ΜΑΣ121: ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι
Εαρινό εξάμηνο 2017-2018, Διδάσκων: Γιώργος Γεωργίου
4ο κουίζ, Διάρκεια: 40 min
8 Νοεμβρίου, 2017

ΟΝΟΜΑ: Αρ. Πολ. Ταυτ.

Πρόβλημα 1. Να επιλυθεί το πιο κάτω γραμμικό σύστημα:

$$\begin{aligned}
&x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 6\\
&2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 = 11\\
&3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + x_4 = 20\\
&2x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 = -5
\end{aligned}$$

20μ.

Βρίσκουμε τον ανηγμένο κλιμακωτό $[R\,|\,S]$ του επαυξημένου πίνακα

$$[A\,|\,B] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & | & 6 \\ 2 & -4 & 3 & -1 & | & 11 \\ 3 & -6 & 4 & 1 & | & 20 \\ 2 & -4 & 1 & -1 & | & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & | & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & | & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & | & -17 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 & | & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & | & -18 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$[A\,|\,B] \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & | & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} = [R\,|\,S]$$

Το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων, με μια ελεύθερη μεταβλητή, την x_2. Η γενική λύση του συστήματος έχει ως εξής:

$$\begin{aligned}
x_1 &= -5 + 2\lambda\\
x_2 &= \lambda\\
x_3 &= 8\\
x_4 &= 3
\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2. Αν $A \in M_{n\times n}$ δείξτε ότι οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:
(α) Ο *Α* είναι αντιστρέψιμος.
(β) Το σύστημα *AX=B* έχει μοναδική λύση.
(γ) Ο *A* είναι γινόμενο πεπερασμένου πλήθους στοιχειωδών πινάκων.

15μ.

$\underline{(\alpha) \Longrightarrow (\beta)}$

Αν ο Α είναι αντιστρέψιμος, τότε από την *AX=B* έχουμε

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \quad \Longrightarrow \quad X = A^{-1}B$$

Άρα το σύστημα *AX=B* έχει μοναδική λύση.

$\underline{(\beta) \Longrightarrow (\gamma)}$

Αν το σύστημα *AX=B* έχει μοναδική λύση, τότε ο ανηγμένος κλιμακωτός του *A* είναι ο ταυτοτικός πίνακας, *R=I*. Όμως από τη σχετική πρόταση υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμός στοιχειωδών πίνακων $E_1,\dots,E_k$, έστι ώστε

$$A = E_1E_2 \cdots E_kR = E_1E_2 \cdots E_kI = E_1E_2 \cdots E_k$$

άρα ο *A* είναι γινόμενο πεπερασμένου πλήθους στοιχειωδών πινάκων.

$\underline{(\gamma) \Longrightarrow (\alpha)}$

Αν ο *A* είναι γινόμενο πεπερασμένου πλήθους στοιχειωδών πινάκων,

$$A = E_1E_2 \cdots E_k$$

τότε ο Α είναι αντιστρέψιμος ως γινόμενο αντιστρέψιμων πινάκων (οι στοιχειώδεις πίνακες είναι αντιστρέψιμοι) και

$$A = E_k^{-1} \cdots E_2^{-1}E_1^{-1}$$

Πρόβλημα 3. Έστω οι πίνακες:

$$A=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\5&0&0&1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}5&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-3\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}4&1&0\\0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$$

(α) Να βρεθούν οι αντίστροφοι των πιο πάνω πινάκων αν υπάρχουν **12μ.**

(β) Να υπολογιστούν τα γινόμενα ABC, BAD και $A^{2016}BAD$. **13μ.**

(α) Παρατηρούμε ότι ο *A* είναι στοιχειώδης, $A=E_{1,4}$, και έτσι

$$A^{-1}=\left(E_{1,4}\right)^{-1}=E_{1,4}=A=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

Ο *B* είναι επίσης στοιχειώδης, $B=E_{4,1}^{5}$:

$$B^{-1}=\left(E_{4,1}^{5}\right)^{-1}=E_{4,1}^{-5}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\-5&0&0&1\end{bmatrix}$$

Ο *C* δεν είναι αντιστρέψιμος αφού έχει μηδενική γραμμή.

Ο *D* δεν είναι τετραγωνικός, οπότε δεν ορίζεται ο αντίστροφός του.

(β) Επειδή $ABC=E_{1,4}E_{4,1}^{5}C$ ο ABC προκύπτει από τον C εφαρμόζοντας διαδοχικά τους μετασχηματισμούς $r_4\to r_4+5r_1$ και $r_1\leftrightarrow r_4$. Βρίσκουμε έτσι ότι

$$ABC=\begin{bmatrix}25&0&0&-3\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\5&0&0&0\end{bmatrix}$$

Επειδή $BAD=E_{4,1}^{5}E_{1,4}D$ ο BAD προκύπτει από τον D εφαρμόζοντας διαδοχικά τους μετασχηματισμούς $r_1\leftrightarrow r_4$ και $r_4\to r_4+5r_1$. Βρίσκουμε έτσι ότι

$$BAD=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\9&1&0\end{bmatrix}$$

Επειδή $A^2=I$, $A^{2016}BAD=BAD.$

Πρόβλημα 4. Να βρεθούν οι αντίστροφοι των ακόλουθων πινάκων:
(α)

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

5μ.

(β)

$$\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

15μ.

(α) Βρίσκουμε τον ανηγμένο κλιμακωτό του πίνακα $[A\,|\,I]$:

$$[A\,|\,I] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 2 & 3 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 0 & -1 & | & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & | & 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & -3 & 2 \\ 0 & 1 & | & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Άρα

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

(β) Βρίσκουμε τον ανηγμένο κλιμακωτό του πίνακα $[B\,|\,I]$:

$$[B\,|\,I] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & | & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & | & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & | & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & | & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & | & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & | & -3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & | & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3/2 & -1/2 & -5/2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1/2 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3/2 & -1/2 & -5/2 \end{bmatrix}$$

Άρα

$$B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

Πρόβλημα 5.

(α) Να βρεθεί η λύση του συστήματος $\mathrm{A}X = B$ όπου

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 10 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

10μ.

(β) Βρείτε για ποιες τιμές του *α* είναι αντιστρέψιμος ο πίνακας

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \end{bmatrix}$$

10μ.

(α) Βρίσκουμε τον ανηγμένο κλιμακωτό του πίνακα $[A|\mathrm{B}]$:

$$[A|B] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & | & 1 & -2 & 10 \\ 1 & 4 & | & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & | & 1 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & | & 1 & 3 & -10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & -2 & -11 & 40 \\ 0 & 1 & | & 1 & 3 & -10 \end{bmatrix}$$

Άρα

$$X = \begin{bmatrix} -2 & -11 & 40 \\ 1 & 3 & -10 \end{bmatrix}$$

(β) Βρίσκουμε τον κλιμακωτό του *C*:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & \alpha-1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & \alpha-1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & (1-\alpha)/3 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι ο *C* είναι αντιστρέψιμος αν $\alpha \neq 1$ (σε αυτή την περίπτωση $C \sim I$).