ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ (ΜΑΣ181) - 15 Οκτωβρίου 2003 (♡♡)

Όνομα: **ΑΠΤ:**

Πρόβλημα 1.

(α) Διατυπώστε τους πιο κάτω ορισμούς:

(i) **Κλίση** βαθμωτού πεδίου. **2μ.**

(ii) **Κατά κατεύθυνση παράγωγος**. **3μ.**

(β) Αποδείξτε το πιο κάτω θεώρημα:

Έστω $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$. Αν $\nabla f \neq \mathbf{0}$ τότε η κλίση ∇f δείχνει την κατεύθυνση κατά μήκος της οποίας η f αυξάνει γρηγορότερα. **10μ.**

(γ) Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που εφάπτεται στην επιφάνεια

$$z = x^3 + y^3 - 6xy$$

στο σημείο $(1, 2, -3)$. **10μ.**

(α) (i) Έστω f ένα C^1 βαθμωτό πεδίο στον $\mathbf{R}^3$. Η **κλίση** (gradient) του f ορίζεται ως εξής:

$$grad\, f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) .$$

(ii) Η **κατά κατεύθυνση παράγωγος** της $f : U \subset \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$ στο $\mathbf{x}$ στην κατεύθυνση ενός δοσμένου διανύσματος $\mathbf{v}$ ορίζεται από την

$$\left.\frac{d}{dt} f(\mathbf{x} + t\mathbf{v})\right|_{t=0}$$

(β) Ο ρυθμός μεταβολής της f στην κατεύθυνση ενός μοναδιαίου διανύσματος $\mathbf{v}$ είναι

$$\nabla f \cdot \mathbf{v} = ||\nabla f|| \, ||\mathbf{v}|| \cos\theta = ||\nabla f|| \cos\theta ,$$

όπου θ η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα ∇f και $\mathbf{v}$. Ο ρυθμός μεταβολής μεγιστοποιείται όταν θ=0, δηλαδή όταν τα ∇f και $\mathbf{v}$ είναι παράλληλα. Άρα η κλίση ∇f δείχνει την κατεύθυνση κατά μήκος της οποίας η f αυξάνει γρηγορότερα.

(γ) Το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 - 6xy - z = 0$$

ορίζεται από την

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0) = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\left.(3x^2 - 6y,\ 3y^2 - 6x,\ -1)\right|_{(1,2,-3)} \cdot (x - 1,\ y - 2,\ z + 3) = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$(-9,\ 6,\ -1) \cdot (x - 1,\ y - 2,\ z + 3) = 0 \quad \Longrightarrow \quad -9x + 6y - z - 6 = 0$$

Πρόβλημα 2.

(α) Αν $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ και $r=||\mathbf{r}||$, δείξτε ότι

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

15μ.

(β) Επαληθεύστε ότι

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial z\partial y\partial x}$$

για την $f(x,y,z)=ze^{xy}+yz^3x^2$. **10μ.**

(α) Για την

$$f(x,y,z) = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= -\frac{x}{[x^2+y^2+z^2]^{3/2}} = -\frac{x}{r^3}\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= -\frac{y}{[x^2+y^2+z^2]^{3/2}} = -\frac{y}{r^3}\\
\frac{\partial f}{\partial z} &= -\frac{z}{[x^2+y^2+z^2]^{3/2}} = -\frac{z}{r^3}
\end{aligned}$$

Έτσι παίρνουμε

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x},\, \frac{\partial f}{\partial y},\, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = -\frac{(x,\ y,\ z)}{r^3} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}\,.$$

(β) Βρίσκουμε τις μερικές παραγώγους:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial z} &= e^{xy} + 3yz^2x^2\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = xe^{xy} + 3z^2x^2\\
\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\right) = e^{xy} + xye^{xy} + 6z^2x
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= zye^{xy} + 2yz^3x\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = ze^{xy} + zyxe^{xy} + 2z^3x\\
\frac{\partial^3 f}{\partial z\partial y\partial x} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right) = e^{xy} + xye^{xy} + 6z^2x
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι πράγματι

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial z\partial y\partial x}$$

Πρόβλημα 3.

(α) Υπολογίστε την κατευθυνόμενη παράγωγο της

$$f(x,y) \;=\; \log\sqrt{x^2+y^2}$$

στο $(x_0,y_0)=(1,0)$ με διεύθυνση $\mathbf{v}=\frac{1}{\sqrt{5}}(2\mathbf{i}+\mathbf{j})$. **10μ.**

(β) Αν $f=xy+yz+xz$, ποια είναι η κατεύθυνση της ταχύτερης αύξησης στο $(1,1,1)$; **5μ.**

(α) Επειδή

$$\frac{\partial f}{\partial x} \;=\; \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \;=\; \frac{x}{x^2+y^2} \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \;=\; \frac{y}{x^2+y^2}$$

έχουμε

$$\nabla f \;=\; \left(\frac{x}{x^2+y^2},\, \frac{y}{x^2+y^2}\right)\,.$$

Για τη ζητούμενη κατευθυνόμενη παράγωγο της f παίρνουμε

$$\nabla f|_{(1,0)}\cdot\mathbf{v} \;=\; (1,0)\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}(2,1) \;=\; \frac{2}{\sqrt{5}}\,.$$

(β) Η κατεύθυνση της ταχύτερης αύξησης στο $(1,1,1)$ είναι ως γνωστό η κλίση της f:

$$\nabla f(1,1,1) \;=\; (y+z,\; x+z,\; x+y)|_{(1,1,1)} \;=\; (2,2,2)\,.$$

Πρόβλημα 4.

(α) Αν f μια C^1 συνάρτηση και

$$z \;=\; f\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$$

δείξτε ότι

$$x\frac{\partial z}{\partial x} \;+\; y\frac{\partial z}{\partial y} \;=\; 0\,.$$

20μ.

(β) Προσδιορίστε τα διανύσματα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης και την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης

$$\boldsymbol{\sigma}(t) \;=\; (\cos^2 t,\; 3t - t^3,\; t)$$

στο t=0. **15μ.**

(α) Αν και μπορούμε να παραγωγίζουμε απευθείας, θέτουμε

$$z \;=\; f(u) \quad \text{με} \quad u \;=\; \frac{x+y}{x-y}\,.$$

Βρίσκουμε πρώτα τις πρώτες μερικές παραγώγους της u:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \;=\; \frac{x-y-x-y}{(x-y)^2} \;=\; -\frac{2y}{(x-y)^2} \quad \text{και} \quad \frac{\partial u}{\partial y} \;=\; \frac{2x}{(x-y)^2}\,.$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας παίρνουμε:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} \;=\; x\left(\frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + y\left(\frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial y}\right) \;=\; \frac{df}{du}\left(x\frac{\partial u}{\partial x} \;+\; y\frac{\partial u}{\partial y}\right) \;=\; \frac{df}{du}\left[-\frac{2xy}{(x-y)^2} + \frac{2xy}{(x-y)^2}\right] \;=\; 0\,.$$

(β) Για την ταχύτητα και την επιτάχυνση έχουμε:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}(t) &\;=\; \boldsymbol{\sigma}'(t) \;=\; (-2\cos t\sin t,\; 3-3t^2,\; 1)\\
\mathbf{a}(t) &\;=\; \mathbf{u}'(t) \;=\; (2\sin^2 t - 2\cos^2 t,\; -6t,\; 0)
\end{aligned}$$

Έτσι στο t=0 βρίσκουμε

$$\mathbf{u}(0) \;=\; (0,\,3,\,1) \quad \text{και} \quad \mathbf{a}(0) \;=\; (-2,\,0,\,0)\,.$$

Η εφαπτομένη της $\boldsymbol{\sigma}$ στο $\boldsymbol{\sigma}(0)$ δίνεται σε παραμετρική μορφή από την

$$\mathbf{l}(\lambda) \;=\; \boldsymbol{\sigma}(0) \;+\; \lambda\boldsymbol{\sigma}'(0) \;=\; (1,\,2,\,1) \;+\; \lambda\,(0,\,3,\,1) \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{l}(\lambda) \;=\; (1,\;2+3\lambda,\;1+\lambda)\,.$$