ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι (ΜΑΣ121) - 29 Οκτωβρίου 2003 (♡♡♡)

Όνομα: **ΑΠΤ:**

Πρόβλημα 1.

(α) Αν $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ και $B \in \mathcal{M}_{n\times p}$ δείξτε ότι

$$(AB)^T = B^T A^T$$

15μ.

(β) Αν οι $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ είναι ορθογώνιοι πίνακες δείξτε ότι ο AB είναι επίσης **ορθογώνιος**. **5μ.**

(γ) Να δειχθεί ότι ο $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ είναι **ενελικτικός** αν και μόνο αν

$$(I - A)(I + A) = O$$

5μ.

(α) Έστω ότι

$A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{n\times p}$, $A^T = (a'_{ij})_{n\times m}$ με $a'_{ij} = a_{ji}$ και $B^T = (b'_{ij})_{p\times n}$ με $b'_{ij} = b_{ji}$.

Για το γινόμενο AB ισχύει

$$AB = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right)_{m\times p} \implies (AB)^T = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki}\right)_{p\times m}$$

Έχουμε τώρα για το γινόμενο $B^T A^T$:

$$B^T A^T = \left(\sum_{k=1}^{n} b'_{ik} a'_{kj}\right)_{p\times m} = \left(\sum_{k=1}^{n} b_{ki} a_{jk}\right)_{p\times m} = (AB)^T .$$

(β) Εφόσον οι A και B είναι ορθογώνιοι:

$$AA^T = A^T A = I \quad \text{και} \quad BB^T = B^T B = I$$

Για να είναι ο AB ορθογώνιος αρκεί να δείξουμε ότι

$$(AB)(AB)^T = I .$$

Ξεκινώντας από το αριστερό μέλος έχουμε:

$$(AB)(AB)^T = (AB)\, B^T A^T = A(BB^T)A^T = AIA^T = AA^T = I .$$

Άρα πράγματι ο AB είναι ορθογώνιος.

(γ)

$$(I - A)(I + A) = O \iff I^2 - AI + IA - AA = O \iff I - A + A - A^2 = O \iff A^2 = I$$

Πρόβλημα 2.

(α) Θεωρώντας ότι υπάρχει, βρείτε τον αντίστροφο του σύνθετου πίνακα

$$P = \begin{bmatrix} A & B \\ O & D \end{bmatrix}$$

όπου $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ και $D \in \mathcal{M}_{m\times m}$. Γράψτε τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται για να είναι ο P αντιστρέψιμος. **15μ.**

(β) Ποιες συνθήκες πρέπει να ικανοποιούνται για να είναι ο P ορθογώνιος; **10μ.**

(α) Έστω ότι

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix}.$$

Επειδή $PP^{-1}{=}I$ έχουμε

$$\begin{bmatrix} A & B \\ O & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & O \\ O & I_m \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} AX+BZ & AY+BW \\ DZ & DW \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & O \\ O & I_m \end{bmatrix}$$

Βρίσκουμε έτσι:

$$\left.\begin{array}{l} AX+BZ=I_n \\ AY+BW=O \\ DZ=O \\ DW=I_m \end{array}\right\} \implies \left.\begin{array}{l} Z=D^{-1}O=O \\ W=D^{-1} \\ AX=I_n \\ AY+BD^{-1}=O \end{array}\right\} \implies \left.\begin{array}{l} Z=O \\ W=D^{-1} \\ X=A^{-1} \\ Y=-A^{-1}BD^{-1} \end{array}\right\}$$

Άρα

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ O & D^{-1} \end{bmatrix}$$

Για να υπάρχει ο P^{-1} πρέπει οι A και D να είναι αντιστρέψιμοι.

(β) Για να είναι ο P ορθογώνιος πρέπει $P^T{=}P^{-1}$ οπότε

$$\begin{bmatrix} A^T & O \\ B^T & D^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ O & D^{-1} \end{bmatrix} \implies \left.\begin{array}{l} A^T=A^{-1} \\ O=-A^{-1}BD^{-1} \\ B^T=O \\ D^T=D^{-1} \end{array}\right\} \implies \left.\begin{array}{l} A^T=A^{-1} \\ B=O \\ D^T=D^{-1} \end{array}\right\}$$

Πρέπει λοιπόν οι A και D να είναι ορθογώνιοι και $B{=}O$.

Πρόβλημα 3.
(α) Πότε ο $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ είναι

(i) *συμμετρικός;* (ii) *αντισυμμετρικός;* (iii) *ορθογώνιος;*
(iv) *μηδενοδύναμος;* (v) *ερμιτιανός;* (vi) *αντιερμιτιανός;* **18μ.**

(β) Βρείτε τη **Γ-κλιμακωτή** και στη συνέχεια την **ανηγμένη Γ-κλιμακωτή μορφή** του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 4 & -8 & 8 \\ 2 & 4 & 3 & -7 & 3 \\ 3 & 6 & 5 & -10 & 7 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

12μ.

(α)
(i) Αν $A^T = A$, ο A είναι συμμετρικός.

(ii) Αν $A^T = -A$, ο A είναι αντισυμμετρικός.

(iii) Αν $AA^T = A^T A = I$, ο A είναι ορθογώνιος.

(iv) Αν $A^2 = O$, ο A είναι μηδενοδύναμος.

(v) Αν $A^* = A$, ο A είναι ερμιτιανός.

(vi) Αν $A^* = -A$, ο A είναι αντιερμιτιανός.

(β) Βρίσκουμε πρώτα τον Γ-κλιμακωτό R'.

$$A \quad \begin{array}{c} r_1 \to r_4 \\ \sim \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & -7 & 3 \\ 3 & 6 & 5 & -10 & 7 \\ 3 & 6 & 4 & -8 & 8 \end{bmatrix} \begin{array}{c} r_2 \to r_2 - 2r_1 \\ r_3 \to r_3 - 3r_1 \\ r_4 \to r_4 - 3r_1 \\ \sim \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} r_3 \to r_3 - 2r_2 \\ r_4 \to r_4 - r_2 \\ \sim \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{c} r_4 \to r_4 - 2r_3 \\ \sim \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R'$$

Βρίσκουμε τώρα τον ανηγμένο Γ-κλιμακωτό R.

$$R' \quad \begin{array}{c} r_1 \to r_1 + 3r_3 \\ r_2 \to r_2 + r_3 \\ \sim \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} r_1 \to r_1 - r_2 \\ \sim \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$$

Πρόβλημα 4.

Δίνεται ότι ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & b \\ 2 & a & 1 & 8 \\ 3 & c & 2 & d \end{bmatrix}$$

έχει την πιο κάτω ανηγμένη Γ-κλιμακωτή μορφή

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

η οποία προκύπτει από τον A χωρίς τη χρήση αντιμεταθέσεων γραμμών. Βρείτε τους αριθμούς a, b, c και d. **20μ.**

(α) Παρατηρούμε ότι

$$A \overset{\substack{r_2 \to r_2 - 2r_1 \\ r_3 \to r_3 - 3r_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & b \\ 0 & a-4 & -1 & 8-2b \\ 0 & c-6 & -1 & d-3b \end{bmatrix} = A'$$

Επειδή στην 2η στήλη του R δεν υπάρχει ηγετικό στοιχείο, έχουμε αναγκαστικά

$$a - 4 = 0 \implies a = 4$$

και

$$c - 6 = 0 \implies c = 6$$

Έτσι

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & b \\ 0 & 0 & -1 & 8-2b \\ 0 & 0 & -1 & d-3b \end{bmatrix} \overset{r_2 \to -r_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & 2b-8 \\ 0 & 0 & -1 & d-3b \end{bmatrix} \overset{\substack{r_1 \to r_1 - r_2 \\ r_3 \to r_3 + r_2}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -b+8 \\ 0 & 0 & 1 & 2b-8 \\ 0 & 0 & 0 & d-b-8 \end{bmatrix} = R$$

Έχουμε λοιπόν

$$\left.\begin{aligned} -b+8 &= 3 \\ 2b-8 &= 2 \\ d-b-8 &= 0 \end{aligned}\right\} \implies b = 5 \quad \text{και} \quad d = 13$$

Παρατηρούμε ότι η 3η γραμμή του A,

$$r_3 = [\,3 \quad 6 \quad 2 \quad 13\,]$$

είναι το άθροισμα των δύο πρώτων γραμμών του. Αναμέναμε κάτι τέτοιο αφού ο μηδενισμός της 3ης γραμμής στον R σημαίνει ότι η r_3 είναι γραμμικός συνδυασμός των r_1 και r_2.