ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι (ΜΑΣ121) - 29 Νοεμβρίου 2000

Όνομα: **ΑΠΤ:**

Πρόβλημα 1.

(α) Διατυπώστε τον ορισμό της **εικόνας** μιας απεικόνισης. **5μ.**

(β) Διατυπώστε τον ορισμό του **πυρήνα** μιας γραμμικής απεικόνισης. **5μ.**

(γ) Δείξτε ότι η απεικόνιση $T : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$, με τύπο

$$T(x_1, x_2, x_3) \;=\; (x_1 + x_2 + x_3,\; x_2 + x_3,\; 2x_1 - x_3)$$

είναι **γραμμική**. **20μ.**

(δ) Να βρεθεί ο τύπος της $T \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3)$ αν

$$T(1,1) \;=\; (3,2,4) \qquad \text{και} \qquad T(1,-1) \;=\; (1,0,2)$$

20μ.

(α) Καλούμε **εικόνα** της απεικόνισης $T : V_1 \longrightarrow V_2$ και τη συμβολίζουμε με ImT το σύνολο των εικόνων των $x \in V_1$:

$$ImT \;=\; \{ y \in V_2 \mid y = T(x)\,, \quad x \in V_1 \}$$

(β) Καλούμε **πυρήνα** της γραμμικής απεικόνισης $T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ και τον συμβολίζουμε με $KerT$ το σύνολο των $x \in V_1$ που απεικονίζονται μέσω της T στο $\mathbf{0} \in V_2$:

$$KerT \;=\; \{ x \in V_1 \mid T(x) = \mathbf{0} \}$$

(γ) Αρκεί να δείξουμε ότι $\forall x, y \in \mathbf{R}^3$ και $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ ισχύει

$$T(\lambda x + \mu y) \;=\; \lambda\, T(x) \;+\; \mu\, T(y)\,.$$

Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}
T(\lambda x + \mu y) &= T\,[\lambda\,(x_1, x_2, x_3) \;+\; \mu\,(y_1, y_2, y_3)] \;=\; T(\lambda x_1 + \mu y_1,\; \lambda x_2 + \mu y_2,\; \lambda x_3 + \mu y_3) \\
&= (\,\lambda x_1 + \mu y_1 + \lambda x_2 + \mu y_2 + \lambda x_3 + \mu y_3,\; \lambda x_2 + \mu y_2 + \lambda x_3 + \mu y_3,\; 2\lambda x_1 + 2\mu y_1 - \lambda x_3 - \mu y_3\,) \\
&= \lambda\,(x_1 + x_2 + x_3,\; x_2 + x_3,\; 2x_1 - x_3) \;+\; \mu\,(y_1 + y_2 + y_3,\; y_2 + y_3,\; 2y_1 - y_3) \\
&= \lambda\, T(x) \;+\; \mu\, T(y)
\end{aligned}$$

Άρα η T είναι γραμμική.

(δ) Τα u_1=(1,1) και u_2=(1,-1) αποτελούν μια βάση του $\mathbf{R}^2$ αφού $dim\mathbf{R}^2$=2 και τα u_1, u_2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (το ένα δεν είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του άλλου). Άρα κάθε στοιχείο (x_1, x_2) του $\mathbf{R}^2$ γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των u_1 και u_2. Αν

$$(x_1,\, x_2) \;=\; \lambda_1\, u_1 \;+\; \lambda_2\, u_2 \;=\; (\lambda_1 \;+\; \lambda_2,\, \lambda_1 \;-\; \lambda_2) \quad\Longrightarrow\quad \left.\begin{array}{l} \lambda_1 \;+\; \lambda_2 \;=\; x_1 \\ \lambda_1 \;-\; \lambda_2 \;=\; x_2 \end{array}\right\} \quad\Longrightarrow$$

$$\lambda_1 \;=\; \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad \text{και} \qquad \lambda_2 \;=\; \frac{x_1 - x_2}{2}\,.$$

Άρα

$$(x_1,\, x_2) \;=\; \frac{x_1 + x_2}{2}\, u_1 \;+\; \lambda_2\, \frac{x_1 - x_2}{2}\,.$$

Μπορούμε τώρα να βρούμε τον τύπο της T:

$$\begin{aligned}
T(x_1,\, x_2) &= T\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\, u_1 \;+\; \frac{x_1 - x_2}{2}\, u_2\right) \;=\; \frac{x_1 + x_2}{2}\, T(u_1) \;+\; \frac{x_1 - x_2}{2}\, T(u_2) \\
&= \frac{x_1 + x_2}{2}\,(3,2,4) \;+\; \frac{x_1 - x_2}{2}\,(1,0,2) \quad\Longrightarrow
\end{aligned}$$

$$T(x_1,\, x_2) \;=\; (2x_1 + x_2,\; x_1 + x_2,\; 3x_1 + x_2)\,.$$

Πρόβλημα 2.

Έστω η $T \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^4, \mathbf{R}^3)$ με τύπο

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) \;=\; (x_1 + x_2,\; x_2 + x_3,\; x_3 + x_4)\,.$$

(α) Να βρεθούν ο $KerT$, μια βάση του $KerT$ και η $dimKerT$. **20μ.**
(β) Να βρεθούν η ImT, μια βάση της ImT και η $dimImT$. **20μ.**
(γ) Επαληθεύστε το **θεώρημα τάξης και μηδενικότητας**:

$$dimV_1 \;=\; dimKerT \;+\; dimImT\;.$$

5μ.
(δ) Είναι η T **επί**; Εξηγείστε την απάντησή σας. **5μ.**

(α) Τα στοιχεία του πυρήνα ικανοποιούν την $T(x)=\mathbf{0}$. Έτσι

$$(x_1 + x_2,\; x_2 + x_3,\; x_3 + x_4) \;=\; (0,0,0) \quad\Longrightarrow\quad \left.\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 &=& 0 \\ x_2 + x_3 &=& 0 \\ x_3 + x_4 &=& 0 \end{array}\right\}\,.$$

Το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων με μια ελεύθερη μεταβλητή. Η γενική λύση είναι η

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \;=\; (\lambda,\; -\lambda,\; \lambda,\; -\lambda)\,.$$

Άρα

$$KerT \;=\; \left\{ x \in \mathbf{R}^4 \mid x = \lambda\,(1,-1,1,-1),\quad \lambda \in \mathbf{R} \right\}\;.$$

Μια βάση του $KerT$ είναι το

$$\{(1,-1,1,-1)\}$$

αφού τον παράγει και είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. Έχουμε προφανώς

$$dimKerT \;=\; 1\;.$$

(β) Τα στοιχεία της εικόνας είναι της μορφής

$$(x_1 + x_2,\; x_2 + x_3,\; x_3 + x_4) \;=\; x_1\,(1,0,0) \;+\; x_2\,(1,1,0) \;+\; x_3\,(0,1,1) \;+\; x_4\,(0,0,1)\,.$$

Τα

$$u_1 = (1,0,0),\;\; u_2 = (1,1,0),\;\; u_3 = (0,1,1),\;\; u_4 = (0,0,1) \in \mathbf{R}^3$$

είναι γραμμικώς εξαρτημένα αφού $dim\mathbf{R}^3{=}3$. Είναι εύκολο να δούμε, για παράδειγμα, ότι $u_3{=}u_2{+}u_4{-}u_1$.
Το σύνολο

$$\{u_1, u_2, u_4\}$$

είναι βάση της εικόνας ImT αφού την παράγει και είναι γραμμικώς ανεξάρτητο (το u_2 δεν είναι γραμμικός συνδυασμός των u_1 και u_4). Άρα

$$dimImT \;=\; 3\;.$$

Επειδή η ImT είναι υπόχωρος του $\mathbf{R}^3$ και $dimImT{=}dim\mathbf{R}^3{=}3$,

$$ImT \;=\; \mathbf{R}^3\;.$$

Παρατηρήσεις

(i) Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε πολύ πιο εύκολα αν εφαρμόσουμε το θεώρημα τάξης και μηδενικότητας.
(ii) Εννοείται ότι κάθε βάση του $\mathbf{R}^3$, π.χ. η συνήθης, είναι βάση της ImT.

(γ)

$$dimKerT \;+\; dimImT \;=\; 1 + 3 \;=\; 4 \;=\; dim\mathbf{R}^4\;.$$

(δ) Η T είναι επί αφού $ImT{=}\mathbf{R}^3$.