Κεφάλαιο 3

ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΗΣ ΔΙΑΣΤΑΣΗΣ

3.1 Υπόχωροι παραγόμενοι από διανύσματα

Ορισμός 3.1.1
Έστω V γραμμικός χώρος πάνω σ'ένα σώμα K και

$$S = \{u_1, u_2, \cdots, u_m\}, \quad m \in \mathbf{N}$$

ένα πεπερασμένο υποσύνολο του V. Καλούμε **γραμμικό συνδυασμό** (linear combination) των $u_1, u_2, \cdots, u_m$ κάθε διάνυσμα $u \in V$ της μορφής

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_m u_m \tag{3.1}$$

όπου $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m \in K$.

Παραδείγματα

1. Ας πάρουμε τα διανύσματα $u_1=(1,1,1)$ και $u_2=(-1,0,1)$ του $\mathbf{R}^3$. Τα διανύσματα

$$u_1 - u_2 = (1,1,1) - (-1,0,1) = (2,1,0)$$

   και

$$2u_1 + 3u_2 = 2\,(1,1,1) + 3\,(-1,0,1) = (-1,2,5)$$

   είναι γραμμικοί συνδυασμοί των u_1 και u_2.

2. Θεωρούμε τα διανύσματα $u_1=(1,1,1)$ και $u_2=(1,0,1)$ του $\mathbf{R}^3$. Θα εξετάσουμε αν τα διανύσματα

$$\text{(i) } u = (1,2,1) \quad \text{και} \quad \text{(ii) } u = (3,2,2)$$

   είναι γραμμικοί συνδυασμοί των u_1 και u_2.
   (i) Αναζητούμε αριθμούς λ_1 και $\lambda_2 \in \mathbf{R}$ τέτοιους ώστε

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \quad \Longrightarrow \quad (1,2,1) = \lambda_1\,(1,1,1) + \lambda_2\,(1,0,1) \quad \Longrightarrow$$

$$(\lambda_1+\lambda_2,\ \lambda_1\,,\lambda_1+\lambda_2) \;=\; (1,2,1) \quad \Longrightarrow \quad \left.\begin{array}{lcl} \lambda_1+\lambda_2 &=& 1 \\ \lambda_1 &=& 2 \\ \lambda_1+\lambda_2 &=& 1 \end{array}\right\}$$

Το σύστημα είναι συμβιβαστό και έχει τη μοναδική λύση

$$\lambda_1 \;=\; 2\,, \qquad \lambda_2 \;=\; -1\,.$$

Συνεπώς, το u είναι γραμμικός συνδυασμός των u_1 και u_2:

$$u \;=\; 2\,u_1 \;-\; u_2\,.$$

(ii) Αναζητούμε πάλι λ_1 και $\lambda_2 \in \mathbf{R}$ τέτοια ώστε

$$(3,2,2) = \lambda_1(1,1,1)+\lambda_2(1,0,1) \quad \Longrightarrow \quad (3,2,2) = \lambda_1(1,1,1)+\lambda_2(1,0,1) \quad \Longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{lcl} \lambda_1+\lambda_2 &=& 3 \\ \lambda_1 &=& 2 \\ \lambda_1+\lambda_2 &=& 2 \end{array}\right\}$$

Το σύστημα δεν είναι συμβιβαστό. Συνεπώς το u δεν μπορεί να εκφραστεί σαν γραμμικός συνδυασμός των u_1 και u_2.

Πρόταση 3.1.2

Έστω V γραμμικός χώρος πάνω σ'ένα σώμα K και

$$S \;=\; \{u_1,\, u_2,\, \cdots,\, u_m\}\,, \qquad m \in \mathbf{N}$$

ένα πεπερασμένο υποσύνολο του V. Το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών των $u_1,\, u_2,\, \cdots,\, u_m$,

$$L(S) \;=\; \left\{ u \in V \;:\; u \;=\; \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\, u_i\,, \quad \lambda_i \in K \right\} \tag{3.2}$$

είναι υπόχωρος του V.

Απόδειξη

Επαληθεύουμε τις συνθήκες του Θ. 2.2.2.

(α) Για $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 0$ παίρνουμε

$$0u_1 \;+\; 0u_2 \;+\; \cdots \;+\; 0u_m \;=\; \mathbf{0} \in L(S)\,.$$

(β) Έστω δυο γραμμικοί συνδυασμοί των στοιχείων του S:

$$\begin{array}{lcl} u &=& \lambda_1\,u_1 \;+\; \lambda_2\,u_2 \;+\; \cdots \;+\; \lambda_m\,u_m\,, \quad \lambda_i \in K \\ v &=& \mu_1\,u_1 \;+\; \mu_2\,u_2 \;+\; \cdots \;+\; \mu_m\,u_m\,, \quad \mu_i \in K \end{array}$$

Έχουμε για το άθροισμα των u και v:

$$u \;+\; v \;=\; (\lambda_1+\mu_1)\,u_1 \;+\; (\lambda_2+\mu_2)\,u_2 \;+\; \cdots \;+\; (\lambda_m+\mu_m)\,u_m \in L(S)\,.$$

(γ) Για $a \in K$ έχουμε

$$au \;=\; (a\lambda_1)\, u_1 \;+\; (a\lambda_2)\, u_2 \;+\; \cdots \;+\; (a\lambda_m)\, u_m \in L(S)\,.$$

Σύμφωνα με το Θ. 2.2.2 ο $L(S)$ είναι υπόχωρος του V. $\square$

Ορισμός 3.1.3

Έστω V γραμμικός χώρος πάνω σ'ένα σώμα K και $S=\{u_1,\, u_2,\, \cdots,\, u_m\}$ ένα πεπερασμένο υποσύνολο του V. Το σύνολο $L(S)$ των γραμμικών συνδυασμών των $u_1,\, u_2,\, \cdots,\, u_m$ συμβολίζεται επίσης με

$$[S] \qquad \text{ή} \qquad [u_1,\, u_2,\, \cdots,\, u_m] \qquad \text{ή ακόμα} \qquad span[u_1,\, u_2,\, \cdots,\, u_m]$$

και καλείται **γραμμική θήκη ή περίβλημα** (linear span) των $u_1,\, u_2,\, \cdots,\, u_m$. Λέμε επίσης ότι ο $L(S)$ είναι ο υπόχωρος του V που **παράγεται** (ή **γεννιέται**) από τα διανύσματα $u_1,\, u_2,\, \cdots,\, u_m$.
Τα διανύσματα $u_1,\, u_2,\, \cdots,\, u_m$ λέμε ότι **παράγουν** (ή **γεννούν**) τον $L(S)$ και καλούνται **γεννήτορες** (generators) του $L(S)$.

Παραδείγματα

1. Τα διανύσματα

$$\mathbf{e}_1 \;=\; (1,0,0,\cdots,0)\,, \quad \mathbf{e}_2 \;=\; (0,1,0,\cdots,0)\,, \quad \cdots\,, \quad \mathbf{e}_n \;=\; (0,0,0,\cdots,1)$$

παράγουν τον $\mathbf{R}^n$, αφού κάθε διάνυσμα $(u_1,u_2,\cdots,u_n) \in \mathbf{R}^n$ γράφεται ως εξής:

$$(u_1,u_2,\cdots,u_n) \;=\; u_1\,\mathbf{e}_1 \;+\; u_2\,\mathbf{e}_2 \;+\; \cdots \;+\; u_n\,\mathbf{e}_n\,.$$

Είναι φανερό ότι τα $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\cdots,\mathbf{e}_n$ παράγουν επίσης τον $\mathbf{C}^n$.

2. Οι πίνακες

$$E_{11} \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\; E_{12} \;=\; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\; E_{21} \;=\; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\; E_{22} \;=\; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

παράγουν τον $\mathcal{M}_{2\times 2}(K)$ αφού κάθε 2×2 πίνακας μπορεί να εκφραστεί σαν γραμμικός συνδυασμός των E_{11}, E_{12}, E_{21} και E_{22}:

$$A \;=\; \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \;=\; a_{11}E_{11} \;+\; a_{12}E_{12} \;+\; a_{21}E_{21} \;+\; a_{22}E_{22}\,.$$

Γενικεύοντας, οι $m\times n$ πίνακες

$$E_{ij}\,, \quad i=1,2,\cdots,m\,, \quad j=1,2,\cdots,n\,,$$

που έχουν μηδενικά παντού και 1 στην ij-θέση, είναι γεννήτορες του $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$.

3.2 Γραμμική ανεξαρτησία

Στην περίπτωση που ένας γραμμικός χώρος παράγεται από ένα πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων είναι βασικό να καθορίσουμε σύνολα γεννητόρων με το μικρότερο δυνατό πλήθος στοιχείων. Για την επίτευξη αυτού του στόχου είναι απαραίτητη η έννοια της **γραμμικής ανεξαρτησίας** η οποία είναι το αντικείμενο του παρόντος εδαφίου.

Ορισμός 3.2.1

Έστω V γραμμικός χώρος πάνω σ'ένα σώμα K και $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$, $n \in \mathbf{N}$ ένα πεπερασμένο υποσύνολο του V. Τα διανύσματα $u_1, u_2, \cdots, u_n$ θα λέμε ότι είναι **γραμμικώς εξαρτημένα** (linearly dependent) ή απλώς **εξαρτημένα** αν υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m \in K$, όχι όλα μηδέν, έτσι ώστε

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n = \mathbf{0}\,.$$

Στην περίπτωση αυτή θα λέμε επίσης ότι το σύνολο $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$, $n \in \mathbf{N}$ είναι **γραμμικώς εξαρτημένο**.

Αν η πιο πάνω σχέση ισχύει μόνο όταν όλα τα λ_i είναι ίσα με μηδέν, αν δηλαδή ισχύει η συνεπαγωγή

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n = \mathbf{0} \quad\Longrightarrow\quad \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0\,,$$

θα λέμε ότι τα $u_1, u_2, \cdots, u_n$ είναι **γραμμικώς ανεξάρτητα** (linearly independent).

Παραδείγματα

1. Έστω τα διανύσματα

$$u_1 = (2,-1,3,1)\,,\quad u_2 = (0,3,-2,4) \;\text{ και }\; u_3 = (0,0,2,-3)\,.$$

Για να εξετάσουμε αν τα u_1, u_2, u_3 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα ξεκινούμε από τη σχέση

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = \mathbf{0} \quad\Longrightarrow$$

$$\lambda_1 (2,-1,3,1) + \lambda_2 (0,3,-2,4) + \lambda_3 (0,0,2,-3) = (0,0,0,0) \quad\Longrightarrow$$

$$(2\lambda_1,\, -\lambda_1 + 3\lambda_2,\, 3\lambda_1 - 2\lambda_2,\, \lambda_1 + 4\lambda_2 - 3\lambda_3) = (0,0,0,0) \quad\Longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{lcl} 2\lambda_1 & = & 0 \\ -\lambda_1 + 3\lambda_2 & = & 0 \\ 3\lambda_1 - 2\lambda_2 + 2\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 - 3\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right\} \quad\Longrightarrow\quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0\,.$$

Άρα τα u_1, u_2, u_3 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Πρόταση 3.2.2

Έστω V γραμμικός χώρος πάνω σ'ένα σώμα K και

$$S = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}, \quad n \in \mathbf{N}$$

ένα πεπερασμένο υποσύνολο του V με περισσότερα από ένα στοιχεία ($n > 1$). Τα στοιχεία του S είναι γραμμικώς εξαρτημένα όταν και μόνο όταν κάποιο στοιχείο του είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

Απόδειξη

Δίνεται στις σημειώσεις. □

3.3 Βάση και διάσταση γραμμικού χώρου

Ορισμός 3.3.1
Έστω V γραμμικός χώρος πάνω σ'ένα σώμα K. Το πεπερασμένο υποσύνολο $A=\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$, $n \in \mathbf{N}$, του V καλείται (**πεπερασμένη**) **βάση** του V αν τα $e_1, e_2, \cdots, e_n$ (i) είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, και
(ii) παράγουν το χώρο V.

Επειδή στη συνέχεια θα ασχοληθούμε κυρίως με γραμμικούς χώρους που έχουν πεπερασμένη βάση, θα γράφουμε απλά *βάση* αντί *πεπερασμένη βάση*.

Η πρόταση που ακολουθεί είναι πολύ χρήσιμη, γιατί δίνει ένα χαρακτηρισμό της βάσης.

Πρόταση 3.3.2
Έστω V γραμμικός χώρος και A ένα πεπερασμένο υποσύνολό του. Το A είναι βάση του V όταν και μόνο όταν κάθε στοιχείο του V μπορεί να γραφεί **κατά τρόπο μοναδικό** ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του A.

Απόδειξη
Δίνεται στις σημειώσεις. □

Θεώρημα 3.3.3
Αν τα $y_1, y_2, \cdots, y_{n+1} \in V$, όπου V γραμμικός χώρος, είναι γραμμικοί συνδυασμοί των $x_1, x_2, \cdots, x_n \in V$, τότε τα $y_1, y_2, \cdots, y_{n+1}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Απόδειξη
Δίνεται στις σημειώσεις. □

Θεώρημα 3.3.4
Έστω $V \neq \{\mathbf{0}\}$ γραμμικός χώρος που έχει μια πεπερασμένη βάση A. Τότε, κάθε άλλη βάση του V έχει τον ίδιο αριθμό στοιχείων με τη βάση A.

Απόδειξη
Δίνεται στις σημειώσεις. □

Ορισμός 3.3.5
Αν ο γραμμικός χώρος $V \neq \{\mathbf{0}\}$ έχει μια βάση με $n \in \mathbf{N}$ στοιχεία, ο αριθμός n καλείται **διάσταση** (dimension) του V και συμβολίζεται με

$$dimV = n .$$

Αν $V=\{\mathbf{0}\}$, θα λέμε ότι η διάσταση του V είναι μηδέν.
Τέλος, θα λέμε ότι ο V είναι **πεπερασμένης διάστασης** ή **πεπερασμενοδιάστατος** (finite dimensional) αν $dimV=n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. Διαφορετικά θα λέμε ότι ο V είναι **άπειρης διάστασης** ή **απειροδιάστατος** (infinite dimensional).

Θεώρημα 3.3.6

Αν ο $V \neq \{\mathbf{0}\}$ είναι γραμμικός χώρος πεπερασμένης διάστασης $n \in \mathbf{N}$, ισχύουν τα εξής:

(i) Κάθε γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο του V που δεν είναι βάση του V μπορεί να *επεκταθεί* σε μια βάση του V.

(ii) Κάθε γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο με n το πλήθος στοιχεία του V είναι βάση του V.

Απόδειξη

Δίνεται στις σημειώσεις. □

Θεώρημα 3.3.7

Αν ο V είναι γραμμικός χώρος πεπερασμένης διάστασης $n \in \mathbf{N}$ και ο Y είναι υπόχωρος του V, τότε

$$dimY \leq dimV = n \, .$$

Αν είναι $dimY{=}n$, τότε $Y{=}V$.

Απόδειξη

Δίνεται στις σημειώσεις. □

Θεώρημα 3.3.8

Αν οι V_1 και V_2 είναι υπόχωροι του πεπερασμενοδιάστατου γραμμικού χώρου V, τότε

$$dim(V_1 + V_2) = dimV_1 + dimV_2 - dim(V_1 \cap V_2) \, .$$

Απόδειξη

Δίνεται στις σημειώσεις. □

Πόρισμα 3.3.9

Αν οι V_1 και V_2 είναι υπόχωροι του πεπερασμενοδιάστατου γραμμικού χώρου V και $V{=}V_1 \oplus V_2$, τότε

$$dimV = dimV_1 + dimV_2 \, .$$

Απόδειξη

Εφόσον $V{=}V_1 \oplus V_2$, σύμφωνα με το Θ. 2.3.5

$$V = V_1 + V_2 \quad \text{και} \quad V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\} \, .$$

Το ζητούμενο προκύπτει άμεσα από το Θ. 3.3.8, αφου $dim(V_1 \cap V_2){=}dim\{\mathbf{0}\} = 0$. □

Θεώρημα 3.3.10

Για κάθε υπόχωρο V_1 του πεπερασμενοδιάστατου γραμμικού χώρου V, υπάρχει τουλάχιστον ένας υπόχωρος V_2 του V τέτοιος ώστε

$$V = V_1 \oplus V_2 .$$

Απόδειξη

Δίνεται στις σημειώσεις. $\square$