ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ (ΜΑΣ181)
ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΕΞΕΤΑΣΗ, 20 Νοεμβρίου 2002

Όνομα: **ΑΠΤ:**

Πρόβλημα 1.
Διατυπώστε τους ορισμούς των πιο κάτω:
(α) **Διανυσματικό πεδίο.** **1μ.**
(β) **Στροβιλισμός** διανυσματικού πεδίου. **1μ.**
(γ) **Ισοσταθμική καμπύλη.** **1μ.**
(δ) **Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα α′ είδους.** **2μ.**
(ε) **Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β′ είδους.** **2μ.**

(α) **Διανυσματικό πεδίο** (vector field) στον $\mathbf{R}^n$ είναι μια απεικόνιση της μορφής $\mathbf{F} : A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$.

(β) Έστω $\mathbf{F}{=}F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ ένα C^1 διανυσματικό πεδίο στον $\mathbf{R}^3$. Ο **στροβιλισμός** (vorticity) του $\mathbf{F}$ ορίζεται ως εξής:

$$curl\,\mathbf{F} \;=\; \nabla \times \mathbf{F} \;=\; \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} \;+\; \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} \;+\; \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

ή

$$\nabla \times \mathbf{F} \;=\; \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

(γ) Έστω $f : U \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ και $c \in \mathbf{R}$. Η **ισοσταθμική καμπύλη** με τιμή c ορίζεται σαν το σύνολο των σημείων $(x, y) \in U$ στα οποία $f(x, y){=}c$:

$$\text{Ισοσταθμική καμπύλη:} \quad \{(x, y) \in U \;:\; f(x, y) = c\}.$$

(δ) **Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα α′ είδους**
Έστω $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ βαθμωτό πεδίο συνεχές στη C^1 καμπύλη $\boldsymbol{\sigma} : [a, b] \to \mathbf{R}^3$. Το **επικαμπύλιο ολοκλήρωμα α′ είδους του f κατά μήκος της $\boldsymbol{\sigma}$** ορίζεται ως εξής:

$$\int_{\boldsymbol{\sigma}} f\, ds \;=\; \int_a^b f(\boldsymbol{\sigma}(t))\, ||\boldsymbol{\sigma}'(t)||\, dt\,.$$

(ε) **Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β′ είδους**
Έστω $\mathbf{F} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ διανυσματικό πεδίο συνεχές στη C^1 καμπύλη $\boldsymbol{\sigma} : [a, b] \to \mathbf{R}^3$. Το **επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β′ είδους του $\mathbf{F}$ κατά μήκος της $\boldsymbol{\sigma}$** ορίζεται ως εξής:

$$\int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \;=\; \int_a^b \mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \cdot \boldsymbol{\sigma}'(t)\, dt\,.$$

Πρόβλημα 2.

(α) Δείξτε ότι για το *βαθμωτό τριπλό γινόμενο* ισχύει

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) \;=\; \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) \;=\; \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$$

3μ.

(β) Δείξτε τον **κανόνα του παραλληλογράμμου** στον $\mathbf{R}^3$:

$$2||\mathbf{x}||^2 \;+\; 2||\mathbf{y}||^2 \;=\; ||\mathbf{x}\;+\;\mathbf{y}||^2 \;+\; ||\mathbf{x}\;-\;\mathbf{y}||^2$$

3μ.

(γ) Δείξτε ότι το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και έχει μήκος το μισό αυτής. **4μ.**

(α) Επειδή

$$\mathbf{b}\times\mathbf{c} \;=\; \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \;=\; (b_2c_3-b_3c_2)\,\mathbf{i} \;-\; (b_1c_3-b_3c_1)\,\mathbf{j} \;+\; (b_1c_2-b_2c_1)\,\mathbf{k}$$

έχουμε

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) \;=\; (b_2c_3-b_3c_2)\,a_1 \;-\; (b_1c_3-b_3c_1)\,a_2 \;+\; (b_1c_2-b_2c_1)\,a_3 \;=\; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Παρομοίως έχουμε

$$\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) \;=\; \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} \;=\; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \;=\; \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\,.$$

(Έχουμε δύο αντιμεταθέσεις γραμμών). Η δεύτερη ταυτότητα αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο.

(β) Έχουμε

$$||\mathbf{x}+\mathbf{y}||^2 \;=\; (\mathbf{x}+\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \;=\; \mathbf{x}\cdot\mathbf{x} \;+\; 2\,\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} \;+\; \mathbf{y}\cdot\mathbf{y} \;=\; ||\mathbf{x}||^2 \;+\; 2\,\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} \;+\; ||\mathbf{y}||^2$$

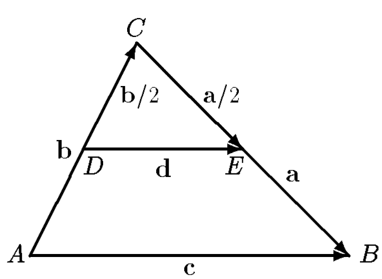
και

$$||\mathbf{x}-\mathbf{y}||^2 \;=\; (\mathbf{x}-\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \;=\; \mathbf{x}\cdot\mathbf{x} \;-\; 2\,\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} \;+\; \mathbf{y}\cdot\mathbf{y} \;=\; ||\mathbf{x}||^2 \;-\; 2\,\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} \;+\; ||\mathbf{y}||^2$$

Προσθέτοντας τις πιο πάνω σχέσεις βρίσκουμε τη ζητούμενη:

$$||\mathbf{x}+\mathbf{y}||^2 \;+\; ||\mathbf{x}-\mathbf{y}||^2 \;=\; 2\,||\mathbf{x}||^2 \;+\; 2\,||\mathbf{y}||^2\,.$$

(γ)



Έστω το τρίγωνο ABC που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αν $DE{=}\mathbf{d}$ η γραμμή που συνδέει τα μέσα των πλευρών AC και CB έχουμε:

$$\mathbf{d} \;=\; DC \;+\; CE \;=\; \frac{1}{2}\,\mathbf{b} \;+\; \frac{1}{2}\,\mathbf{a} \;=\; \frac{1}{2}\,\mathbf{c}\,.$$

Άρα το $\mathbf{d}$ είναι παράλληλο προς το $\mathbf{c}$ και έχει μέτρο το μισό αυτού.

Πρόβλημα 3.

(α) Διατυπώστε τον ορισμό **παραγωγίσιμης συνάρτησης** $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. **2μ.**

(β) Διατυπώστε τον ορισμό της **κατά κατεύθυνση παραγώγου**. **2μ.**

(γ) Βρείτε το ρυθμό μεταβολής της $f(x,y,z) = x^2(y-2z)$ στην κατεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$ στο $(3,2,1)$. **3μ.**

(α) Η συνάρτηση $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ είναι **παραγωγίσιμη** στο (x_0, y_0) αν οι μερικές παράγωγοι $\partial f/\partial x$ και $\partial f/\partial y$ υπάρχουν στο (x_0, y_0) και

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) \;-\; f(x_0,y_0) \;-\; \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right]\,(x-x_0) \;-\; \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right]\,(y-y_0)}{||(x,y) \;-\; (x_0,y_0)||} \;=\; 0\,.$$

(β) Η **κατά κατεύθυνση παράγωγος** της $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ στο σημείο $\mathbf{x}$ στη κατεύθυνση ενός διανύσματος $\mathbf{v}$ δίνεται από την

$$\left.\frac{d}{dt} f(\mathbf{x} \,+\, t\mathbf{v})\right|_{t=0}$$

(γ)

<u>1ος τρόπος</u>

Χρησιμοποιούμε τη σχέση

$$\left.\frac{d}{dt} f(\mathbf{x} \,+\, t\mathbf{v})\right|_{t=0} \;=\; \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}\,.$$

Επειδή

$$\nabla f \;=\; \big(\,2x(y-2z),\; x^2,\; -2x^2\big)\;,$$

στο $(3,2,1)$ είναι

$$\nabla f \;=\; (0,\; 9, -18)\,.$$

Άρα

$$\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} \;=\; (0,\; 9, -18) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\, -\frac{1}{\sqrt{2}},\, 0\right) \;=\; -\frac{9}{\sqrt{2}}\,.$$

<u>2ος τρόπος</u>

Για

$$\mathbf{x} \,+\, t\mathbf{v} \;=\; (3,\; 2,\; 1) \,+\, t\,\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\, -\frac{1}{\sqrt{2}},\, 0\right) \;=\; \left(3 + \frac{t}{\sqrt{2}},\, 2 - \frac{t}{\sqrt{2}},\, 1\right)$$

παίρνουμε

$$f(\mathbf{x} \,+\, t\mathbf{v}) \;=\; \left(3 \,+\, \frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 \left(2 - \frac{t}{\sqrt{2}} - 2\right) \;=\; -\frac{t}{\sqrt{2}}\,\left(3 \,+\, \frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2$$

και

$$\frac{df}{dt} \;=\; -\frac{3}{\sqrt{2}}\,\left(3 \,+\, \frac{t}{\sqrt{2}}\right)\,\left(1 \,+\, \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$$

Η ζητούμενη κατά κατεύθυνση παράγωγος είναι:

$$\left.\frac{df}{dt}\right|_{t=0} \;=\; -\frac{9}{\sqrt{2}}\,.$$

Πρόβλημα 4.

Έστω η επιφάνεια $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$. Βρείτε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου και το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο σημείο $(1, 1, \sqrt{2})$. **6μ.**

1ος τρόπος

Έχουμε ημισφαιρική επιφάνεια ($z \geq 0$) με κέντρο την αρχή και ακτίνα 2. Το κάθετο διάνυσμα σε κάποιο σημείο (x_0, y_0, z_0) της επιφάνειας είναι το

$$\mathbf{r} \;=\; x_0\,\mathbf{i} \;+\; y_0\,\mathbf{j} \;+\; z_0\,\mathbf{k}\,,$$

οπότε η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου είναι

$$x_0\,x \;+\; y_0\,y \;+\; z_0\,z \;+\; D \;=\; 0\,.$$

Επειδή το (x_0, y_0, z_0) είναι σημείο του επιπέδου

$$x_0^2 \;+\; y_0^2 \;+\; z_0^2 \;+\; D \;=\; 0 \quad\Longrightarrow\quad D \;=\; -4\,.$$

Άρα η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου είναι

$$x_0\,x \;+\; y_0\,y \;+\; z_0\,z \;-\; 4 \;=\; 0\,.$$

Για το σημείο $(1, 1, \sqrt{2})$ παίρνουμε την εξίσωση:

$$x \;+\; y \;+\; \sqrt{2}\,z \;-\; 4 \;=\; 0\,.$$

Το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα δίνεται γενικά από την

$$\mathbf{n} \;=\; \frac{\mathbf{r}}{||\mathbf{r}||} \;=\; \frac{x_0\,\mathbf{i} \;+\; y_0\,\mathbf{j} \;+\; z_0\,\mathbf{k}}{\sqrt{x_0^2 \;+\; y_0^2 \;+\; z_0^2}} \;=\; \frac{1}{2}\,(x_0\,\mathbf{i} \;+\; y_0\,\mathbf{j} \;+\; z_0\,\mathbf{k}) \;=\; \frac{1}{2}\,\mathbf{r}$$

Για το σημείο $(1, 1, \sqrt{2})$ παίρνουμε

$$\mathbf{n} \;=\; \frac{1}{2}\,\left(1,\; 1,\; \sqrt{2}\right)\,.$$

2ος τρόπος

Το εφαπτόμενο επίπεδο στο γράφημα της $f(x, y)$ στο σημείο (x_0, y_0) δίνεται από την

$$z \;=\; f(x_0, y_0) \;+\; \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right]\,(x - x_0) \;+\; \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right]\,(y - y_0)\,. \tag{i}$$

Για τις πρώτες μερικές παραγώγους της $f(x, y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$ έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x} \;=\; \frac{-2\,x}{2\,\sqrt{4-x^2-y^2}} \;=\; -\frac{x}{z} \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \;=\; -\frac{y}{z}\,,$$

οπότε

$$f(1, 1) \;=\; \sqrt{2}\,, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) \;=\; -\frac{1}{\sqrt{2}}\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) \;=\; -\frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Αντικαθιστώντας στην (i) έχουμε

$$z \;=\; \sqrt{2} \;-\; \frac{1}{\sqrt{2}}\,(x - 1) \;-\; \frac{1}{\sqrt{2}}\,(y - 1) \quad\Longrightarrow\quad x \;+\; y \;+\; \sqrt{2}\,z \;-\; 4 \;=\; 0\,.$$

Γνωρίζουμε ότι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο

$$Ax \;+\; By \;+\; Cz \;+\; D \;=\; 0$$

δίνεται από την

$$\mathbf{n} = \pm\frac{A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Άρα

$$\mathbf{n} = \pm\frac{1\mathbf{i} + 1\mathbf{j} + \sqrt{2}\mathbf{k}}{\sqrt{1+1+2}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

(Επιλέξαμε το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα με φορά προς τα πάνω, δηλ. με θετική τη z-συνιστώσα.)

<u>3ος τρόπος</u>

Γνωρίζουμε ότι το εφαπτόμενο επίπεδο επιφάνειας $f(x,y,z)=\kappa$ σε ένα σημείο (x_0,y_0,z_0) ορίζεται από την

$$\nabla f\,(x_0,y_0,z_0)\cdot(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0) = 0 \tag{ii}$$

Για την

$$f(x,y,z) = \sqrt{4-x^2-y^2} - z = 0$$

βρίσκουμε

$$\nabla f = \left(-\frac{x}{z}, -\frac{y}{z}, -1\right).$$

Αντικαθιστώντας στην (ii) παίρνουμε:

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -1\right)\cdot(x-1,\ y-1,\ z-\sqrt{2}) = 0 \quad\Longrightarrow$$

$$x + y + \sqrt{2}\,z - 4 = 0.$$

Για το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα ισχύει

$$\mathbf{n} = \pm\frac{\nabla f}{||\nabla f||} \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{n} = \pm\frac{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -1\right)}{\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

<u>4ος τρόπος</u>

Η επιφάνεια γράφεται σε παραμετρικοποιημένη μορφή ως εξής:

$$\mathbf{\Phi}(u,v) = \left(u,\ v,\ \sqrt{4-u^2-v^2}\right).$$

Για το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα ισχύει:

$$\mathbf{n} = \pm\frac{\mathbf{T}_u\times\mathbf{T}_v}{||\mathbf{T}_u\times\mathbf{T}_v||}.$$

Θα βρούμε λοιπόν το $\mathbf{T}_u\times\mathbf{T}_v$ στο (u,v)=(1,1):

$$\mathbf{T}_u\times\mathbf{T}_v = \left(1,\ 0,\ -\frac{u}{\sqrt{4-u^2-v^2}}\right)\times\left(0,\ 1,\ -\frac{v}{\sqrt{4-u^2-v^2}}\right) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -\frac{u}{\sqrt{4-u^2-v^2}} \\ 0 & 1 & -\frac{v}{\sqrt{4-u^2-v^2}} \end{vmatrix} \quad\Longrightarrow$$

$$\mathbf{T}_u\times\mathbf{T}_v = \left(\frac{u}{\sqrt{4-u^2-v^2}}, \frac{v}{\sqrt{4-u^2-v^2}}, 1\right).$$

Στο (u,v)=(1,1) έχουμε

$$\mathbf{T}_u\times\mathbf{T}_v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right) \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{n} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου δίνεται από την

$$n_1\,(x\,-\,x_0)\,+\,n_2\,(y\,-\,y_0)\,+\,n_3\,(z\,-\,z_0)\,=\,0 \qquad \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{2}\,(x\,-\,1)\,+\,\frac{1}{2}\,(y\,-\,1)\,+\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,(z\,-\,\sqrt{2})\,=\,0 \qquad \Longrightarrow \qquad x\,+\,y\,+\,\sqrt{2}\,z\,-\,4\,=\,0\,.$$

Πρόβλημα 5.
Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{j+k}{n}} \;=\; (e-1)^2$$

10μ.

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x,y) \;=\; e^{x+y}$$

στο τετράγωνο R=$[0,1]\times[0,1]$ και την κανονική διαμέριση του R σε $n\times n$ τετράγωνα:

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1\,, \qquad 0 = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = 1\,,$$

Έχουμε τότε

$$x_j \;=\; \frac{j}{n}\,, \qquad y_k \;=\; \frac{k}{n}\,, \qquad \Delta x \;=\; \frac{1}{n}\,, \qquad \Delta y \;=\; \frac{1}{n}\,.$$

Επιλέγοντας το $\mathbf{c}_{jk} = (x_j, y_k) \in R_{jk} = [x_j, x_{j+1}]\times[y_k, y_{k+1}]$ έχουμε το άθροισμα Riemann:

$$S_n \;=\; \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} f(\mathbf{c}_{jk})\,\Delta x\Delta y \;=\; \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{j+k}{n}}\,\frac{1}{n^2} \;=\; \frac{1}{n^2}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{j+k}{n}}\,.$$

Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} S_n \;=\; \int_R e^{x+y}\,dxdy \;=\; \int_0^1\!\!\int_0^1 e^{x+y}\,dxdy \;=\; \int_0^1 e^x\,dx\,\int_0^1 e^y\,dy \;=\; \left[e^x\right]_0^1\,\left[e^y\right]_0^1 \;=\; (e-1)^2\,.$$

Από τις πιο πάνω σχέσεις έχουμε τελικά:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{j+k}{n}} \;=\; \lim_{n\to\infty} S_n \;=\; (e-1)^2$$

Πρόβλημα 6.

(α) Αν οι f, g και h είναι συνεχείς στα $[a,b]$, $[c,d]$ και $[u,v]$ αντίστοιχα, δείξτε ότι

$$\int_a^b \int_c^d \int_u^v f(x)\, g(y)\, h(z)\, dzdydx \;=\; \left[\int_a^b f(x)\, dx\right] \left[\int_c^d g(y)\, dy\right] \left[\int_u^v h(z)\, dz\right].$$

5μ.

(β) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \int_1^2 \int_1^3 e^x \;\sin y\, z^3\, dzdydx$$

3μ.

(α) Αν F, G και H είναι οι αντιπαράγωγοι των f, g και h αντίστοιχα, από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού έχουμε:

$$\int_a^b f(x)\, dx \;=\; F(b) \,-\, F(a)\,, \qquad \int_c^d g(y)\, dy \;=\; G(d) \,-\, G(c)\,, \qquad \int_u^v h(z)\, dz \;=\; H(v) \,-\, H(u)\,.$$

Θα δείξουμε λοιπόν ότι

$$I \;=\; \int_a^b \int_c^d \int_u^v f(x)\, g(y)\, h(z)\, dzdydx \;=\; [F(b) \,-\, F(a)]\, [G(d) \,-\, G(c)]\, [H(v) \,-\, H(u)]\,.$$

Ολοκληρώνοντας διαδοχικά έχουμε:

$$\begin{aligned}
I \;&=\; \int_a^b \int_c^d \left[f(x)\, g(y)\, H(z)\right]_u^v \, dydx \\
&=\; \int_a^b \int_c^d f(x)\, g(y)\, [H(v) \,-\, H(u)]\, dydx \\
&=\; [H(v) \,-\, H(u)] \int_a^b \left[f(x)\, G(y)\right]_c^d \, dx \\
&=\; [H(v) \,-\, H(u)] \int_a^b f(x)\, [G(d) \,-\, G(c)]\, dx \\
&=\; [G(d) \,-\, G(c)]\, [H(v) \,-\, H(u)] \int_a^b f(x)\, dx \\
&=\; [F(b) \,-\, F(a)]\, [G(d) \,-\, G(c)]\, [H(v) \,-\, H(u)]\,.
\end{aligned}$$

(β)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_1^2 \int_1^3 e^x \;\sin y\, z^3\, dzdydx \;&=\; \left[\int_0^1 e^x\, dx\right] \left[\int_1^2 \sin y\, dy\right] \left[\int_1^3 h(z) z^3\right] \\
&=\; \left[e^x\right]_0^1 \left[-\cos y\right]_1^2 \left[\frac{z^4}{4}\right]_1^3 \\
&=\; \left(e^1 \,-\, e^0\right) \left(-\cos 2 \,+\, \cos 1\right) \left(\frac{81 \,-\, 1}{4}\right) \\
&=\; 20\, (e-1)\, (\cos 1 \,-\, \cos 2)\,.
\end{aligned}$$

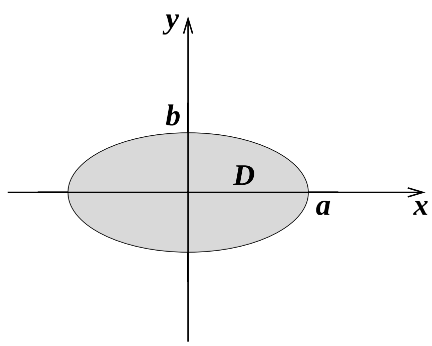
Πρόβλημα 7.
Να υπολογισθεί το διπλό ολοκλήρωμα

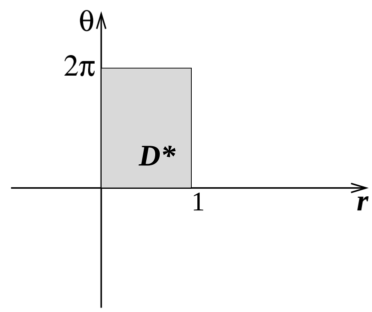
$$\iint_D e^{-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dxdy\,,$$

όπου D ο ελλειπτικός τόπος

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\,, \qquad a,b>0\,.$$

8μ.





Θεωρούμε τον μετασχηματισμό:

$$x \;=\; a\,r\cos\theta\,, \qquad y\;=\;b\,r\sin\theta\,,$$

η Ιακωβιανή του οποίου είναι η

$$J\;=\;\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\;=\;\begin{vmatrix} a\,\cos\theta & -a\,r\sin\theta \\ b\,\sin\theta & b\,r\cos\theta \end{vmatrix}\;=\;ab\,r\,.$$

Με τον πιο πάνω μετασχηματισμό

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\;=\;r^2\,(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\;=\;r^2\,.$$

Όπως φαίνεται και στο σχήμα, τα όρια ολοκλήρωσης στις πολικές συντεταγμένες (r,θ) είναι:

$$0\le\theta\le 2\pi \quad \text{και} \quad 0\le r\le 1\,.$$

Για το ολοκλήρωμά μας έχουμε τώρα

$$\iint_D e^{-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy=\int_0^{2\pi}\int_0^1 e^{-r^2}abrdrd\theta=\frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 e^{-r^2}dr^2=ab\pi\left[-e^{-r^2}\right]_0^1=ab\pi\left(1\,-\,\frac{1}{e}\right)$$

Πρόβλημα 8.
Αν D το χωρίο στο πρώτο τεταρτημόριο που ορίζεται από τις

$$x^2 - y^2 = 1\,, \quad x^2 - y^2 = 9\,, \quad xy = 2\,, \quad xy = 4\,,$$

υπολογίστε το ολοκλήρωμα:

$$\iint_D (x^2 + y^2)\, dxdy\,.$$

8μ.

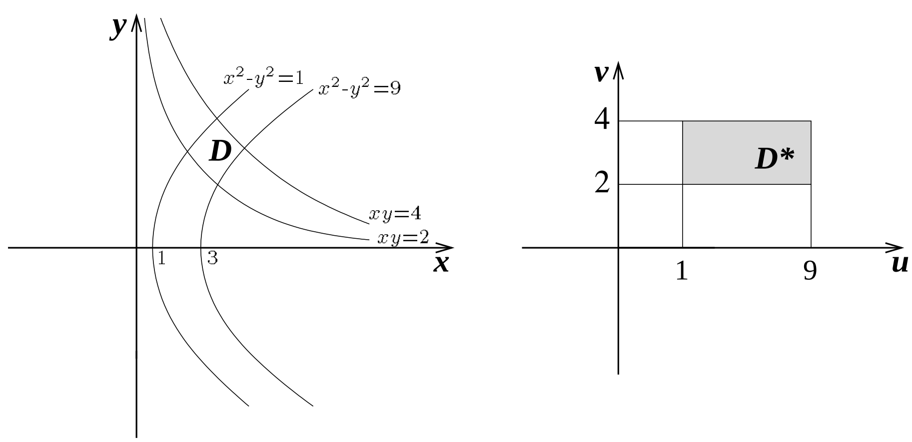
Θεωρούμε τον μετασχηματισμό:

$$u = x^2 - y^2\,, \quad v = xy$$

οπότε

$$1 \le u \le 9 \quad \text{και} \quad 2 \le v \le 4\,.$$

Έτσι, το χωρίο D του επιπέδου xy απεικονίζεται στο χωρίο D^* του επιπέδου uv.



Για την Ιακωβιανή του μετασχηματισμού έχουμε

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{vmatrix} = 2\,(x^2 + y^2)$$

οπότε

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1 \Big/ \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{1}{2\,(x^2+y^2)}\,.$$

Για το ολοκλήρωμα έχουμε:

$$\iint_D (x^2 + y^2)\, dxdy = \iint_{D^*} (x^2 + y^2) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv = \int_2^4 \int_1^9 \frac{1}{2}\, dudv = 8$$

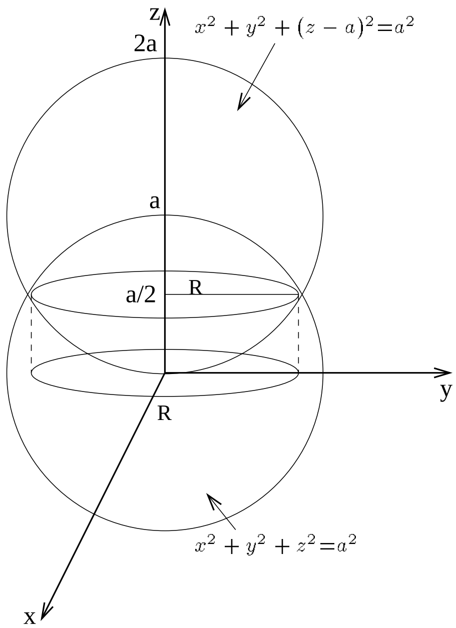
Πρόβλημα 9.
Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\iiint_\Omega z\, dxdydz\ ,$$

όπου Ω το χωρίο που ορίζεται από τις

$$x^2+y^2+z^2 \le a^2\ , \quad x^2+y^2+z^2 \le 2az\ , \quad a>0\ .$$

12μ.



Το χωρίο Ω περικλείεται από δύο σφαίρες με ακτίνα a και κέντρα τα $(0,0,0)$ και $(0,0,a)$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Οι σφαίρες τέμνονται στο επίπεδο $z{=}a/2$ και η τομή τους είναι περιφέρεια κύκλου με ακτίνα

$$R \;=\; \sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2} \;=\; \frac{\sqrt{3}}{2}\, a\ .$$

Τα όρια της ολοκλήρωσης σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι:

$$-R \le x \le R\ ,$$

$$-\sqrt{R^2-x^2} \le y \le \sqrt{R^2-x^2}\ ,$$

$$a-\sqrt{a^2-x^2-y^2} \le z \le \sqrt{a^2-x^2-y^2}\ .$$

Είναι όμως προτιμότερο να εργαστούμε σε κυλινδρικές συντεταγμένες αφού στο επίπεδο xy η ολοκλήρωση γίνεται σε κύκλο.

Σε κυλινδρικές συντεταγμένες, τα όρια της ολοκλήρωσης είναι:

$$0 \le \theta \le 2\pi\ , \quad 0 \le r \le R = \frac{\sqrt{3}}{2}\, a\ , \quad a-\sqrt{a^2-r^2} \le z \le \sqrt{a^2-r^2}\ .$$

Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned}
I \;&=\; \iiint_\Omega z\, dxdydz \;=\; \iiint_{\Omega^*} z\, J\, d\theta dr dz \;=\;=\; \int_0^{2\pi}\int_0^R \int_{a-\sqrt{a^2-r^2}}^{\sqrt{a^2-r^2}} zr\, d\theta dr dz \\
&=\; 2\pi \int_0^R r\, dr \int_{a-\sqrt{a^2-r^2}}^{\sqrt{a^2-r^2}} z\, dz \;=\; 2\pi \int_0^R \left[\frac{z^2}{2}\right]_{a-\sqrt{a^2-r^2}}^{\sqrt{a^2-r^2}} r\, dr \\
&=\; \pi \int_0^R \left[\left(\sqrt{a^2-r^2}\right)^2 \,-\, \left(a-\sqrt{a^2-r^2}\right)^2\right] r\, dr
\end{aligned}$$

Με τον μετασχηματισμό

$$u \;=\; \sqrt{a^2-r^2} \quad \Longrightarrow \quad r\, dr \;=\; -u\, du$$

και τα όρια ολοκλήρωσης γίνονται $u{=}a$ για $r{=}0$ και $u{=}a/2$ για $r{=}R{=}\sqrt{3}/(2a)$. Έτσι,

$$\begin{aligned}
I \;&=\; -\pi \int_a^{a/2} \left[u^2 \,-\, (a-u)^2\right] u\, du \;=\; \pi \int_{a/2}^a a\,(2u \,-\, a)\, u\, du \;=\; \pi\, a \left[\frac{2u^3}{3} \,-\, \frac{u^2}{2}\right]_{a/2}^a \\
&=\; \pi\, a^4 \left(\frac{2}{3} \,-\, \frac{1}{2} \,-\, \frac{2}{24} \,+\, \frac{1}{8}\right) \;=\; \frac{5\pi a^4}{24}
\end{aligned}$$

Πρόβλημα 10.

(α) Να αποδειχθεί το Θεώρημα:

Αν η $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ είναι κλάσης C^1 και η $\boldsymbol{\sigma} : [a,b] \to \mathbf{R}^3$ είναι κατά τμήματα C^1 καμπύλη, τότε

$$\int_{\boldsymbol{\sigma}} \nabla f \cdot d\mathbf{s} \;=\; f(\boldsymbol{\sigma}(b)) \;-\; f(\boldsymbol{\sigma}(a))$$

8μ.

(β) Έστω $\boldsymbol{\sigma} : [a,b] \to \mathbf{R}^2$ μια C^1 καμπύλη και $\mathbf{F}$ διανυσματικό πεδίο συνεχές πάνω στη $\boldsymbol{\sigma}$ για το οποίο ισχύει $||\mathbf{F}|| \leq M$. Να δειχθεί ότι:

$$\left| \int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \right| \leq M\,\ell\,,$$

όπου ℓ το μήκος της καμπύλης $\boldsymbol{\sigma}$. **8μ.**

(α) Από τον κανόνα της αλυσίδας, για την παράγωγο της σύνθετης συνάρτησης

$$F \;=\; f(\boldsymbol{\sigma}(t))$$

ισχύει

$$F'(t) \;=\; \nabla f(\boldsymbol{\sigma}(t)) \cdot \boldsymbol{\sigma}'(t) \tag{i}$$

Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού ισχύει

$$\int_a^b F'(t)\,dt \;=\; F(b) \;-\; F(a) \;=\; f(\boldsymbol{\sigma}(b)) \;-\; f(\boldsymbol{\sigma}(a)) \tag{ii}$$

Από τις (i) και (ii) προκύπτει αμέσως ότι

$$\int_{\boldsymbol{\sigma}} \nabla f \cdot d\mathbf{s} \;=\; f(\boldsymbol{\sigma}(b)) \;-\; f(\boldsymbol{\sigma}(a))$$

(β)

$$\left| \int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \right| \;=\; \left| \int_a^b \mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \cdot \boldsymbol{\sigma}'(t)\,dt \right| \leq \int_a^b \;|\mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \cdot \boldsymbol{\sigma}'(t)|\;dt \tag{i}$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz ισχύει

$$|\mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \cdot \boldsymbol{\sigma}'(t)| \leq ||\mathbf{F}||\,||\boldsymbol{\sigma}'(t)||$$

και επειδή $||\mathbf{F}|| \leq M$,

$$|\mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \cdot \boldsymbol{\sigma}'(t)| \leq M\,||\boldsymbol{\sigma}'(t)||\,. \tag{ii}$$

Από τις (i) και (ii) έχουμε

$$\left| \int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \right| \;\leq\; \int_a^b \;M\,||\boldsymbol{\sigma}'(t)||\,dt \;=\; M\;\int_a^b \;||\boldsymbol{\sigma}'(t)||\,dt \quad\Longrightarrow$$

$$\left| \int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \right| \leq M\,\ell\,,$$

όπου ℓ το μήκος της καμπύλης $\boldsymbol{\sigma}$.

Πρόβλημα 11.

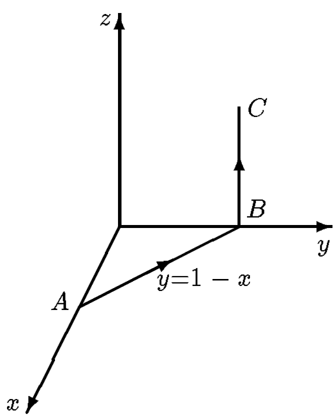
Να υπολογισθεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

όπου

$$\mathbf{F} \;=\; xy\,\mathbf{i} \;+\; xz\,\mathbf{j} \;-\; y\,\mathbf{k}$$

και C η προσανατολισμένη καμπύλη $AB \cup BC$, όπου AB και BC τα ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν τα σημεία $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ και $C(0,1,1)$. **8μ.**



Για το ολοκλήρωμά μας ισχύει:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \;=\; \int_{AB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_{BC} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \;=\; I_1 + I_2.$$

Τα ευθύγραμμα τμήματα AB και BC ορίζονται παραμετρικά από τις

$$\begin{aligned} AB \quad &: \quad \boldsymbol{\sigma}_1 \;=\; (1-t,\, t,\, 0)\,, \quad 0 \le t \le 1 \\ BC \quad &: \quad \boldsymbol{\sigma}_2 \;=\; (0,\, 1,\, t)\,, \quad 0 \le t \le 1 \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε ξεχωριστά τα I_1 και I_2:

$$\begin{aligned} I_1 \;&=\; \int_{AB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \;=\; \int_0^1 \mathbf{F}((\boldsymbol{\sigma}_1(t)) \cdot \boldsymbol{\sigma}_1'(t)\,dt \;=\; \int_0^1 [(1-t)\,t\,\mathbf{i} \;+\; 0\mathbf{j} \;-\; \mathbf{k}] \cdot (-\mathbf{i} \;+\; \mathbf{j} \;+\; 0\mathbf{k})\,dt \\ &=\; \int_0^1 (t-1)\,t\,dt \;=\; \left[\frac{t^3}{3} \;-\; \frac{t^2}{2}\right]_0^1 \;=\; -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} I_2 \;&=\; \int_{AB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \;=\; \int_0^1 \mathbf{F}((\boldsymbol{\sigma}_2(t)) \cdot \boldsymbol{\sigma}_2'(t)\,dt \;=\; \int_0^1 (0\mathbf{i} \;+\; 0\mathbf{j} \;-\; \mathbf{k}) \cdot (0\mathbf{i} \;+\; 0\mathbf{j} \;+\; \mathbf{k})\,dt \\ &=\; \int_0^1 -1\,dt \;=\; -1 \end{aligned}$$

Άρα

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \;=\; I_1 \;+\; I_2 \;=\; -\frac{1}{6} \;-\; 1 \;=\; -\frac{7}{6}$$