ΜΑΣ121: ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι
Εαρινό εξάμηνο 2017-2018, Διδάσκων: Γιώργος Γεωργίου
3ο κουίζ, Διάρκεια: 40 min
25 Οκτωβρίου, 2017

ΟΝΟΜΑ: **Αρ. Πολ. Ταυτ.**

Πρόβλημα 1. Διατυπώστε τους ορισμούς των πιο κάτω:
(α) **Γραμμική θήκη** **3μ.**
(β) **Γραμμοϊσοδύναμοι πίνακες** **2μ.**
(γ) **Συμβιβαστό σύστημα** **2μ.**
(δ) **Συμπληρωματικός υπόχωρος** **2μ.**
(ε) Αν οι *X* και *Y* είναι υπόχωροι του *V* και $\dim X = 3$, $\dim Y = 2$ και $X \cap Y = \{\mathbf{0}\}$, βρείτε τη διάσταση του αθροίσματος $X+Y$. Τι συμπέρασμα βγάζετε για τη διάσταση του *V*; **6μ.**

(α) Έστω *V* γραμμικός χώρος πάνω σε ένα σώμα *K* και $S = \{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$ ένα πεπερασμένο υποσύνολο του *V*. Το σύνολο *L*(*S*) των γραμμικών συνδυασμών των $u_1, u_2, \cdots, u_m$ συμβολίζεται επίσης με

$$[S] \quad \text{ή} \quad [u_1, u_2, \cdots, u_m] \quad \text{ή} \quad span[u_1, u_2, \cdots, u_m]$$

και καλείται **γραμμική θήκη** ή **γραμμικό περίβλημα** (linear span) των $u_1, u_2, \cdots, u_m$.

(β) Δυο πίνακες καλούνται **γραμμοϊσοδύναμοι** αν ο ένας προκύπτει από τον άλλο με εφαρμογή μιας πεπερασμένης ακολουθίας στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών.

(γ) Ένα σύστημα είναι **συμβιβαστό** αν έχει (τουλάχιστο μία) λύση.

(δ) Αν οι V_1 και V_2 είναι υπόχωροι του *V* και ισχύει

$$V = V_1 \oplus V_2$$

τότε ο V_2 καλείται **συμπληρωματικός υπόχωρος** του V_1.

(ε) Ισχύει

$$\dim(X+Y) = \dim X + \dim Y - \dim(X \cap Y) = 3 + 2 - 0 = 5$$

Επειδή ο $X+Y$ είναι υπόχωρος του *V* ισχύει

$$\dim V \ge \dim(X+Y) = 5$$

Πρόβλημα 2.
(α) Να βρεθεί μια **βάση** και η **διάσταση** του

$$W=\left\{A\in M_{2\times 2}\quad :\quad A=\begin{bmatrix} a & b \\ a+2b+3c & c \end{bmatrix},\quad a,b,c\in\mathbf{R}\right\}$$

10μ.

(β) Να **επεκταθεί** η βάση που βρήκατε σε μια βάση του $M_{2\times 2}$. **10μ.**

(γ) Δείξτε ότι ο *W* είναι **υπόχωρος** του $M_{2\times 2}$. **15μ.**

(α) Παρατηρούμε ότι το γενικό στοιχείο του $M_{2\times 2}$ γράφεται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ a+2b+3c & c \end{bmatrix}=a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}+c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}=aE_1+bE_2+cE_3$$

Άρα το σύνολο $B=\{E_1,E_2,E_3\}$ παράγει τον $M_{2\times 2}$. Θα δείξουμε ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητο οπότε αποτελεί βάση του $M_{2\times 2}$. Πράγματι από την

$$\lambda_1E_1+\lambda_2E_2+\lambda_3E_3=O\quad\Rightarrow\quad\begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3 & \lambda_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$$

Άρα το B είναι βάση του $M_{2\times 2}$ και έτσι $\dim W=3$.

(β) Επειδή $\dim M_{2\times 2}=4$, απαιτείται 1 στοιχείο για να επεκταθεί το *B* σε βάση του $M_{2\times 2}$. Μια επιλογή είναι η εξής:

$$B'=\left\{E_1,E_2,E_3,E_4=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$$

Αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο B' είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Πράγματι από την

$$\lambda_1E_1+\lambda_2E_2+\lambda_3E_3+\lambda_4E_4=O\quad\Rightarrow\quad\begin{bmatrix} \lambda_1+\lambda_4 & \lambda_2 \\ \lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3 & \lambda_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$$

(γ) Θα δείξουμε ότι επαληθεύονται οι 3 συνθήκες του Θ2.2.2.

(i) $O=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\in W$

(ii) Για τους $A=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_1+2b_1+3c_1 & c_1 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ a_2+2b_2+3c_2 & c_2 \end{bmatrix}\in W$ έχουμε

$$A+B=\begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ a_1+a_2+2(b_1+b_2)+3(c_1+c_2) & c_1+c_2 \end{bmatrix}\in W$$

(το *W* είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση).

(iii) Αν $\lambda\in\mathbf{R}$ και $A=\begin{bmatrix} a & b \\ a+2b+3c & c \end{bmatrix}\in W$ έχουμε

$$\lambda A=\begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda a+2\lambda b+3\lambda c & \lambda c \end{bmatrix}\in W$$

(το *W* είναι κλειστό ως προς το βαθμωτό πολλαπλασιασμό). Άρα ο *W* είναι υπόχωρος του $M_{2\times 2}$.

Πρόβλημα 3. Γράψτε τους στοιχειώδεις γραμμικούς μετασχηματισμούς που πρέπει να γίνουν και βρείτε τον **ανηγμένο κλιμακωτό** του κάθε πίνακα. **15μ.**

(α) $$A=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&2&0\\0&0&1&0&1&-1\\1&2&0&0&-2&3\end{bmatrix}$$

(β) $$B=\begin{bmatrix}3&3&0&0&1&9\\0&0&4&0&8&6\\0&0&0&5&0&1\end{bmatrix}$$

(γ) $$C=\begin{bmatrix}1&0&3&0&5&2\\0&1&2&4&-2&3\\0&0&1&-1&2&0\end{bmatrix}$$

(δ) $$D=\begin{bmatrix}1&2&1&0&5&2\\0&1&0&4&-2&3\\0&0&0&1&2&0\end{bmatrix}$$

(ε) $$F=\begin{bmatrix}1&2&0&0&3&-2\\0&1&0&1&2&-1\\0&0&3&3&6&9\end{bmatrix}$$

(στ) Βρείτε τους **αντίστροφους μετασχηματισμούς** των

$$r_3 \to r_3 - 4r_1$$
$$r_2 \to 5r_2$$
$$r_5 \leftrightarrow r_1$$

5μ.

(α) $$A=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&2&0\\0&0&1&0&1&-1\\1&2&0&0&-2&3\end{bmatrix}\ \underset{\sim}{\begin{matrix}r_1\leftrightarrow r_4\\ r_2\leftrightarrow r_3\end{matrix}}\ \begin{bmatrix}1&2&0&0&-2&3\\0&0&1&0&1&-1\\0&0&0&1&2&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

(β) $$B=\begin{bmatrix}3&3&0&0&1&9\\0&0&4&0&8&6\\0&0&0&5&0&1\end{bmatrix}\ \underset{\sim}{\begin{matrix}r_1\to r_1/3\\ r_2\to r_2/4\\ r_3\to r_3/5\end{matrix}}\ \begin{bmatrix}1&1&0&0&1/3&3\\0&0&1&0&2&3/2\\0&0&0&1&0&1/5\end{bmatrix}$$

(γ) $$C=\begin{bmatrix}1&0&3&0&5&2\\0&1&2&4&-2&3\\0&0&1&-1&2&0\end{bmatrix}\ \underset{\sim}{\begin{matrix}r_1\to r_1-3r_3\\ r_2\to r_2-2r_3\end{matrix}}\ \begin{bmatrix}1&0&0&3&-1&2\\0&1&0&6&-6&3\\0&0&1&-1&2&0\end{bmatrix}$$

(δ)

$$D=\begin{bmatrix}1&2&1&0&5&2\\0&1&0&4&-2&3\\0&0&0&1&2&0\end{bmatrix}\underset{\sim}{r_1\to r_1-2r_2}\begin{bmatrix}1&0&1&-8&9&-4\\0&1&0&4&-2&3\\0&0&0&1&2&0\end{bmatrix}\begin{matrix}r_1\to r_1+8r_3\\r_2\to r_2-4r_3\\\sim\end{matrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&0&1&0&25&-4\\0&1&0&0&-10&3\\0&0&0&1&2&0\end{bmatrix}$$

(ε) $$F=\begin{bmatrix}1&2&0&0&3&-2\\0&1&0&1&2&-1\\0&0&3&3&6&9\end{bmatrix}\begin{matrix}r_1\to r_1-2r_2\\r_3\to r_3/3\\\sim\end{matrix}\begin{bmatrix}1&0&0&-2&-1&0\\0&1&0&1&2&-1\\0&0&1&1&2&3\end{bmatrix}$$

(στ) Οι αντίστροφοι μετασχηματισμοί είναι οι

$$r_3\to r_3+4r_1$$
$$r_2\to\frac{1}{5}r_2$$
$$r_5\leftrightarrow r_1$$

Πρόβλημα 4

(α) Βρείτε τον **ανηγμένο κλιμακωτό** του

$$A=\begin{bmatrix}1&2&0&3&1&3&4&2\\2&4&1&5&4&8&9&7\\1&2&0&3&2&4&5&3\\2&4&0&6&1&5&7&3\end{bmatrix}$$

12μ.

(β) Βρείτε την λύση του γραμμικού συστήματος $AX=B$ αν

$$\left[A|B\right]\sim\begin{bmatrix}1&-1&2&1&|&1\\0&1&2&-1&|&2\\0&0&1&-1&|&3\\0&0&0&1&|&2\end{bmatrix}$$

5μ.

(γ) Βρείτε την λύση του γραμμικού συστήματος $AX=B$ αν

$$\left[A|B\right]\sim\begin{bmatrix}1&0&0&0&|&6\\0&1&0&0&|&-2\\0&0&1&1&|&-1\\0&0&0&0&|&1\end{bmatrix}$$

3μ.

(α)

$$A=\begin{bmatrix}1&2&0&3&1&3&4&2\\2&4&1&5&4&8&9&7\\1&2&0&3&2&4&5&3\\2&4&0&6&1&5&7&3\end{bmatrix}\begin{matrix}r_2\to r_2-2r_1\\r_3\to r_3-r_1\\r_4\to r_4-2r_1\\\sim\end{matrix}\begin{bmatrix}1&2&0&3&1&3&4&2\\0&0&1&-1&2&2&1&3\\0&0&0&0&1&1&1&1\\0&0&0&0&-1&-1&-1&-1\end{bmatrix}\begin{matrix}r_1\to r_1-r_3\\r_2\to r_2-2r_3\\r_4\to r_4+r_3\\\sim\end{matrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&2&0&3&0&2&3&1\\0&0&1&-1&0&0&-1&1\\0&0&0&0&1&1&1&1\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

(β) Με πίσω αντικατάσταση βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}&x_4=2\\&x_3=3+x_4=5\\&x_2=2-2x_3+x_4=2-10+2=-6\\&x_1=1+x_2-2x_3-x_4=1-6-10-2=-17\end{aligned}$$

(γ) Έχουμε ηγετικό στοιχείο στην τελευταία στήλη. Άρα το σύστημα είναι αδύνατο.

Πρόβλημα 5.
Να επιλυθεί το πιο κάτω γραμμικό σύστημα:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 + 3x_2 \quad\quad &= -2 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 &= \ \ 2 \\ x_1 + \ x_2 + x_3 &= \ \ 2 \end{aligned}$$

15μ.

Βρίσκουμε τον ανηγμένο κλιμακωτό $[R\,|\,S]$ του επαυξημένου πίνακα

$$[A\,|\,B] = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 & | & -1 \\ 1 & 3 & 0 & | & -2 \\ 3 & 3 & 1 & | & 2 \\ 1 & 1 & 1 & | & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & | & -2 \\ 3 & 6 & 1 & | & -1 \\ 3 & 3 & 1 & | & 2 \\ 1 & 1 & 1 & | & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & | & -2 \\ 0 & -3 & 1 & | & 5 \\ 0 & -6 & 1 & | & 8 \\ 0 & -2 & 1 & | & 4 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$[A\,|\,B] \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & | & -2 \\ 0 & -1 & 0 & | & 1 \\ 0 & -6 & 1 & | & 8 \\ 0 & -2 & 1 & | & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & | & -2 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & -6 & 1 & | & 8 \\ 0 & -2 & 1 & | & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$[A\,|\,B] \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} = [R\,|\,S]$$

Το σύστημα έχει μοναδική λύση την

$$X = (1, -1, 2)^T$$