ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ (ΜΑΣ181) - 3 Οκτωβρίου 2003 (♡)

Όνομα: **ΑΠΤ:**

Πρόβλημα 1.

(α) Δείξτε ότι $(\mathbf{u}-\mathbf{v})\times(\mathbf{u}+\mathbf{v})=2(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$, όπου $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{R}^3$. **10μ.**

(β) Αν $a_1,\, a_2,\, a_3,\, b_1,\, b_2,\, b_3 \in \mathbf{R}$, δείξτε ότι

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\,(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$$

10μ.

(γ) Η εξίσωση

$$r^2 + z^2 = 4r\cos\theta + 6r\sin\theta + 2z - 5$$

είναι η εξίσωση μιας σφαίρας σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Να βρεθεί η εξίσωση και το κέντρο της σφαίρας σε καρτεσιανές συντεταγμένες καθώς επίσης και η ακτίνα της. **10μ.**

(α)

$$(\mathbf{u}-\mathbf{v})\times(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{u}\times\mathbf{u} - \mathbf{v}\times\mathbf{u} + \mathbf{u}\times\mathbf{v} + \mathbf{v}\times\mathbf{v} = \mathbf{0} + \mathbf{u}\times\mathbf{v} + \mathbf{u}\times\mathbf{v} + \mathbf{0} = 2(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\,.$$

(Χρησιμοποιήσαμε τις $\mathbf{u}\times\mathbf{u}=\mathbf{0}$ και $\mathbf{v}\times\mathbf{u}=-(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$.)

(β) Θεωρούμε τα διανύσματα

$$\mathbf{a} = (a_1,\, a_2,\, a_3) \quad \text{και} \quad \mathbf{b} = (b_1,\, b_2,\, b_3)$$

και χρησιμοποιούμε την ανισότητα Cauchy-Schwarz:

$$|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|^2 \le ||\mathbf{a}||^2\,||\mathbf{b}||^2 \quad\Longrightarrow\quad (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\,(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)\,.$$

(γ) Αντικαθιστούμε στην εξίσωση τις κυλινδρικές συντεταγμένες (r,θ,z) συναρτήσει των καρτεσιανών συνεταγμένων (x,y,z). Χρησιμοποιώντας τις ακόλουθες σχέσεις

$$r^2 = x^2 + y^2\,,\quad x = r\cos\theta\,,\quad y = r\sin\theta\,,\quad z = z\,,$$

παίρνουμε

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4x + 6y + 2z - 5 \quad\Longrightarrow\quad (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 9$$

Από την τελευταία εξίσωση βλέπουμε ότι η σφαίρα έχει κέντρο το σημείο $(2,3,1)$ και ακτίνα ίση με 3.

Πρόβλημα 2.
(α) Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου P_1 το οποίο περιέχει την ευθεία

$$\mathbf{l}(t) \;=\; (1+t,\, 1,\, -1+t)$$

και είναι κάθετο στο επίπεδο P_2 με καρτεσιανή εξίσωση

$$3x \;-\; y \;+\; z \;-\; 7 \;=\; 0$$

25μ.

(β) Βρείτε τον **πίνακα των μερικών παραγώγων** της συνάρτησης $\mathbf{f} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ με τύπο:

$$\mathbf{f}(x, y, z) \;=\; \left(\sqrt{x^2 \,+\, y^2},\; x \,+\, y^2 z^3\right)\,.$$

10μ.

(γ) Ποιες συνθήκες πρέπει να ικανοποιούνται για να είναι η $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ παραγωγίσιμη στο σημείο (x_0, y_0) του πεδίου ορισμού της; **5μ.**

(α) Για να βρούμε την εξίσωση του P_1 αρκεί να γνωρίζουμε ένα σημείο του (x_0, y_0, y_0) και ένα κάθετο προς το P_1 διάνυσμα $\mathbf{n}$=(n_1, n_2, n_3):

$$n_1(x - x_0) \;+\; n_2(y - y_0) \;+\; n_3(z - z_0) \;=\; 0 \qquad (i)$$

Αφού περιέχει την ευθεία

$$\mathbf{l}(t) \;=\; (1+t,\, 1,\, -1+t) \;=\; (1, 1, -1) \;+\; t\,(1,\, 0,\, 1)$$

το P_1 περιέχει το σημείο (x_0, y_0, y_0)=$(1, 1, -1)$ και είναι παράλληλο στο διάνυσμα

$$\mathbf{a} \;=\; (1,\, 0,\, 1)\,.$$

Αφού το P_1 είναι κάθετο στο επίπεδο P_2 θα είναι παράλληλο με το κάθετο προς το P_2 διάνυσμα

$$\mathbf{b} \;=\; (3,\, -1,\, 1)\,.$$

Αφού τα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ είναι παράλληλα προς το P_1, το εξωτερικό τους γινόμενο είναι κάθετο προς αυτό. Άρα μπορούμε να βρούμε ένα κάθετο προς το P_1 διάνυσμα:

$$\mathbf{n} \;=\; \mathbf{a} \times \mathbf{b} \;=\; \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} \;=\; \mathbf{i} \;+\; 2\mathbf{j} \;-\; \mathbf{k} \;=\; (1, 2, -1)\,.$$

Αντικαθιστώντας στην (i) παίρνουμε

$$(x-1) \;+\; 2(y-1) \;-\; (z+1) \;=\; 0 \quad\Longrightarrow\quad x \;+\; 2y \;-\; z \;-\; 4 \;=\; 0$$

(β)

$$D\mathbf{f} \;=\; \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} & \dfrac{\partial f_1}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} & \dfrac{\partial f_2}{\partial z} \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 \\[2ex] 1 & 2yz^3 & 3y^2z^2 \end{bmatrix}$$

(γ) Λέμε ότι η $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ είναι **παραγωγίσιμη** στο (x_0, y_0) αν υπάρχουν οι πρώτες μερικές της παράγωγοι, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ και $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, στο (x_0, y_0) και

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) \;-\; f(x_0,y_0) \;-\; \left[\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right](x \;-\; x_0) \;-\; \left[\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right](y \;-\; y_0)}{||(x,y) \;-\; (x_0,y_0)||} \;=\; 0\,.$$

Πρόβλημα 3.

(α) Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που εφάπτεται της επιφάνειας $z=e^{xy}$ στο σημείο $(1, 2, e^2)$. **20μ.**

(β) Βρείτε το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα προς το εφαπτόμενο επίπεδο που βρήκατε πιο πάνω. **5μ.**

(γ) Έστω τώρα η επιφάνεια $z=f(x,y)$. Θεωρώντας ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο (x_0, y_0), βρείτε το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα προς το επίπεδο που εφάπτεται της επιφάνειας στο σημείο αυτό. **5μ.**

(α) Για την εξίσωση του επιπέδου ισχύει

$$z \;=\; f(x_0,y_0) \;+\; \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right](x \,-\, x_0) \;+\; \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right](y \,-\, y_0)\,. \qquad (i)$$

Για τις μερικές παραγώγους της $f(x,y)=e^{xy}$ έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x} \;=\; y e^{xy} \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \;=\; x e^{xy}\,.$$

Αντικαθιστώντας στην (i) παίρνουμε:

$$z \;=\; e^2 \;+\; 2e^2\,(x-1) \;+\; e^2(y-2) \quad\Longrightarrow\quad -2e^2\,(x-1) \;-\; e^2(y-2) \;+\; (z-e^2) \;=\; 0$$

(β) Είναι φανερό ότι το

$$\mathbf{n}' \;=\; (-2e^2,\, -e^2,\, 1)$$

είναι κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο. Κανονικοποιώντας το $\mathbf{n}'$ βρίσκουμε το ζητούμενο μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα:

$$\mathbf{n} \;=\; \frac{\mathbf{n}'}{||\mathbf{n}'||} \;=\; \frac{(-2e^2,\, -e^2,\, 1)}{\sqrt{4e^4 \,+\, e^4 \,+\, 1}} \;=\; \left(-\frac{2e^2}{\sqrt{5e^4+1}},\, -\frac{e^2}{\sqrt{5e^4+1}},\, \frac{1}{\sqrt{5e^4+1}}\right)\,.$$

(γ) Είναι φανερό ότι η (i) είναι η εξίσωση επιπέδου που περιέχει το σημείο (x_0, y_0, z_0) όπου $z_0=f(x_0,y_0)$ και έχει κάθετο διάνυσμα το

$$\mathbf{n}' \;=\; \left(-\frac{\partial f}{\partial x},\, -\frac{\partial f}{\partial y},\, 1\right)\,.$$

Κανονικοποιώντας το $\mathbf{n}'$ βρίσκουμε το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα:

$$\mathbf{n} \;=\; \frac{\left(-\frac{\partial f}{\partial x},\, -\frac{\partial f}{\partial y},\, 1\right)}{\sqrt{1 \,+\, \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \,+\, \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}\,.$$