# ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι (ΜΑΣ121) - 26 Νοεμβρίου 2003 (♡♡♡♡)

**Όνομα:** **ΑΠΤ:**

**Πρόβλημα 1.**
(α) Έστω

$$a_{12}\, a_{25}\, a_{31}\, a_{46}\, a_{53}\, a_{6j}$$

ένας όρος της ορίζουσας του $A=(a_{ij}) \in \mathcal{M}_{6\times 6}$.

(i) Ποια είναι η τιμή του $j$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας. **2μ.**

(ii) Με ποιο πρόσημο εμφανίζεται ο δοσμένος όρος; **3μ.**

(β) Να δειχθεί η πρόταση: Αν $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ και $\lambda \in \mathbf{R}$, τότε $det(\lambda A)=\lambda^n det A$. **10μ.**

---

(α) (i) Κάθε όρος της ορίζουσας περιέχει ένα στοιχείο του πίνακα από κάθε γραμμή και ένα από κάθε στήλη. Στον δοσμένο όρο έχουμε στοιχεία από τις στήλες 2, 5, 1, 6 και 3. Άρα αναγκαστικά $j$=4.

(ii) Οι δείκτες στηλών ορίζουν τη μετάθεση

$$\sigma \;=\; (2,\, 5,\, 1,\, 6,\, 3,\, 4)$$

Επειδή

$$\mu(\sigma) \;=\; 1+3+0+2+0+0 \;=\; 6$$

βρίσκουμε ότι

$$sgn(\sigma) \;=\; +1$$

(β)

$$det(\lambda A) \;=\; \sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma)\,(\lambda a_{1\sigma_1})\,(\lambda a_{2\sigma_2})\,\cdots\,(\lambda a_{n\sigma_n}) \;=\; \lambda^n \sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma)\, a_{1\sigma_1}\, a_{2\sigma_2}\,\cdots\, a_{n\sigma_n} \;=\; \lambda^n\, det A\,.$$

**Πρόβλημα 2.**

Να δειχθούν τα πιο κάτω:

(α) Η ορίζουσα αδύναμου πίνακα είναι 0 ή 1. **3μ.**

(β) Η ορίζουσα μηδενοδύναμου πίνακα είναι 0. **3μ.**

(γ) Η ορίζουσα ενελικτικού πίνακα είναι $+1$ ή $-1$. **3μ.**

(δ) Η ορίζουσα ορθογώνιου πίνακα είναι $+1$ ή $-1$. **3μ.**

(ε) Η ορίζουσα αντισυμμετρικού πίνακα $A \in \mathcal{M}_{(2n+1)\times(2n+1)}$ είναι 0. **3μ.**

---

Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα

$$det(AB) \;=\; detA\, detB\,, \quad A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$$

και την

$$det(A^k) \;=\; det^k A\,, \quad A \in \mathcal{M}_{n\times n},\;\; k \in \mathbf{N}$$

(α) Για αδύναμο πίνακα έχουμε

$$A^2 \;=\; A \quad\Longrightarrow\quad det(A^2) \;=\; detA \quad\Longrightarrow\quad det^2 A \;=\; detA \quad\Longrightarrow\quad detA\,(detA-1) \;=\; 0$$

Η ορίζουσα είναι λοιπόν 0 ή 1.

(β) Για μηδενοδύναμο πίνακα έχουμε για κάποιο $r \in \mathbf{N}$

$$A^r \;=\; O \quad\Longrightarrow\quad det(A^r) \;=\; detO \;=\; 0 \quad\Longrightarrow\quad det^r A \;=\; 0 \quad\Longrightarrow\quad detA \;=\; 0\,.$$

(γ) Για ενελικτικό πίνακα έχουμε

$$A^2 \;=\; I \quad\Longrightarrow\quad det(A^2) \;=\; detI \;=\; 1 \quad\Longrightarrow\quad det^2 A \;=\; 1 \quad\Longrightarrow\quad detA \;=\; \pm 1\,.$$

(δ) Για ορθογώνιο πίνακα έχουμε

$$A\,A^T \;=\; I \quad\Longrightarrow\quad det(A\,A^T) \;=\; detI \;=\; 1 \quad\Longrightarrow\quad detA\, detA^T \;=\; 1 \quad\Longrightarrow\quad det^2 A \;=\; 1$$

$$detA \;=\; \pm 1\,.$$

(Χρησιμοποιήσαμε το ότι $detA^T {=} detA$.)

(ε) Για αντισυμμετρικό πίνακα ισχύει

$$A^T \;=\; -A \quad\Longrightarrow\quad det(A^T) \;=\; det(-A) \quad\Longrightarrow\quad detA \;=\; (-1)^{2n+1}\, detA \;=\; -detA \quad\Longrightarrow$$

$$detA \;=\; 0\,.$$

(Χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα $det(\lambda A){=}\lambda^n detA$ με $\lambda{=}{-1}$.)

**Πρόβλημα 3.**
Να βρεθεί η ορίζουσα του **κυκλικού πίνακα**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & b & 0 & a \\ a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ b & 0 & a & 0 \end{bmatrix}$$

**30μ.**

---

Αναπτύσσουμε ως προς τα στοιχεία της πρώτης γραμμής:

$$|A| = -b \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & b \\ b & a & 0 \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & 0 \\ b & 0 & a \end{vmatrix} = -b(-b) \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} - a(a) \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = (b^2 - a^2)(a^2 - b^2) = -(b^2 - a^2)^2$$

**Πρόβλημα 4.**
Να λυθεί η εξίσωση $f(x)$=0, όπου

$$f(x) \;=\; \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & a_3 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & x & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n & 1 \end{vmatrix}$$

**40μ.**

---

Χρησιμοποιώντας τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών

$$\begin{gathered} r_1 \longrightarrow r_1 - r_2 \\ r_2 \longrightarrow r_2 - r_3 \\ \vdots \\ r_n \longrightarrow r_n - r_{n+1} \end{gathered}$$

(η ορίζουσα είναι τάξης $n+1$), έχουμε

$$f(x) \;=\; \begin{vmatrix} x-a_1 & a_1-x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x-a_2 & a_2-x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-a_3 & a_3-x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a_n & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n & 1 \end{vmatrix}$$

Αναπτύσσοντας τη νέα ορίζουσα ως προς τα στοιχεία της τελευταίας στήλης έχουμε

$$f(x) \;=\; (-1)^{n+1+n+1} \begin{vmatrix} x-a_1 & a_1-x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x-a_2 & a_2-x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a_3 & a_3-x & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-a_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a_n \end{vmatrix} = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$$

αφού η τελευταία ορίζουσα είναι τριγωνική. Οι ρίζες της $f(x)$=0 είναι προφανώς οι

$$a_1,\, a_2,\, \cdots, a_n \;.$$

**Σημείωση:** Μια άλλη επιλογή θα ήταν η χρήση των μετασχηματισμών

$$r_i \longrightarrow r_i - r_1 \;, \quad i = 2, 3, \cdots, n+1$$