ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι (ΜΑΣ121) - 8 Νοεμβρίου 2003
ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

Όνομα: **ΑΠΤ:**

Πρόβλημα 1.
Διατυπώστε τους ορισμούς των πιο κάτω:
(α) **Υπόχωρος** διανυσματικού χώρου. **1μ.**
(β) **Γραμμικά ανεξάρτητα** στοιχεία. **1μ.**
(γ) **Άθροισμα υποχώρων**. **1μ.**
(δ) **Ευθύ άθροισμα**. **1μ.**

(α) Έστω V διανυσματικός χώρος πάνω σε κάποιο σώμα K και W ένα μη κενό υποσύνολό του. Το W καλείται **υπόχωρος** του V, αν είναι και αυτό διανυσματικός χώρος πάνω στο K με τις πράξεις τις πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού του V.

(β) Έστω V γραμμικός χώρος πάνω σ'ένα σώμα K και $\{u_1,\, u_2,\, \cdots,\, u_n\}$, $n \in \mathbf{N}$ ένα πεπερασμένο υποσύνολο του V. Τα διανύσματα $u_1,\, u_2,\, \cdots,\, u_n$ λέμε ότι είναι **γραμμικά ανεξάρτητα** αν ισχύει η συνεπαγωγή

$$\lambda_1 u_1 \,+\, \lambda_2 u_2 \,+\, \cdots \,+\, \lambda_n u_n \,=\, \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 \,=\, \lambda_2 \,=\, \cdots \,=\, \lambda_n \,=\, 0\,.$$

(γ) Έστω W_1, W_2 υπόχωροι ενός διανυσματικού χώρου V. Καλούμε **άθροισμα** των W_1 και W_2 και το συμβολίζουμε με $W_1{+}W_2$ το σύνολο

$$W_1 + W_2 \,=\, \{v \in V \,|\, v = w_1 + w_2,\;\; w_1 \in W_1,\;\, w_2 \in W_2\}\;.$$

(δ) Έστω V είναι ένας *διανυσματικός χώρος* πάνω σε κάποιο σώμα K και W_1 και W_2 *υπόχωροι* του V. Λέμε ότι ο V είναι το ευθύ άθροισμα των W_1 και W_2 αν κάθε $v \in V$ γράφεται **μονοσήμαντα** σαν άθροισμα ενός στοιχείου $w_1 \in W_1$ και ενός στοιχείου $w_2 \in W_2$.

Πρόβλημα 2.
Διατυπώστε τους ορισμούς των πιο κάτω:

(α) **Γραμμική θήκη**. **1μ.**
(β) **Βάση** διανυσματικού χώρου. **1μ.**
(γ) **Διάσταση** διανυσματικού χώρου. **1μ.**
(δ) **Ενελικτικός πίνακας**. **1μ.**

(α) Έστω V γραμμικός χώρος πάνω σ'ένα σώμα K και $S=\{u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_m\}$ ένα πεπερασμένο υποσύνολο του V. Το σύνολο $L(S)$ των γραμμικών συνδυασμών των $u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_m$ συμβολίζεται επίσης με

$$[S] \qquad \text{ή} \qquad [u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_m] \qquad \text{ή ακόμα} \qquad span[u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_m]$$

και καλείται **γραμμική θήκη ή περίβλημα** (linear span) των $u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_m$.

(β) Έστω V γραμμικός χώρος πάνω σ'ένα σώμα K. Το πεπερασμένο υποσύνολο
$A=\{e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_n\}$, $n \in \mathbf{N}$, του V καλείται (**πεπερασμένη**) **βάση** του V αν τα $e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_n$
(i) είναι γραμμικά ανεξάρτητα, και
(ii) παράγουν το χώρο V.

(γ) Αν ο γραμμικός χώρος $V \neq \{\mathbf{0}\}$ έχει μια βάση με $n \in \mathbf{N}$ στοιχεία, ο αριθμός n καλείται **διάσταση** (dimension) του V και συμβολίζεται με

$$dimV = n .$$

Αν $V=\{\mathbf{0}\}$, θα λέμε ότι η διάσταση του V είναι μηδέν.
(δ) Ένας πίνακας $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ καλείται ενελικτικός αν $A^2 = I$.

Πρόβλημα 3.

(α) Έστω V *διανυσματικός χώρος* πάνω σε κάποιο σώμα K. Δείξτε ότι το το μηδενικό στοιχείο του V είναι **μοναδικό**. **3μ.**

(β) Αν τα x, y, z είναι γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου V, να δειχθεί ότι τα διανύσματα

$$x + y\ , \quad y + z\ , \quad z + x$$

είναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητα. **2μ.**

(γ) Αν $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ και $B \in \mathcal{M}_{n\times m}$, δείξτε ότι

$$tr(AB) \ = \ tr(BA)\,.$$

4μ.

(α) Ο V έχει εξ ορισμού ένα μηδενικό στοιχείο $\mathbf{0}$ τέτοιο ώστε

$$u \ + \ \mathbf{0} \ = \ u \qquad \forall u \in V \tag{i}$$

Έστω ότι υπάρχει ακόμα ένα μηδενικό στοιχείο $\mathbf{0}'$. Θα ισχύει τότε

$$\mathbf{0}' \ + \ u \ = \ u \qquad \forall u \in V \tag{ii}$$

Θέτοντας u=$\mathbf{0}'$ στην (i) και u=$\mathbf{0}$ στην (ii) παίρνουμε

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{0}' \ + \ \mathbf{0} \ = \ \mathbf{0}' \\ \mathbf{0}' \ + \ \mathbf{0} \ = \ \mathbf{0} \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{0}' \ = \ \mathbf{0}\,.$$

Άρα το μηδενικό στοιχείο του V είναι μοναδικό.

(β) Αν

$$\lambda_1\,(x+y) \ + \ \lambda_2\,(y+z) \ + \ \lambda_3\,(z+x) \ = \ \mathbf{0}$$

τότε

$$(\lambda_1+\lambda_3)\,x \ + \ (\lambda_1+\lambda_2)\,y \ + \ (\lambda_2+\lambda_3)\,z \ = \ 0\,.$$

Επειδή τα x, y, z είναι γραμμικά ανεξάρτητα,

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda_1+\lambda_3 & = 0 \\ \lambda_1+\lambda_2 & = 0 \\ \lambda_2+\lambda_3 & = 0 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \left.\begin{array}{ll} \lambda_1+\lambda_3 & = 0 \\ \lambda_1-\lambda_3 & = 0 \\ \lambda_2+\lambda_3 & = 0 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0\,.$$

Άρα τα $x+y,\ y+z,\ z+x$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

(γ) Για τα δύο γινόμενα έχουμε

$$AB \ = \ \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)_{m\times m} \quad \Longrightarrow \quad tr(AB) \ = \ \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}\right) \ = \ \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}$$

και

$$BA \ = \ \left(\sum_{k=1}^{m} b_{ik}a_{kj}\right)_{n\times n} \quad \Longrightarrow \quad tr(BA) \ = \ \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m} b_{ik}a_{ki}\right) \ = \ \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} b_{ik}a_{ki} \ = \ tr(AB)$$

Πρόβλημα 4.

Έστω
$$S = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$$
ένα πεπερασμένο υποσύνολο ενός διανυσματικού χώρου V. Να δειχθούν οι πιο κάτω προτάσεις:

(α) Η γραμμική θήκη $L(S)$ του S είναι υπόχωρος του V. **5μ.**

(β) Αν τα στοιχεία του S είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε κάθε μη κενό υποσύνολο του S αποτελείται από γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία. **5μ.**

(α) Η γραμμική θήκη $L(S)$ του S είναι το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών των $u_1, u_2, \cdots, u_n$:
$$L(S) = \left\{ u \in V \mid u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \;, \quad \lambda_i \in K \right\}$$
Θα δείξουμε ότι ικανοποιούνται οι τρεις συνθήκες του Θ. 2.2.2.

(i) Επειδή
$$\mathbf{0} = 0u_1 + 0u_2 + \cdots + 0u_n \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{0} \in L(S)$$
(ii) Αν $u, v \in L(S)$, τότε αυτά γράφονται σαν γραμμικοί συνδυασμοί των στοιχείων του S:
$$\left.\begin{array}{rcl} u &=& \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n \\ v &=& \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \cdots + \mu_n u_n \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow$$
$$u + v = (\lambda_1 + \mu_1)u_1 + (\lambda_2 + \mu_2)u_2 + \cdots + (\lambda_n + \mu_n)u_n \in L(S)$$
(Η $L(S)$ είναι κλειστή ως προς την πρόσθεση.)

(iii) Έστω το $u \in L(S)$ και $a \in K$. Το u γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του S:
$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n \quad \Longrightarrow au = (a\lambda_1)u_1 + (a\lambda_2)u_2 + \; cdots + (a\lambda_n)u_n$$
(Η $L(S)$ είναι κλειστή ως προς τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό.)

Οι τρεις συνθήκες του Θ. 2.2.2 ικανοποιούνται. Άρα η $L(S)$ είναι υπόχωρος του V.

(β) Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε τα πρώτα m στοιχεία του S, όπου $m < n$. Αν τα $u_1, \cdots, u_m$ είνα γραμμικά εξαρτημένα τότε, σύμφωνα με τον Ορισμό 3.2.1 υπάρχουν $\lambda_1, \cdots, \lambda_m \in K$ που δεν είναι όλα μηδέν έτσι ώστε
$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_m u_m = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow$$
$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_m u_m + 0u_{m+1} + \cdots + 0u_n = \mathbf{0}\,.$$
Επειδή οι συντελεστές των $u_1, \cdots, u_n$ δεν είναι όλοι μηδέν συμπεραίνουμε ότι τα $u_1, \cdots, u_n$ είναι γραμμικά εξαρτημένα που είναι άτοπο. Άρα τα $u_1, \cdots, u_m$ ειναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Πρόβλημα 5.
(α) Δείξτε ότι το σύνολο

$$B = \left\{ E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

είναι μια βάση του $\mathcal{M}_{2\times 2}$. **2μ.**
(β) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

ως προς τη βάση B. **4μ.**

(α) Το B αποτελείται από 4 στοιχεία. Επειδή $dim\mathcal{M}_{n\times n}$=4, σύμφωνα με το Θ. 3.3.6 (ii) αρκεί να δείξουμε ότι το B είναι γραμμικά ανεξάρτητο:

$$\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \lambda_3 E_3 + \lambda_4 E_4 = O \quad \Longrightarrow$$

$$\lambda 1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1+\lambda_3+\lambda_4 & \lambda_1+\lambda_2 \\ \lambda_2+\lambda_3 & \lambda_3+\lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \left.\begin{aligned} \lambda_1+\lambda_3+\lambda_4 &= 0 \\ \lambda_1+\lambda_2 &= 0 \\ \lambda_2+\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_3+\lambda_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0.$$

Άρα το B είναι γραμμικά ανεξάρτητο και έτσι αποτελεί βάση του $\mathcal{M}_{2\times 2}$.

(β) Αν $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ είναι οι συντεταγμένες του A ως προς τη βάση B, τότε

$$A = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \lambda_3 E_3 + \lambda_4 E_4 \quad \Longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1+\lambda_3+\lambda_4 & \lambda_1+\lambda_2 \\ \lambda_2+\lambda_3 & \lambda_3+\lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \left.\begin{aligned} \lambda_1+\lambda_3+\lambda_4 &= 1 \\ \lambda_1+\lambda_2 &= 2 \\ \lambda_2+\lambda_3 &= 3 \\ \lambda_3+\lambda_4 &= 4 \end{aligned}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \left.\begin{aligned} \lambda_1 &= -3 \\ \lambda_2 &= 5 \\ \lambda_3 &= -2 \\ \lambda_4 &= 6 \end{aligned}\right\}$$

Οι συντεταγμένες του A ως προς τη βάση B είναι οι

$$(-3,\ 5,\ -2,\ 6)\,.$$

Πρόβλημα 6.
Έστω τα διανύσματα $u_1, u_2, \cdots, u_k$ του $\mathbf{R^n}$ και το σύνολο

$$W \;=\; \left\{ u \in \mathbf{R^n} \;|\; u \cdot u_i \;=\; 0\,, \quad i = 1, 2, \cdots, k \;\right\}\;.$$

Δείξτε ότι ο W είναι **υπόχωρος** του $\mathbf{R^n}$. **5μ.**

Θα δείξουμε ότι ικανοποιούνται οι τρεις συνθήκες της Πρ. 2.2.2.
(i) Επειδή $\mathbf{0} \cdot u_i{=}0$ για κάθε u_i, $\mathbf{0} \in W$.
(ii) Έστω δύο διανύσματα $u, v \in W$ οπότε

$$\left.\begin{array}{l} u \cdot u_i \;=\; 0\,, \quad i = 1, 2, \cdots, k \\ v \cdot u_i \;=\; 0\,, \quad i = 1, 2, \cdots, k \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad u \cdot u_i \;+\; v \cdot u_i \;=\; 0 + 0\,, \quad i = 1, 2, \cdots, k \quad \Longrightarrow$$

$$(u + v) \cdot u_i \;=\; 0\,, \quad i = 1, 2, \cdots, k \quad \Longrightarrow \quad u + v \in W\,.$$

Άρα ο W είναι κλειστός ως προς την πρόσθεση.
(iii) Αν $a \in \mathbf{R}$ και $u \in W$, τότε

$$u \cdot u_i \;=\; 0\,, \quad i = 1, 2, \cdots, k \quad \Longrightarrow \quad a\,(u \cdot u_i) \;=\; a\,0\,, \quad i = 1, 2, \cdots, k \quad \Longrightarrow$$

$$(au) \cdot u_i \;=\; 0\,, \quad i = 1, 2, \cdots, k \quad \Longrightarrow \quad au \in W\,.$$

Άρα ο W είναι κλειστός ως προς το βαθμωτό πολλαπλασιασμό.
Οι τρεις συνθήκες της Πρ. 2.2.2 ικανοποιούνται. Άρα ο W είναι υπόχωρος του V.

Πρόβλημα 7.
Έστω το σύνολο

$$W \;=\; \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}\,|\, trA = 0\}$$

(α) Δείξτε ότι το W είναι **υπόχωρος** του $\mathcal{M}_{2\times 2}$. **4μ.**
(β) Να βρεθεί μια **βάση** και η **διάσταση** του W. **3μ.**
(β) Να **επεκταθεί** η βάση που βρήκατε σε μια βάση του $\mathcal{M}_{2\times 2}$. **3μ.**

(α) Θα δείξουμε ότι ικανοποιούνται οι τρεις συνθήκες του Θ. 2.2.2.
(i) Επειδή

$$trO = 0 \quad \Longrightarrow \quad O \in W$$

(ii) Αν $A, B \in W$ τότε trA=trB=0 και έτσι

$$tr(A+B) \;=\; trA + trB \;=\; 0 \quad \Longrightarrow \quad (A+B) \in W$$

(Το W είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση.)
(iii) Αν $A \in W$ και $\lambda \in K$, τότε των στοιχείων του S:

$$tr(\lambda A) \;=\; \lambda(trA) \;=\; 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda A \in W\,.$$

(Ο W είναι κλειστός ως προς τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό.) Οι τρεις συνθήκες του Θ. 2.2.2 ικανοποιούνται. Άρα ο W είναι υπόχωρος του $\mathcal{M}_{2\times 2}$.

(β) Το γενικό στοιχείο του W είναι της μορφής:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = a\,E_1 \,+\, b\,E_2 \,+\, c\,E_3\,.$$

Το σύνολο B=$\{E_1, E_2, E_3\}$ παράγει τον W. Θα δείξουμε ότι είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. Πράγματι, αν

$$\lambda_1\,E_1 \,+\, \lambda_2\,E_2 \,+\, \lambda_3\,E_3 \;=\; O \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & -\lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 \;=\; \lambda_2 \;=\; \lambda_3 \;=\; 0\,.$$

Το B είναι γραμμικώς ανεξάρτητο και αφού παράγει τον W, είναι μια βάση του. Έχουμε τέλος

$$dimW \;=\; 3\,.$$

(β) Εφόσον $dim\mathcal{M}_{2\times 2}$=4, για την επέκταση του B σε μια βάση του $\mathcal{M}_{2\times 2}$ πρέπει να βρούμε ένα στοιχείο του $\mathcal{M}_{2\times 2}$ που *δεν ανήκει* στη γραμμική θήκη της βάσης B. Έστω ο πίνακας

$$E_4 \;=\; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Σύμφωνα με το Θ. 3.3.6, για να είναι το σύνολο B'=$\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ βάση του $\mathcal{M}_{2\times 2}$, πρέπει να είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. Αν

$$\lambda_1\,E_1 \,+\, \lambda_2\,E_2 \,+\, \lambda_3\,E_3 \,+\, \lambda_4\,E_4 \;=\; O \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & -\lambda_1+\lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow$$

$$\lambda_1 \;=\; \lambda_2 \;=\; \lambda_3 \;=\; \lambda_4 \;=\; 0\,.$$

Το B' είναι πράγματι γραμμικώς ανεξάρτητο και συνεπώς αποτελεί μια βάση του $\mathcal{M}_{2\times 2}$.

Πρόβλημα 8.

Έστω ο μιγαδικός πίνακας:

$$A = \begin{bmatrix} i & -1-i & -3+2i \\ 1-i & 4i & 8 \\ 3+2i & -8 & -2i \end{bmatrix}$$

(α) Βρείτε τον **συζυγή** $\bar{A}$. **1μ.**

(β) Βρείτε τον **αναστροφοσυζυγή** A^*. **1μ.**

(γ) Είναι ο A **αντιερμιτιανός**; **1μ.**

(α)

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -i & -1+i & -3-2i \\ 1+i & -4i & 8 \\ 3-2i & -8 & 2i \end{bmatrix}$$

(β)

$$A^* = (\bar{A})^T = \begin{bmatrix} -i & 1+i & 3-2i \\ -1+i & -4i & -8 \\ -3-2i & 8 & 2i \end{bmatrix}$$

(γ) Παρατηρούμε ότι $A^*=-A$. Άρα ο A είναι αντιερμιτιανός.

Πρόβλημα 9.

(α) Αν οι $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ είναι αδύναμοι και αντιμεταθέσιμοι, δείξτε ότι ο AB είναι **αδύναμος**. **3μ.**

(β) Έστω n η διάσταση του διανυσματικού χώρου V, όπου $n \neq 0, 1$. Αν οι V_1 και V_2 είναι υπόχωροι του V με $V_1 \neq V_2$ και

$$dimV_1 = dimV_2 = n-1 ,$$

δείξτε ότι

$$V = V_1 + V_2 .$$

3μ.

(α) Χρησιμοποιώντας την προσεταιριστική ιδιότητα και τα δεδομένα

$$A^2 = A , \quad B^2 = B , \quad AB = BA$$

έχουμε:

$$(AB)^2 = (AB)(AB) = A(BA)B = A(AB)B = (AA)(BB) = A^2B^2 = AB$$

Άρα ο AB είναι αδύναμος.

(β) Επειδή ο $V_1 + V_2$ είναι υπόχωρος του V, ισχύει

$$dim(V_1+V_2) \leq dimV \quad \Longrightarrow \quad dim(V_1+V_2) \leq n . \tag{i}$$

Επειδή $V_1 \neq V_2$ έχουμε

$$dimV_1 \cap V_2 \leq n-2 . \tag{ii}$$

Από το Θ. 3.3.8 γνωρίζουμε ότι

$$dim(V_1+V_2) = dimV_1 + dimV_2 - dimV_1 \cap V_2 \quad \Longrightarrow$$

$$dim(V_1+V_2) \geq (n-1) + (n-1) - (n-2) \quad \Longrightarrow$$

$$dim(V_1+V_2) \geq n \tag{iii}$$

Από τις (i) και (iii) προκύπτει ότι

$$dim(V_1+V_2) = n = dimV .$$

Εφόσον τώρα ο $V_1 + V_2$ είναι υπόχωρος του V, συμπεραίνουμε ότι (Πρ. 3.3.7)

$$V_1 + V_2 = V .$$

Πρόβλημα 10.

Έστω οι πιο κάτω υπόχωροι του $\mathbf{R}^3$:

$$\begin{aligned} W &= \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x,y,z) = a(1,0,0)\,, \quad a \in \mathbf{R}\} \\ U &= \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x,y,z) = b(1,1,0) + c(0,1,1)\,, \quad b,c \in \mathbf{R}\} \end{aligned}$$

Δείξτε ότι

$$W \oplus U \;=\; \mathbf{R}^3\,.$$

6μ.

Σύμφωναμε τον Ορισμό 2.3.4, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε διάνυσμα $u = (x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ γράφεται μονοσήμαντα σαν άθροισμα ενός στοιχείου του W και ενός στοιχείου του U, δηλ. ισχύει

$$(x,y,z) \;=\; a(1,0,0) \;+\; b(1,1,0) \;+\; c(0,1,1)\,,$$

όπου τα $a,b,c \in \mathbf{R}$ είναι μοναδικά. Ισοδύναμα (βλ. Πρ. 3.3.2), αρκεί να δείξουμε ότι τα διανύσματα

$$(1,0,0),\ (1,1,0),\ (0,1,1)$$

αποτελούν βάση του $\mathbf{R}^3$. Επειδή $dim\mathbf{R}^3$=3 (ίση με το πλήθος των πιο πάνω διανυσμάτων) αρκεί να δείξουμε ότι τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα (βλ. Θ. 3.3.6). Αν λοιπόν ισχύει

$$\lambda_1(1,0,0) \;+\; \lambda_2(1,1,0) \;+\; \lambda_3(0,1,1) \;=\; (0,0,0)$$

έχουμε

$$(\lambda_1+\lambda_2,\ \lambda_2+\lambda_3,\ \lambda_3) \;=\; (0,0,0) \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$$

Τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα και έτσι

$$W \oplus U \;=\; \mathbf{R}^3\,.$$

Πρόβλημα 11.
Έστω $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ μιγαδικός πίνακας.

(α) Να βρεθεί το $tr(AA^*)$ **4μ.**

(β) Αν $AA^*=O$, δείξτε ότι $A=O$. **4μ.**

(α) Αν είναι $A=(a_{ij})$ και $A^*=(a'_{ij})$, τότε από τον ορισμό του αναστροφοσυζυγή έχουμε

$$a'_{ij} \;=\; \bar{a}_{ji}$$

Αν τώρα $AA^*=(c_{ij})$, θα έχουμε

$$c_{ij} \;=\; \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a'_{kj} \;=\; \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\bar{a}_{jk}$$

και έτσι

$$tr(AA^*) \;=\; \sum_{i=1}^{n} c_{ii} \;=\; \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\bar{a}_{ik} \;=\; \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2 \,.$$

(β) Αν $AA^*=O$, τότε

$$tr(AA^*) \;=\; 0 \quad\Longrightarrow\quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2 \;=\; 0 \quad\Longrightarrow\quad a_{ik} \;=\; 0 \;\; i,k=1,2,\cdots,n \quad\Longrightarrow\quad A \;=\; O$$

Πρόβλημα 12.

Αν οι πίνακες $A, B, (A-B), (B^{-1}-A^{-1}) \in \mathcal{M}_{n\times n}$ είναι αντιστρέψιμοι, να δειχθούν τα εξής:

(α) $(A-B)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}(B^{-1}-A^{-1})^{-1}A^{-1}$ **5μ.**

(β) $(I+A)^{-1} = I - (A^{-1}+I)^{-1}$ **2μ.**

(γ) $tr(I+A)^{-1} + tr(A^{-1}+I)^{-1} = n$ **3μ.**

(α)

1ος τρόπος

$$(A-B)^{-1} = A^{-1}+A^{-1}(B^{-1}-A^{-1})^{-1}A^{-1} \iff (A-B)^{-1} = A^{-1}+\left[A\,(B^{-1}-A^{-1})\,A\right]^{-1} \iff$$

$$(A-B)^{-1} = A^{-1}+\left[(AB^{-1}-AA^{-1})\,A\right]^{-1} \iff (A-B)^{-1} = A^{-1}+\left[(AB^{-1}-BB^{-1})\,A\right]^{-1} \iff$$

$$(A-B)^{-1} = A^{-1} + \left[(A-B)B^{-1}\,A\right]^{-1} \iff (A-B)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}\,B\,(A-B)^{-1} \iff$$

$$I = \left[A^{-1} + A^{-1}\,B\,(A-B)^{-1}\right]\,(A-B) \iff I = A^{-1}A - A^{-1}\,B + A^{-1}\,B \iff I = I$$

Άρα η αρχική ταυτότητα ισχύει.

2ος τρόπος

$$(A-B)^{-1} = A^{-1}+A^{-1}(B^{-1}-A^{-1})^{-1}A^{-1} \iff (A-B)^{-1}A = A^{-1}A+A^{-1}(B^{-1}-A^{-1})^{-1}A^{-1}A \iff$$

$$(A-B)^{-1}A = I + A^{-1}\,(B^{-1}-A^{-1})^{-1} \iff$$

$$(A-B)^{-1}A(B^{-1}-A^{-1}) = B^{-1}-A^{-1} + A^{-1}\,(B^{-1}-A^{-1})^{-1}(B^{-1}-A^{-1}) \iff$$

$$(A-B)^{-1}(AB^{-1}-AA^{-1}) = (B^{-1}-A^{-1}) + A^{-1} \iff (A-B)^{-1}(AB^{-1}-I) = B^{-1} \iff$$

$$(A-B)^{-1}(AB^{-1}-BB^{-1}) = B^{-1} \iff (A-B)^{-1}(A-B)\,B^{-1} = B^{-1} \iff$$

$$I\,B^{-1} = B^{-1} \iff B^{-1} = B^{-1}$$

Άρα η αρχική ταυτότητα ισχύει.

3ος τρόπος

Θα δείξουμε ότι

$$(A-B)\,\left[A^{-1} + A^{-1}\,(B^{-1}-A^{-1})^{-1}\,A^{-1}\right] = I\,.$$

Συμβολίζουμε με Y το αριστερό μέλος και έχουμε

$$\begin{aligned}
Y &= (A-B)\,\left[A^{-1} + A^{-1}\,(B^{-1}-A^{-1})^{-1}\,A^{-1}\right] \\
&= AA^{-1} + AA^{-1}\,(B^{-1}-A^{-1})^{-1}\,A^{-1} - BA^{-1} - BA^{-1}\,(B^{-1}-A^{-1})^{-1}\,A^{-1} \\
&= I - BA^{-1} + (B^{-1}-A^{-1})^{-1}\,A^{-1} - BA^{-1}\,(B^{-1}-A^{-1})^{-1}\,A^{-1} \\
&= I - BA^{-1} + (I-BA^{-1})\,(B^{-1}-A^{-1})^{-1}\,A^{-1} \\
&= I - BA^{-1} + (BB^{-1}-BA^{-1})\,(B^{-1}-A^{-1})^{-1}\,A^{-1} \\
&= I - BA^{-1} + B\,(B^{-1}-A^{-1})\,(B^{-1}-A^{-1})^{-1}\,A^{-1} \\
&= I - BA^{-1} + B\,I\,A^{-1} = I - BA^{-1} + BA^{-1} = I
\end{aligned}$$

Άρα λοιπόν

$$(A-B)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}\,(B^{-1}-A^{-1})^{-1}\,A^{-1}\,. \tag{i}$$

(β)

1ος τρόπος

$$(I+A)^{-1} = I - (A^{-1}+I)^{-1} \iff (I+A)^{-1} = (A^{-1}+I)^{-1}(A^{-1}+I) - (A^{-1}+I)^{-1} \iff$$

$$(I+A)^{-1} = (A^{-1}+I)^{-1}\,(A^{-1}+I-I) = (A^{-1}+I)^{-1}\,A^{-1} \iff$$

$$(I+A)^{-1} \;=\; \left[A\,(A^{-1}+I)\right]^{-1} \;=\; (AA^{-1}\;+\;A)^{-1} \quad \Longleftrightarrow \quad (I+A)^{-1} \;=\; (I+A)^{-1}$$

Άρα η αρχική ταυτότητα ισχύει.

2ος τρόπος
Θέτοντας στην (i) $A{=}I$ και $B{=}{-}A$ παίρνουμε:

$$(I+A)^{-1} \;=\; I^{-1} \;+\; I^{-1}\,(-A^{-1}-I^{-1})^{-1}\,I^{-1} \quad \Longrightarrow \quad (I+A)^{-1} \;=\; I \;-\; (A^{-1}+I)^{-1}\,. \qquad \text{(ii)}$$

(γ) Από την (ii) έχουμε

$$tr(I{+}A)^{-1} = tr\left[I \;-\; (A^{-1}+I)^{-1}\right] \quad \Longrightarrow \quad tr(I{+}A)^{-1} = trI{-}tr(A^{-1}{+}I)^{-1} = n{-}tr(A^{-1}{+}I)^{-1} \quad \Longrightarrow$$

$$tr(I+A)^{-1} \;+\; tr(A^{-1}+I)^{-1} \;=\; n$$

Πρόβλημα 13.

Έστω ο συμμετρικός πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{bmatrix}$$

και $B \in \mathbf{R}^4$ τυχόν διάνυσμα. Ποιες συνθήκες πρέπει να ικανοποιούνται για να έχει το σύστημα $AX{=}B$ μοναδική λύση; **5μ.**

Βρίσκουμε τον κλιμακωτό του A

$$A \sim \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & b-a & c-a & c-a \\ 0 & b-a & c-a & d-a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & c-b & d-b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{bmatrix}$$

Για να έχει το σύστημα μοναδική λύση πρέπει για τον ανηγμένο κλιμακωτό R του A να ισχύει $R{=}I$. Άρα ο R δε πρέπει να έχει μηδενικές γραμμές. Αυτό συμβαίνει μόνο όταν

$$0 \neq a \neq b \neq c \neq d\,.$$

Πρόβλημα 14.
Να βρεθεί η **γενική λύση** του συστήματος:

$$
\begin{array}{rrrrrrcr}
x_1 & +2\,x_2 & +3\,x_3 & +\;x_4 & -\;x_5 & +4\,x_6 & = & 4 \\
2\,x_1 & +4\,x_2 & +6\,x_3 & +3\,x_4 & -3\,x_5 & +9\,x_6 & = & 7 \\
3\,x_1 & +6\,x_2 & +9\,x_3 & +3\,x_4 & -2\,x_5 & +13\,x_6 & = & 19 \\
-2\,x_1 & -4\,x_2 & -6\,x_3 & -\;x_4 & +2\,x_5 & -6\,x_6 & = & -2
\end{array}
$$

5μ.

Βρίσκουμε τον ανηγμένο Γ-κλιμακωτό του επαυξημένου πίνακα

$$
[A|B] = \left[\begin{array}{rrrrrr|r}
1 & 2 & 3 & 1 & -1 & 4 & 4 \\
2 & 4 & 6 & 3 & -3 & 9 & 7 \\
3 & 6 & 9 & 3 & -2 & 13 & 19 \\
-2 & -4 & -6 & -1 & 2 & -6 & -2
\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrrrr|r}
1 & 2 & 3 & 1 & -1 & 4 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 7 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 6
\end{array}\right] \sim
$$

$$
\sim \left[\begin{array}{rrrrrr|r}
1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 3 & 5 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 7 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 7
\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrrrr|r}
1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 3 & 5 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 7 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

Το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων με τρεις ελεύθερες μεταβλητές, τις x_2, x_3 και x_6. Θέτοντας $x_2=\lambda$, $x_3=\mu$ και $x_6=\kappa$, παίρνουμε τη γενική λύση

$$
\begin{array}{rcl}
x_1 & = & 5 - 2\lambda - 3\mu - 3\kappa \\
x_2 & = & \lambda \\
x_3 & = & \mu \\
x_4 & = & 6 - 2\kappa \\
x_5 & = & 7 - \kappa \\
x_6 & = & \kappa
\end{array}
$$

Πρόβλημα 15.

Έστω οι πίνακες $A, B, C, D \in \mathcal{M}_{n\times n}$. Αν οι πίνακες AB^T και CD^T είναι **συμμετρικοί** και

$$AD^T - BC^T = I\,,$$

δείξτε ότι

$$A^TD - C^TB = I\,.$$

10μ.

Επειδή οι AB^T και CD^T είναι συμμετρικοί έχουμε

$$(AB^T)^T = AB^T \quad\Longrightarrow\quad BA^T = AB^T \quad\Longrightarrow\quad AB^T - BA^T = O \tag{i}$$

και

$$(CD^T)^T = CD^T \quad\Longrightarrow\quad DC^T = CD^T \quad\Longrightarrow\quad -CD^T + DC^T = O \tag{ii}$$

Από τη δοσμένη σχέση

$$AD^T - BC^T = I\,, \tag{iii}$$

έχουμε

$$(AD^T - BC^T)^T = I^T \quad\Longrightarrow\quad DA^T - CB^T = I \tag{iv}$$

Γράφουμε τώρα μαζί τις (i)-(iv) ως εξής:

$$\begin{bmatrix} AD^T - BC^T & AB^T - BA^T \\ -CD^T + DC^T & -CB^T + DA^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ O & I \end{bmatrix} \quad\Longrightarrow\quad \begin{bmatrix} A & -B \\ -C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D^T & B^T \\ C^T & A^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ O & I \end{bmatrix} \quad\Longrightarrow$$

(γιατι;)

$$\begin{bmatrix} D^T & B^T \\ C^T & A^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & -B \\ -C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ O & I \end{bmatrix} \quad\Longrightarrow\quad \begin{bmatrix} D^TA - B^TC & -D^TB + B^TD \\ C^TA - A^TC & -C^TB + A^TD \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ O & I \end{bmatrix} \quad\Longrightarrow$$

$$A^TD - C^TB = I\,.$$

Σημείωση:

Ισχύουν επίσης τα εξής:

$$\left.\begin{array}{l} D^TA - B^TC = I \\ -D^TB + B^TD = O \quad\Longrightarrow\quad D^TB = B^TD \quad\Longrightarrow\quad (B^TD)^T = B^TD \\ C^TA - A^TC = O \quad\Longrightarrow\quad C^TA = A^TC \quad\Longrightarrow\quad (A^TC)^T = A^TC \end{array}\right\}$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι οι B^TD και A^TC είναι συμμετρικοί.