ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ (ΜΑΣ181) - 27 Νοεμβρίου 2002 (♡♡♡♡)

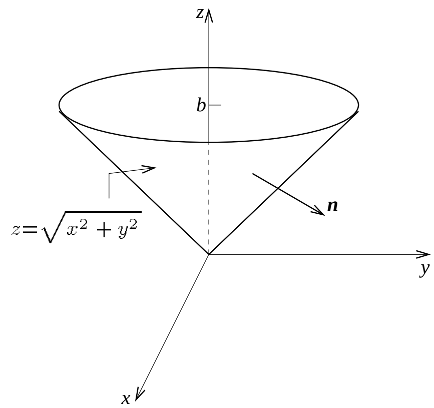
Όνομα: **ΑΠΤ:**

Πρόβλημα 1.

Έστω η κωνική επιφάνεια S, η οποία ορίζεται από την

$$z \;=\; \sqrt{x^2\,+\,y^2} \quad \mu\varepsilon \quad 0 \le z \le b\,,$$

και είναι **προσανατολισμένη** έτσι ώστε το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα να δείχνει προς τα έξω, όπως φαίνεται στο σχήμα.



(α) Δείξτε ότι η παραμετρικοποίηση

$$\mathbf{\Phi}(u,v) \;=\; (u\,\cos v,\; u\,\sin v,\; u) \quad \mu\varepsilon \quad 0 \le u \le b\,, \quad 0 \le v \le 2\pi\,,$$

αντιστρέφει τον προσανατολισμό. **30μ.**

(β) Ποια σημεία της S δεν είναι **λεία**; **10μ.**

(γ) Υπολογίστε το εμβαδόν της S ως επιφανειακό ολοκλήρωμα. **20μ.**

(δ) Αν η θερμοκρασία του κώνου είναι $T{=}2b^2 - x^2 - y^2 + z^2$ και η θερμική αγωγιμότητα είναι $k{=}1$, υπολογίστε τη ροή θερμότητας

$$\int_S -k\,\nabla T \cdot d\mathbf{S}$$

δια μέσου της S. **40μ.**

(α) Το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της κωνικής επιφάνειας

$$f(x,y,z) \;=\; \sqrt{x^2+y^2}\;-\;z \;=\; 0$$

είναι ένα από τα

$$\pm\,\frac{\nabla f}{||\nabla f||} \;=\; \pm\,\frac{\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\;\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\;-1\right)}{\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2+y^2}\;+\;\dfrac{y^2}{x^2+y^2}\;+\;1}} \;=\; \pm\,\frac{\left(\frac{x}{z},\;\frac{y}{z},\;-1\right)}{\sqrt{2}}\,.$$

Επειδή το $\mathbf{n}$ έχει αρνητική $\mathbf{k}$ συνιστώσα (βλ. σχήμα)

$$\mathbf{n} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\,\left(\frac{x}{z},\;\frac{y}{z},\;-1\right)$$

ή

$$\mathbf{n} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\cos v,\;\sin v,\;-1)\,.$$

Βρίσκουμε τώρα το $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$:

$$\mathbf{T}_u \;=\; \cos v\,\mathbf{i} \,+\, \sin v\,\mathbf{j} \,+\, \mathbf{k} \quad \text{και} \quad \mathbf{T}_v \;=\; -u\,\sin v\,\mathbf{i} \,+\, u\,\cos v\,\mathbf{j}$$

Έτσι

$$\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v \;=\; u\cos^2 v\,\mathbf{k} \;+\; u\,\sin^2 v\,\mathbf{k} \;-\; u\,\sin v\,\mathbf{j} \;-\; u\,\cos v\,\mathbf{i} \quad \Longrightarrow$$

$$\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v \;=\; -u\,(\cos v\,\mathbf{i} \;+\; \sin v\,\mathbf{j} \;-\; \mathbf{k}) \;=\; -\sqrt{2}\,u\,\mathbf{n}\,.$$

Επειδή $u \geq 0$, η παραμετρικοποίηση αντιστρέφει τον προσανατολισμό.

(β) Η S δεν είναι λεία στα σημεία όπου $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v = \mathbf{0}$. Αφού

$$||\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v|| \;=\; \sqrt{2}\,u$$

η S δεν είναι λεία για $u=0$, δηλ. στο $(0,0,0)$.

(γ)

$$A(S) \;=\; \int_{\mathbf{\Phi}} dS \;=\; \int_D ||\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v||\,dudv \;=\; \int_0^{2\pi}\int_0^b \sqrt{2}\,u\,dudv \;=\; 2\sqrt{2}\pi\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^b \;=\; \sqrt{2}\pi\,b^2\,.$$

(δ) Έχουμε

$$-k\,\nabla T \;=\; -1\,(-2x,\,-2y,\,2z) \;=\; 2\,(x,\,y,\,-z)$$

Για τη ροή θερμότητας έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_S -k\,\nabla T\cdot d\mathbf{S} \;&=\; \int_S -k\,\nabla T\cdot\mathbf{n}\,dS \;=\; \int_S 2\,(x,\,y,\,-z)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{z},\,\frac{y}{z},\,-1\right)\,dS\\
&=\; \sqrt{2}\int_S\left(\frac{x^2+y^2}{z} \;+\; z\right)\,dS \;=\; 2\sqrt{2}\int_S z\,dS\\
&=\; 2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^b u\,||\mathbf{T}_u\times\mathbf{T}_v||\,dudv \;=\; 4\int_0^{2\pi}\int_0^b u^2\,dudv\\
&=\; \frac{8\pi\,b^3}{3}
\end{aligned}$$

Το θετικό πρόσημο δηλώνει ότι η ροή θερμότητας έχει την ίδια φορά με το $\mathbf{n}$, δηλαδή έχουμε ροή θερμότητας προς τα έξω.