**ΜΑΣ121: ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι**
**Χειμερινό εξάμηνο 2021-2022, Διδάσκων: Γιώργος Γεωργίου**
**2ο κουίζ, Διάρκεια: 40 min**
**11 Οκτωβρίου, 2021**

**Δίνονται 6 προβλήματα που αντιστοιχούν σε 115 μονάδες με άριστα το 100!**

## ΟΝΟΜΑ: Αρ. Πολ. Ταυτ.

**Πρόβλημα 1.** Διατυπώστε τους ορισμούς των πιο κάτω:
(α) **Πρόσημο** μετάθεσης **4μ.**
(β) **Ορίζουσα** πίνακα **4μ.**
(γ) **Σχέση ισοδυναμίας** **4μ.**
(δ) **Ημιομάδα** **4μ.**
(ε) **Υποομάδα** **4μ.**

(α) Το **πρόσημο** μιας μετάθεσης $\sigma \in S_n$ είναι η συνάρτηση $\mathrm{sgn} : S_n \to \{-1,1\}$ που ορίζεται ως εξής

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{\mu(\sigma)} = \begin{cases} -1, & \sigma \text{ περιττή} \\ 1, & \sigma \text{ άρτια} \end{cases}$$

όπου $\mu(\sigma)$ η δείκτρια (δηλ. το πλήθος των αντιστροφών) της μετάθεσης.

(β) Καλούμε **ορίζουσα** ενός τετραγωνικού πίνακα $A \in M_{n\times n}$ το άθροισμα

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n)\, a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \cdots a_{n\sigma_n}$$

(γ) Μια σχέση $\sim$ στο σύνολο $A$ καλείται **σχέση ισοδυναμίας** (equivalence relation) αν
(i) $a \sim a \quad \forall a \in A$ (αυτοπαθής ή ανακλαστική ιδιότητα)
(ii) $a \sim b$ αν και μόνο αν $b \sim a, \quad a, b \in A$ (συμμετρική ιδιότητα)
(iii) Αν $a \sim b$ και $b \sim c$ τότε $a \sim c, \quad a, b, c \in A$ (Μεταβατική ιδιότητα)

(δ) Το ζεύγος $(S, *)$ όπου $S$ ένα μη κενό σύνολο και * μια πράξη στο $S$ καλείται **ημιομάδα** αν η πράξη * είναι προσεταιριστική.

(ε) Έστω $(G, \cdot)$ μια ομάδα. Το υποσύνολο $H \subseteq G$ καλείται **υποομάδα** της *G* αν ισχύουν τα εξής:
(i) $e \in H$
(ii) Αν $x, y \in H$ τότε $x \cdot y \in H$ (το *H* είναι κλειστό ως προς την πράξη $\cdot$ ).
(iii) Αν $x \in H$ τότε $x^{-1} \in H$ (το *H* είναι κλειστό ως προς την αντιστροφή).

**Πρόβλημα 2**

(α) Δίνεται ότι η ορίζουσα τάξης 7 περιλαμβάνει 7! όρους ένας εκ των οποίων είναι της μορφής

$$\operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{ij}a_{63}a_{11}a_{76}a_{25}a_{44}a_{37}$$

Να βρεθούν τα $i$ και $j$, η **μετάθεση** $\sigma$ που αντιστοιχεί στον πιο πάνω όρο και το **πρόσημό** της. **8μ.**

(β) **Χρησιμοποιώντας τον ορισμό** της ορίζουσας δείξτε ότι η ορίζουσα ενός πίνακα που έχει μηδενική γραμμή είναι μηδέν. **6μ.**

(γ) **Χρησιμοποιώντας τον ορισμό**, βρείτε την ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \delta \\ 0 & 0 & \gamma & \delta \\ 0 & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

**6μ.**

---

(α) Κάθε όρος περιέχει ένα στοιχείο από κάθε γραμμή και από κάθε στήλη, άρα $i=5$ και $j=2$. Άρα έχουμε

$$\operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{52}a_{63}a_{11}a_{76}a_{25}a_{44}a_{37} \text{ ή } \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{11}a_{25}a_{37}a_{44}a_{52}a_{63}a_{76}$$

Άρα η μετάθεση είναι η

$$\sigma = (1,\ 5,\ 7,\ 4,\ 2,\ 3,\ 6)$$

με πρόσημο

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{\mu(\sigma)} = (-1)^{0+3+4+2+0+0+0} = (-1)^9 = -1$$

(β) Έστω ότι η $i$ γραμμή του $A \in M_{n\times n}$ είναι μηδενική. Από τον ορισμό της ορίζουσας έχουμε

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma_1}a_{2\sigma_2}\cdots a_{\iota\sigma_\iota}\cdots a_{n\sigma_n} = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma_1}a_{2\sigma_2}\cdots 0 \cdots a_{n\sigma_n} = 0$$

(γ) Παρατηρούμε ότι από το άθροισμα

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_4} \operatorname{sgn}(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4)\, a_{1\sigma_1}a_{2\sigma_2}a_{3\sigma_3}a_{4\sigma_4}$$

επιβιώνει μόνο ένας όρος:

$$\det A = \operatorname{sgn}(4,3,2,1)\, a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} = (-1)^{3+2+1+0}\delta\gamma\beta\alpha = \alpha\beta\gamma\delta$$

**Πρόβλημα 3**. Για τα τα πιο κάτω ζεύγη (i) γράψτε τα **ουδέτερα στοιχεία** των συνόλων ως προς την αντίστοιχη πράξη, (ii) αν η πράξη είναι **προσεταιριστική** και (iii) αν η πράξη είναι **αντιμεταθετική**.

(α) $\left(\mathbf{R}^4, +\right)$ **4μ.**

(β) $\left(\mathbf{C}, \cdot\right)$ **4μ.**

(γ) $\left(M_{3\times 3}, \cdot\right)$ **4μ.**

(δ) $\left(S_n, \circ\right)$ **4μ.**

(ε) $\left(P_n, +\right)$ **4μ.**

---

(α) $\left(\mathbf{R}^4, +\right)$

$\mathbf{0} = (0,0,0,0) \in \mathbf{R}^4$

Η πρόσθεση στον $\mathbf{R}^4$ είναι προσεταιριστική και αντιμεταθετική.

(β) $\left(\mathbf{C}, \cdot\right)$

$1 = 1 + 0i \in \mathbf{C}$

Ο πολλαπλασιασμός στον $\mathbf{C}$ είναι προσεταιριστικός και αντιμεταθετικός.

(γ) $\left(M_{3\times 3}, \cdot\right)$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_{3\times 3}$$

Ο πολλαπλασιασμός στον $M_{3\times 3}$ είναι προσεταιριστικός **αλλ'όχι** αντιμεταθετικός.

(δ) $\left(S_n, \circ\right)$

$e = (1, 2, \cdots, n) \in S_n$

Η σύνθεση στον $S_n$ είναι προσεταιριστική **αλλ'όχι** αντιμεταθετική.

(ε) $\left(P_n, +\right)$

$0(x) = 0 + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^n \in P_n$

Η πρόσθεση στον $P_n$ είναι προσεταιριστική και αντιμεταθετική.

**Πρόβλημα 4**. Στο χώρο $\mathbf{R}$ των πραγματικών αριθμών ορίζουμε την πράξη * ως εξής:

$$x * y = x + y - 4xy, \quad x, y \in \mathbf{R}$$

(α) Δείξτε ότι το ζεύγος $(\mathbf{R}, *)$ είναι **ημιομάδα**. **10μ.**

(β) Βρείτε το **ουδέτερο στοιχείο** του $\mathbf{R}$ **ως προς την πράξη** *. **5μ.**

(γ) Ποιο στοιχείο του $\mathbf{R}$ δεν έχει **συμμετρικό ως προς την πράξη** *; **5μ.**

---

(α) Παρατηρούμε πρώτα ότι η * είναι πράξη στο $\mathbf{R}$, δηλ. το $\mathbf{R}$ είναι κλειστό ως προς την πράξη *, αφού $x + y - 4xy \in \mathbf{R}$ όταν $x, y \in \mathbf{R}$. Για να είναι το ζεύγος $(\mathbf{R}, *)$ ημιομάδα, πρέπει επιπλέον η πράξη * να είναι προσεταιριστική, δηλ. να ισχύει

$$x * (y * z) = (x * y) * z, \quad x, y, z \in \mathbf{R} \tag{i}$$

Για τα δύο μέλη της (i) βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} x * (y * z) &= x * (y + z - 4yz) = x + (y + z - 4yz) - 4x(y + z - 4yz) \\ &= x + y + z - 4yz - 4xy - 4xz + 16xyz \\ (x * y) * z &= (x + y - 4xy) * z = (x + y - 4xy) + z - 4(x + y - 4xy)z \\ &= x + y + z - 4xy - 4xz - 4yz + 16xyz \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η (i) ισχύει. Άρα το $(\mathbf{R}, *)$ είναι ημιομάδα.

(β) Βλέπουμε εύκολα ότι το ουδέτερο στοιχείο του $\mathbf{R}$ ως προς την πράξη * είναι το $0 \in \mathbf{R}$. Πράγματι

$$x * 0 = x + 0 - 4x \cdot 0 = x \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

και

$$0 * x = 0 + x - 4 \cdot 0 \cdot x = x \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

Άρα

$$x * 0 = 0 * x = x \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

(γ) Έστω $x \in \mathbf{R}$. Αν υπάρχει το συμμετρικό του $x' \in \mathbf{R}$ ως προς την πράξη *, έχουμε:

$$x * x' = 0 \quad \Rightarrow \quad x + x' - 4xx' = 0 \quad \Rightarrow \quad x'(4x - 1) = x \quad \Rightarrow \quad x' = \frac{x}{4x - 1}$$

Παρατηρούμε ότι όλα τα $x \in \mathbf{R}$ έχουν συμμετρικό ως προς την πράξη *, με μόνη εξαίρεση το $x = 1/4$ (επειδή μηδενίζεται ο παρονομαστής).

**Πρόβλημα 5**

(α) Εξηγείστε γιατί το ζεύγος $(S_4, \circ)$ είναι **ομάδα**. **6μ.**

(β) Είναι το $(S_4, \circ)$ **αβελιανή (αντιμεταθετική) ομάδα**? Αιτιολογείστε την απάντησή σας. **4μ.**

(γ) Κατασκευάστε μια **γνήσια υποομάδα** της $(S_4, \circ)$ που να περιέχει τη μετάθεση $\sigma = (2,\ 3,\ 4,\ 1)$.

**10μ.**

---

(α) Το ζεύγος $(S_4, \circ)$ όπου $S_4$ το σύνολο των μεταθέσεων των φυσικών αριθμών 1, 2, 3, 4 και $\circ$ η πράξη της σύνθεσης στο $S_4$ είναι ομάδα γιατί ισχύουν τα εξής:

(i) Η πράξη $\circ$ είναι προσεταιριστική, δηλ. $\sigma \circ (\tau \circ \upsilon) = (\sigma \circ \tau) \circ \upsilon \quad \forall \sigma, \tau, \upsilon \in S_4$

(ii) Υπάρχει το ουδέτερο στοιχείο $e = (1,2,3,4) \in S_4$ ως προς την πράξη $\circ$ έτσι ώστε $\sigma \circ e = e \circ \sigma = \sigma \quad \forall \sigma \in G$

(iii) Κάθε μετάθεση $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4) \in S_4$ έχει αντίστροφη την

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in S_4$$

έτσι ώστε

$$\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = e$$

(β) Το $(S_4, \circ)$ δεν είναι αβελιανή ομάδα γιατί η σύνθεση μεταθέσεων δεν είναι αντιμεταθετική.

(γ) Κάθε υποομάδα της $(S_4, \circ)$ πρέπει να περιέχει την ταυτοτική μετάθεση $e = (1,2,3,4) \in S_4$ η οποία έχει ως αντίστροφη τον εαυτό της, $e^{-1} = e$ . [Ικανοποιείται η συνθήκη (i) του ορισμού.]

Η ζητούμενη υποομάδα πρέπει να είναι κλειστή ως προς την αντιστροφή [συνθήκη (iii) του ορισμού], άρα πρέπει να περιλαμβάνει και την αντίστροφη της $\sigma = (2,\ 3,\ 4,\ 1)$:

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = (4,1,2,3)$$

Το σύνολο $\{e, \sigma, \sigma^{-1}\} \subset S_4$ είναι επίσης κλειστό ως προς την σύνθεση [συνθήκη (ii) του ορισμού] αφού

$$\begin{aligned} &\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = e \in S_4 \\ &\sigma \circ e = e \circ \sigma = \sigma \in S_4 \\ &e \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ e = \sigma^{-1} \in S_4 \end{aligned}$$

Οι τρεις συνθήκες του ορισμού ικανοποιούνται, άρα το σύνολο $\{e, \sigma, \sigma^{-1}\} \subset S_4$ είναι γνήσια υποομάδα της $(S_4, \circ)$ .

**Πρόβλημα 6**

(α) Έστω το $K' \subset \mathbf{R}$ και $+$ και $\cdot$ οι συνήθεις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού στον $\mathbf{R}$. Ποιες συνθήκες πρέπει να ικανοποιούνται για να είναι η τριάδα $(K',+,\cdot)$ **σώμα**; **4μ.**

(β) Έστω $V$ ένας διανυσματικός χώρος πάνω σε ένα σώμα $K$. Δείξτε ότι το **μηδενικό στοιχείο** $\mathbf{0} \in V$ είναι **μοναδικό**. **6μ.**

(γ) Έστω $V$ ένας διανυσματικός χώρος πάνω σε ένα σώμα $K$. Δείξτε ότι αν $u,v,w \in V$ και $u+w=v+w$ τότε $u=v$ (**νόμος της διαγραφής**). **5μ.**

---

(α) Το $(K',+,\cdot)$ είναι σώμα αν ικανοποιούνται οι εξής συνθήκες:

(i) $0 \in K' \quad$ και $\quad 1 \in K'$

(ii) Το $K'$ είναι κλειστό ως προς τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού.

(iii) Αν $x \in K'$ τότε $-x \in K'$ (κάθε στοιχείο του $K'$ έχει αντίθετο στο $K'$).

(iv) Αν $x \in K' - \{0\}$ τότε $x^{-1} \in K' - \{0\}$ (κάθε στοιχείο του $K' - \{0\}$ έχει αντίστροφο στο $K'$).

(β) Εξορισμού ο διανυσματικός χώρος $V$ έχει ένα μηδενικό στοιχείο $\mathbf{0}$ τέτοιο ώστε

$$u+\mathbf{0}=\mathbf{0}+u=u \quad \forall u \in V \tag{i}$$

Έστω λοιπόν $\mathbf{0}' \in V$ ένα άλλο μηδενικό στοιχείο του χώρου αυτού οπότε ισχύει

$$u+\mathbf{0}'=\mathbf{0}'+u=u \quad \forall u \in V \tag{ii}$$

Θα δείξουμε ότι $\mathbf{0}'=\mathbf{0}$.

Πράγματι, από την (i) θέτοντας $u=\mathbf{0}'$ παίρνουμε

$$\mathbf{0}'=\mathbf{0}+\mathbf{0}'$$

οπότε λόγω της (ii) βρίσκουμε ότι $\mathbf{0}'=\mathbf{0}+\mathbf{0}'=\mathbf{0}$.

(γ) Θεωρούμε ως δεδομένο ότι το αντίθετο κάθε στοιχείου του $V$ είναι μοναδικό. Από την

$$u+w=v+w \quad \Rightarrow$$

$$(u+w)+(-w)=(v+w)+(-w) \quad \Rightarrow \text{ (ιδιότητα A1)}$$

$$u+\big(w+(-w)\big)=v+\big(w+(-w)\big) \quad \Rightarrow \text{ (ιδιότητα A3)}$$

$$u+\mathbf{0}=v+\mathbf{0} \quad \Rightarrow \text{ (ιδιότητα A2)}$$

$$u=v$$