Πρέπει να δείξουμε ότι η f επαληθεύει την εξίσωση Laplace: $\nabla^2 f=0$. Βρίσκουμε τις μερικές παραγώγους:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \;=\; 3x^2 \;-\; 3y^2\,, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \;=\; 6x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \;=\; -6xy\,, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \;=\; -6x$$

Επειδή

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \;+\; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \;=\; 6x \;-\; 6x \;=\; 0\,,$$

η f είναι αρμονική.

(β) Χρησιμοποιούμε τη σχέση

$$\left.\frac{d}{dt} f(\mathbf{x} \;+\; t\mathbf{v})\right|_{t=0} \;=\; \nabla f(\mathbf{x})\cdot\mathbf{v}\,.$$

Επειδή

$$\nabla f \;=\; \left(\, y^2+z^3,\; 2xy+2yz^3,\; 3y^2z^2+3z^2x\right)$$

στο $(4,-2,1)$ έχουμε

$$\nabla f \;=\; (5,\; -20,\; 24)\,.$$

Άρα

$$\nabla f(\mathbf{x})\cdot\mathbf{v} \;=\; (5,\; -20,\; 24)\cdot(1,\; 3, 2)\,/\sqrt{14} \;=\; -\frac{7}{\sqrt{14}}\,.$$

Πρόβλημα 7.

Αν $z=f(x,y)$ όπου

$$x = s + t \quad \text{και} \quad y = s - t$$

δείξτε ότι

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)$$

5μ.

Βρίσκουμε τις $\partial z/\partial s$ και $\partial z/\partial t$ χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}(1) + \frac{\partial z}{\partial y}(1) = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \\
\frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}(1) + \frac{\partial z}{\partial y}(-1) = \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}
\end{aligned}$$

Από τις πιο πάνω σχέσεις παίρνουμε:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

Πρόβλημα 8.
Αν το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$ είναι **αστρόβιλο** και

$$\mathbf{r} \,=\, x\mathbf{i} \,+\, y\mathbf{j} \,+\, z\mathbf{k}\,.$$

δείξτε ότι το $(\mathbf{F}\times\mathbf{r})$ είναι **ασυμπίεστο**. **8μ.**

1ος τρόπος
Υποθέτουμε ότι

$$\mathbf{F} \,=\, F_1\mathbf{i} \,+\, F_2\mathbf{j} \,+\, F_3\mathbf{k}\,.$$

Εφόσον το $\mathbf{F}$ είναι αστρόβιλο, ισχύει $\nabla\times\mathbf{F}=\mathbf{0}$ και έτσι

$$\left(\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} \,+\, \left(\frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} \,+\, \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{k} \,=\, \mathbf{0} \quad\Longrightarrow$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z} \,=\, 0\,, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{\partial F_3}{\partial x} \,=\, 0\,, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y} \,=\, 0 \tag{i}$$

Για το $(\mathbf{F}\times\mathbf{r})$ έχουμε

$$\mathbf{F}\times\mathbf{r} \,=\, \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ F_1 & F_2 & F_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} \,=\, (F_2z \,-\, F_3y)\,\mathbf{i} \,+\, (F_3x \,-\, F_1z)\,\mathbf{j} \,+\, (F_1z \,-\, F_2x)\mathbf{k}\,.$$

Άρα

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot(\mathbf{F}\times\mathbf{r}) &= \frac{\partial}{\partial x}(F_2z \,-\, F_3y) \,+\, \frac{\partial}{\partial y}(F_3x \,-\, F_1z) \,+\, \frac{\partial}{\partial z}(F_1y \,-\, F_2x) \\
&= z\frac{\partial F_2}{\partial x} \,-\, y\frac{\partial F_3}{\partial x} \,+\, x\frac{\partial F_3}{\partial y} \,-\, z\frac{\partial F_1}{\partial y} \,+\, y\frac{\partial F_1}{\partial z} \,-\, x\frac{\partial F_2}{\partial z} \\
&= z\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} \,-\, \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) \,+\, x\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} \,-\, \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) \,+\, y\left(\frac{\partial F_1}{\partial z} \,-\, \frac{\partial F_3}{\partial x}\right) \,=\, 0
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την (i). Άρα το $(\mathbf{F}\times\mathbf{r})$ είναι ασυμπίεστο.

2ος τρόπος
Από τη γνωστή διανυσματική ταυτότητα ισχύει

$$\nabla\cdot(\mathbf{F}\times\mathbf{r}) \,=\, \mathbf{r}\cdot(\nabla\times\mathbf{F}) \,-\, \mathbf{F}\cdot(\nabla\times\mathbf{r})\,.$$

Εφόσον το $\mathbf{F}$ είναι αστρόβιλο, ισχύει $\nabla\times\mathbf{F}=\mathbf{0}$ και έτσι

$$\nabla\cdot(\mathbf{F}\times\mathbf{r}) \,=\, -\,\mathbf{F}\cdot(\nabla\times\mathbf{r})\,.$$

Επειδή τώρα

$$\nabla\times\mathbf{r} \,=\, \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} \,=\, \mathbf{0}$$

βρίσκουμε ότι

$$\nabla\cdot(\mathbf{F}\times\mathbf{r}) \,=\, \mathbf{0}\,.$$

Άρα το $(\mathbf{F}\times\mathbf{r})$ είναι ασυμπίεστο.

Πρόβλημα 9.
Δείξτε ότι

$$\frac{d}{dx}\int_a^x\int_c^d f(x,y,z)\,dzdy \;=\; \int_c^d f(x,x,z)\,dz \;+\; \int_a^x\int_c^d f_x(x,y,z)\,dzdy\,.$$

10μ.

1ος τρόπος
Χρησιμοποιούμε τον κανόνα της αλυσίδας και το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F(x,w) \;=\; \int_a^x\int_c^d f(w,y,z)\,dzdy$$

όπου $w{=}w(x)$. Από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$\frac{dF}{dx} \;=\; \frac{\partial F}{\partial x} \;+\; \frac{\partial F}{\partial w}\frac{dw}{dx} \quad\Longrightarrow$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_a^x\int_c^d f(w,y,z)\,dzdy \;&=\; \frac{\partial}{\partial x}\int_a^x\int_c^d f(w,y,z)\,dzdy \;+\; \frac{\partial}{\partial w}\int_a^x\int_c^d f(w,y,z)\,dzdy\,\frac{dw}{dx}\\ &=\; \int_c^d f(w,x,z)\,dz \;+\; \int_a^x\int_c^d f_w(w,y,z)\,dzdy\,\frac{dw}{dx}\end{aligned}$$

Θέτοντας $w{=}x$ βρίσκουμε τη ζητούμενη σχέση.

2ος τρόπος
Χρησιμοποιούμε τον ορισμό της παραγώγου.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x\int_c^d f(x,y,z)\,dzdy \;=\; \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\int_a^{x+\Delta x}\int_c^d f(x+\Delta x,y,z)\,dzdy \;-\; \int_a^x\int_c^d f(x,y,z)\,dzdy\right].$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\Delta x > 0$, οπότε

$$\begin{aligned}A \;&=\; \frac{d}{dx}\int_a^x\int_c^d f(x,y,z)\,dzdy\\ &=\; \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\int_a^x\int_c^d f(x+\Delta x,y,z)\,dzdy \;+\; \int_x^{x+\Delta x}\int_c^d f(x+\Delta x,y,z)\,dzdy \;-\; \int_a^x\int_c^d f(x,y,z)\,dzdy\right]\\ &=\; \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\int_a^x\int_c^d \{f(x+\Delta x,y,z) \;-\; f(x,y,z)\}\,dzdy \;+\; \int_x^{x+\Delta x}\int_c^d f(x+\Delta x,y,z)\,dzdy\right]\\ &=\; \int_a^x\int_c^d \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y,z) \;-\; f(x,y,z)}{\Delta x}\,dzdy \;+\; \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x}\int_c^d f(x+\Delta x,y,z)\,dzdy\\ &=\; \int_a^x\int_c^d f_x(x,y,z)\,dzdy \;+\; \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x}\int_c^d f(x+\Delta x,y,z)\,dzdy\end{aligned}$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι

$$I \;=\; \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x}\int_c^d f(x+\Delta x,y,z)\,dzdy \;=\; \int_c^d f(x,x,z)\,dz$$

Από το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi\in[x,x+\Delta x]$ τέτοιο ώστε

$$\int_x^{x+\Delta x}\int_c^d f(x+\Delta x,y,z)\,dzdy \;=\; \int_c^d f(x+\Delta x,\xi,z)\,dz\,(\Delta x)$$

Επειδή $\xi \to x$ καθώς $\Delta x \to 0$ βρίσκουμε ότι

$$I \;=\; \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \int_c^d f(x+\Delta x, \xi, z)\, dz\, (\Delta x) \;=\; \int_c^d f(x, x, z)\, dz$$

και η πρόταση έχει αποδειχθεί.

Πρόβλημα 10.
Έστω P το παραλληλόγραμμο με κορυφές τα σημεία:

$$A(0,0), \quad B(4,1), \quad C(5,2) \;\; \text{και} \;\; D(1,1)$$

(α) Αν P^* είναι το μοναδιαίο τετράγωνο με κορυφές τα

$$(0,0), \quad (1,0), \quad (1,1) \;\; \text{και} \;\; (0,1)$$

να βρεθεί 1-1 μετασχηματισμός $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ τέτοιος ώστε

$$P \; = \; T(P^*)$$

5μ.

(β) Υπολογίστε τη ***μέση τιμή*** της

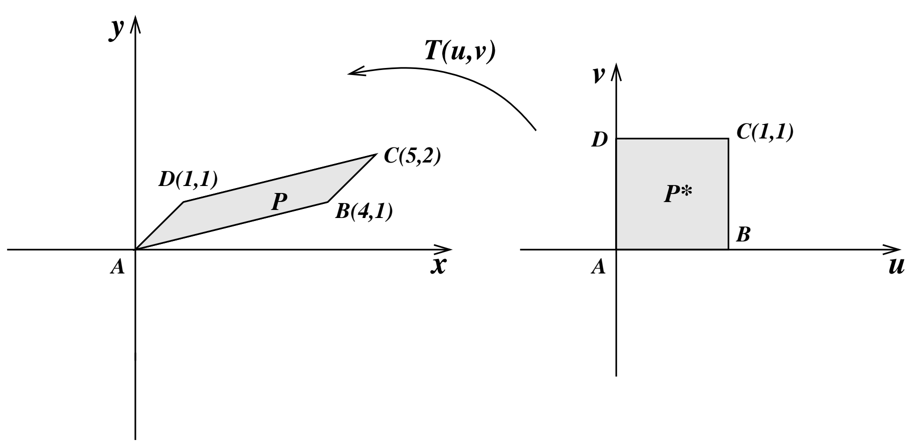
$$f(x,y) \; = \; x^2 \; - \; y^2$$

στο χωρίο P. **10μ.**

(α) Το παραλληλόγραμμο μετασχηματίζεται σε παραλληλόγραμμο με γραμμικό μετασχηματισμό της μορφής

$$T(u,v) \; = \; (au \; + \; bv, \; cu \; + \; dv)$$

Βρίσκουμε τις σταθερές a, b, c, d απαιτώντας οι κορυφές του P^* να απεικονίζονται στις κορυφές του P όπως φαίνεται στο σχήμα.



$$\begin{array}{llllllllllll}
A: & T(0,0) & = & (0,0) & & & & & & & & \\
B: & T(1,0) & = & (4,1) & \Longrightarrow & (a,c) = (4,1) & \Longrightarrow & a = 4 & \text{και} & c = 1 \\
D: & T(0,1) & = & (1,1) & \Longrightarrow & (b,d) = (1,1) & \Longrightarrow & b = 1 & \text{και} & d = 1
\end{array}$$

Άρα ο ζητούμενος μετασχηματισμός είναι ο

$$T(u,v) \; = \; (4u \; + \; v, \; u \; + \; v)\,, \quad (u,v) \in [0,1] \times [0,1]$$

(β) Για την Ιακωβιανή του μετασχηματισμού έχουμε

$$J \; = \; \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \; = \; \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \; = \; \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \; = \; 3$$

Βρίσκουμε πρώτα το εμβαδόν του χωρίου P έχουμε:

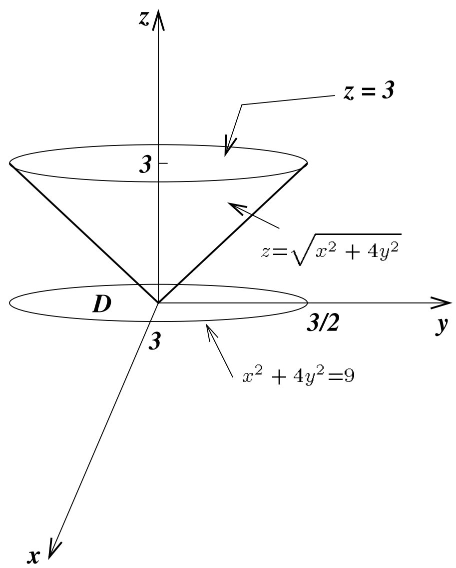
$$A(P) \;=\; \int_P \, dxdy \;=\; \int_{P^*} \,|J|\, dudv \;=\; \int_0^1 \int_0^1 3\, dudv \;=\; 3\,.$$

Η μέση τιμή της f στο P είναι

$$\begin{aligned}
\bar{f} \;&=\; \frac{1}{A(P)} \int_P (x^2 - y^2)\, dxdy \;=\; \frac{1}{3}\int_0^1 \int_0^1 \left[(4u+v)^2 \;-\; (u+v)^2\right] \,|J|\, dudv \\
&=\; \frac{1}{3}\int_0^1 \int_0^1 (5u \;+\; 2v)\,(3u)\,3\, dudv \;=\; 3\int_0^1 \int_0^1 (5u^2 \;+\; 2uv)\, dvdu \\
&=\; 3\int_0^1 \left[5u^2 v \;+\; uv^2\right]_{v=0}^{v=1} du \;=\; 3\int_0^1 (5u^2 \;+\; u)\, du \;=\; 3\left[5\frac{u^3}{3} \;+\; \frac{u^2}{2}\right]_0^1 \;=\; \frac{13}{2}
\end{aligned}$$

Πρόβλημα 11.

Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού που περικλείεται από την επιφάνεια $z=\sqrt{x^2+4y^2}$ και το επίπεδο $z=3$. **10μ.**



Το στερεό Ω φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Για να βρούμε το επίπεδο χωρίο D βρίσκουμε την τομή της επιφάνειας $z=\sqrt{x^2+4y^2}$ με το επίπεδο $z=3$:

$$3 \;=\; \sqrt{x^2+4y^2} \quad\Longrightarrow\quad x^2 \,+\, 4y^2 \;=\; 9\,.$$

Το D είναι το ελλειπτικό χωρίο που φαίνεται στο σχήμα. Για τον όγκο του στερεού έχουμε:

$$\begin{aligned} V(\Omega) &= \iiint_\Omega dV \\ &= \iint_D \int_{\sqrt{x^2+4y^2}}^{3} dz\, dA \\ &= \iint_D \left(3 \,-\, \sqrt{x^2+4y^2}\right) dydx \end{aligned}$$

Το διπλό ολοκλήρωμα δεν μπορεί να υπολογιστεί εύκολα σε καρτεσιανές συντεταγμένες. Θεωρούμε τον μετασχηματισμό:

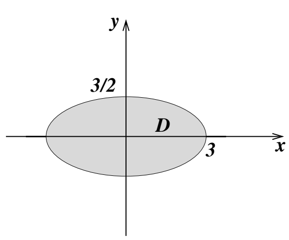
$$x \;=\; 3\,r\cos\theta\,, \qquad y \;=\; 3/2\,r\sin\theta\,,$$

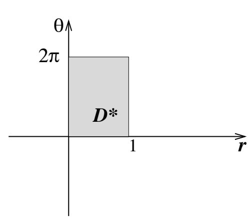
με Ιακωβιανή την

$$J \;=\; \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \;=\; \begin{vmatrix} 3\,\cos\theta & -3\,r\sin\theta \\ 3/2\,\sin\theta & 3/2\,r\cos\theta \end{vmatrix} \;=\; \frac{9}{2}\,r\,.$$

Με τον πιο πάνω μετασχηματισμό

$$x^2+4y^2 \;=\; 9r^2\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right) \;=\; 9r^2\,.$$





Όπως φαίνεται και στο σχήμα, τα όρια ολοκλήρωσης στις πολικές συντεταγμένες (r,θ) είναι:

$$0 \le \theta \le 2\pi \quad \text{και} \quad 0 \le r \le 1\,.$$

Για το ολοκλήρωμά μας έχουμε τώρα

$$V(\Omega) \;=\; \iint_{D^*} (3 \,-\, 3r)\,|J|\,drd\theta \;=\; \frac{27}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 (1\,-\,r)\,r\,drd\theta \;=\; 27\pi\left[\frac{r^2}{2} \,-\, \frac{r^3}{3}\right]_0^1 \;=\; \frac{9\pi}{2}$$

Πρόβλημα 12.

(α) Σχεδιάστε το τρισδιάστατο χωρίο

$$T \;=\; \left\{(x,y,z)\in \mathbf{R}^3 \;:\; x^2+y^2+z^2\le 9,\;\; z\ge \sqrt{x^2+y^2}\,\right\}$$

3μ.

(β) Σχεδιάστε το χωρίο T^* που προκύπτει μετασχηματίζοντας το T σε σφαιρικές συντεταγμένες με

$$x=r\cos\theta\sin\phi\,,\quad y=r\sin\theta\sin\phi\,,\quad z=r\cos\phi\,.$$

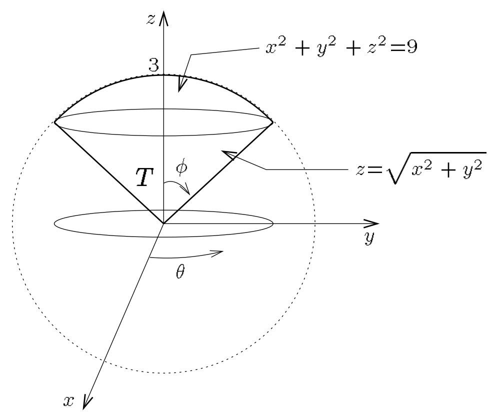
2μ.

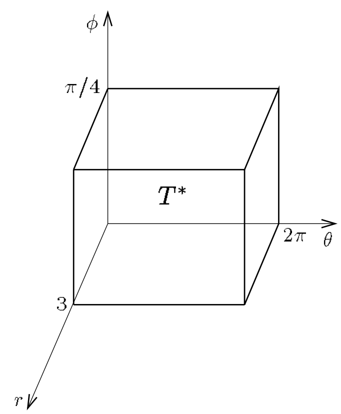
(γ) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_T (x^2+y^2)\,dxdydz$$

10μ.

(α) Το T φράσσεται από σφαίρα με κέντρο την αρχή και ακτίνα ίση με 3 και τον κώνο $z{=}\sqrt{x^2+y^2}$ όπως φαίνεται στο σχήμα:





(β) Είναι φανερό ότι το r παίρνει τιμές από το 0 (κορυφή του κώνου) μέχρι 3 (ακτίνα της σφαίρας) και ότι το θ παίρνει τιμές από 0 έως 2π. Επειδή η γενέτειρα του κώνου $z{=}\sqrt{x^2+y^2}$ σχηματίζει ως γνωστό γωνία $\pi/4$ με τον άξονα των z, η γωνία ϕ παίρνει τιμές από 0 έως $\pi/4$. Άρα τα όρια των r,θ και ϕ είναι:

$$0\le r\le 3\,,\quad 0\le\theta\le 2\pi\,,\quad 0\le\phi\le\frac{\pi}{4}\,.$$

Το T^* είναι ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο όπως φαίνεται στο σχήμα.

(γ)

$$\begin{aligned}
I &= \int_T (x^2+y^2)\,dxdydz \;=\; \int_{T^*}\left[r^2\cos^2\theta\sin^2\phi + r^2\sin^2\theta\sin^2\phi\right]|J|\,drd\theta d\phi \\
&= \int_0^3\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi} r^2\sin^2\phi\, r^2\sin\phi\, d\theta d\phi dr \;=\; \int_0^3\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi} r^4\left(1-\cos^2\phi\right)\sin\phi\, d\theta d\phi dr \\
&= 2\pi\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^3\left[-cos\phi \;+\; \frac{\cos^3\phi}{3}\right]_0^{\pi/4} \;=\; \frac{81\pi}{10}\,(8\;-\;5\sqrt{2})
\end{aligned}$$

Πρόβλημα 13.
Έστω η έλικα $\boldsymbol{\sigma}\colon [0,4\pi] \to \mathbf{R}^3$ με τύπο

$$\boldsymbol{\sigma}(t) \;=\; (\cos 2t,\; \sin 2t,\; \sqrt{5}t)$$

(α) Βρείτε το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα της έλικας στο $\boldsymbol{\sigma}(\pi/2)$. **2μ.**
(β) Βρείτε την εφαπτομένη της $\boldsymbol{\sigma}$ στο $\boldsymbol{\sigma}(\pi/2)$. **2μ.**
(γ) Βρείτε το μήκος τόξου της έλικας. **2μ.**
(δ) Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της

$$f(x,y,z) \;=\; x^2 \;+\; 2y^2 \;+\; z^3$$

κατά μήκος της έλικας. **4μ.**
(ε) Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της

$$\mathbf{F}(x,y,z) \;=\; \left(x^2+y^2-y,\; x+y,\; x-z\right)$$

κατά μήκος της έλικας. **5μ.**

(α)

$$\boldsymbol{\sigma}'(t) \;=\; (-2\sin 2t,\; 2\cos 2t,\; \sqrt{5})$$

οπότε

$$||\boldsymbol{\sigma}'(t)|| \;=\; \sqrt{4\sin^2 2t \;+\; 4\cos^2 2t \;+\; 5} \;=\; 3\,.$$

Το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα είναι γενικά το:

$$\mathbf{T}(t) \;=\; \frac{\boldsymbol{\sigma}'(t)}{||\boldsymbol{\sigma}'(t)||} \;=\; \frac{1}{3}\,(-2\sin 2t,\; 2\cos 2t,\; \sqrt{5})$$

οπότε

$$\mathbf{T}(\pi/2) \;=\; \frac{1}{3}\,(0,\; -2,\; \sqrt{5})$$

(β) Η εξίσωση της εφαπτομένης της $\boldsymbol{\sigma}$ στο $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{t}_0)$ δίνεται σε παραμετρική μορφή από την

$$I(\lambda) \;=\; \boldsymbol{\sigma}(t_0) \;+\; \lambda\,\boldsymbol{\sigma}'(t_0)\,.$$

Για $t{=}\pi/2$ έχουμε

$$I(\lambda) \;=\; (-1,\; 0,\; \sqrt{5}\pi/2) \;+\; \lambda\,(0,\; -2,\; \sqrt{5}) \;=\; \left(-1,\; -2\lambda,\; \frac{\sqrt{5}\pi}{2} \;+\; \sqrt{5}\lambda\right)\,.$$

(γ) Για το μήκος τόξου από το $t{=}0$ στο $t{=}4\pi$, έχουμε

$$\ell(\boldsymbol{\sigma}) \;=\; \int_0^{4\pi} ||\boldsymbol{\sigma}'(t)||\,dt \;=\; \int_0^{4\pi} 3\,dt \;=\; 12\pi\,.$$

(δ)

$$\begin{aligned}
\int_{\boldsymbol{\sigma}(t)} f\,ds \;&=\; \int_0^{4\pi} f(\boldsymbol{\sigma}(t))\,||\boldsymbol{\sigma}'(t)||\,dt \;=\; \int_0^{4\pi} \left(\cos^2 2t \;+\; 2\sin^2 2t \;+\; 5\sqrt{5}t^3\right)\,3\,dt \\
&=\; 3\int_0^{4\pi} \left(1 \;+\; \sin^2 2t \;+\; 5\sqrt{5}t^3\right)\,dt \;=\; 3\,\left[t \;+\; \frac{t}{2} \;-\; \frac{\sin 4t}{8} \;+\; \frac{5\sqrt{5}t^4}{4}\right]_0^{4\pi} \\
&=\; 6\pi\,(3 \;+\; 640\sqrt{5}\pi^2)
\end{aligned}$$

(ε)

$$
\begin{aligned}
\int_{\boldsymbol{\sigma}(t)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_0^{4\pi} F(\boldsymbol{\sigma}(t)) \cdot \boldsymbol{\sigma}'(t)\, dt \\
&= \int_0^{4\pi} \Big(1 - \sin 2t,\ \cos 2t + \sin 2t,\ \cos 2t - \sqrt{5}t\Big) \cdot (-2\sin 2t,\ 2\cos 2t, \sqrt{5})\, dt \\
&= \int_0^{4\pi} \Big(-2\sin 2t \ + \ 2\sin^2 2t \ + \ 2\cos^2 2t \ + \ 2\sin 2t\ \cos 2t \ + \ \sqrt{5}\cos 2t \ - \ 5t\Big)\ dt \\
&= \int_0^{4\pi} \Big(2 - 2\sin 2t \ + \ \sin 4t \ + \ \sqrt{5}\cos 2t \ - \ 5t\Big)\ dt \\
&= \left[2t \ + \ \cos 2t \ - \ \frac{\cos 4t}{4} \ + \ \frac{\sqrt{5}}{2}\sin 2t \ - \ \frac{5t^2}{2}\right]_0^{4\pi} \ = \ 8\pi\,(1 \ - \ 5\pi)
\end{aligned}
$$