Κεφάλαιο 9

ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ ΚΑΙ ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

9.1 Ιδιοδιανύσματα γραμμικών τελεστών

Το εδάφιο 9.1 μπορεί να παραληφθεί αν ο αναγνώστης δεν είναι εξοικειωμένος με τις τελευταίες παραγράφους του Κεφαλαίου 7.

Ορισμός 9.1.1
Έστω ο γραμμικός τελεστής $T \in \mathcal{L}(V)$. Ο αριθμός $\lambda \in K$ ονομάζεται **ιδιοτιμή** (eigenvalue) ή **χαρακτηριστική τιμή** του T αν υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα $u \in V$ που ικανοποιεί τη σχέση

$$T(u) = \lambda\, u\,. \tag{9.1}$$

Κάθε μη μηδενικό διάνυσμα που ικανοποιεί την (1) ονομάζεται **ιδιοδιάνυσμα** (eigenvector) ή **χαρακτηριστικό διάνυσμα** του T που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.
Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του $T \in \mathcal{L}(V)$, αν υπάρχουν, ονομάζονται **χαρακτηριστικά μεγέθη** ή **ιδιοποσά** του T.

Παρατήρηση
Αν το $u \in V$, $u \neq \mathbf{0}$, είναι ιδιοδιάνυσμα του $T \in \mathcal{L}(V)$, τότε η εικόνα του u μέσω του T ανήκει στη γραμμική του θήκη,

$$T(u) \in [u]\,. \tag{9.2}$$

Έστω, για παράδειγμα, ο γραμμικός τελεστής $T \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$ που ορίζεται από τη σχέση

$$T(x_1, x_2) \;=\; (2x_2,\, 3x_1 - x_2)\,.$$

Για τα στοιχεία u_1=(1,1) και u_2=(-2,3) έχουμε:

$$T(u_1) = T(1,1) = (2,2) = 2\,(1,1) = 2u_1$$

και
$$T(u_2) = T(-2,3) = (6,-9) = -3\,(-2,3) = -3u_2\,.$$
Σύμφωνα με τον Ορισμό 9.1.1, οι αριθμοί λ_1=2 και λ_2=-3 είναι ιδιοτιμές του T. Τα διανύσματα u_1=(1,1) και u_2=(-2,3) είναι τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα.

Από τις ισότητες
$$T(u_1) = 2u_1 \quad \text{και} \quad T(u_2) = -3u_2\,,$$
βλέπουμε ότι ο τελεστής T άφησε αμετάβλητες τις κατευθύνσεις των στοιχείων u_1 και u_2 (το $T(u_1)$ είναι συγγραμμικό με το u_1 ενώ το $T(u_2)$ είναι συγγραμμικό με το u_2) και επομένως και τις γραμμικές τους θήκες, δηλαδή
$$T([u_1]) = [u_1] \quad \text{και} \quad T([u_2]) = [u_2]\,.$$

Ο προσδιορισμός των υπόχωρων ενός γραμμικού χώρου V οι οποίοι παραμένουν αμετάβλητοι κατά την εφαρμογή του γραμμικού τελεστή $T \in \mathcal{L}(V)$, αποτελεί αντικείμενο μιας υποπεριοχής της Γραμμικής Άλγεβρας που ονομάζεται **Φασματική Ανάλυση**. Στη γενική περίπτωση, το πρόβλημα που μελετά κανείς είναι η εύρεση των $u \in V$ που ικανοποιούν την (9.2).

Ορισμός 9.1.2
Το σύνολο E_λ των διανυσμάτων $u \in V$ που ικανοποιούν την (1) για μια δοσμένη ιδιοτιμή λ του γραμμικού τελεστή $T \in \mathcal{L}(V)$,
$$E_\lambda = \{u \in V \;:\; T(u) = \lambda u\,\}\,, \tag{9.3}$$
καλείται **ιδιόχωρος** (eigenspace) του T που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.

Σημείωση: Είναι φανερό ότι ο ιδιόχωρος E_λ αποτελείται από τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ και το μηδενικό διάνυσμα.

Πρόταση 9.1.3
Ο ιδιόχωρος E_λ του $T \in \mathcal{L}(V)$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ του T είναι υπόχωρος του V.

Απόδειξη
Αφήνεται ως άσκηση. □

Παραδείγματα

1. Έστω ο ταυτοτικός τελεστής $I \in \mathcal{L}(V)$. Για κάθε $u \in V$ ισχύει
$$I(u) = u = 1\,u\,.$$
Συμπεραίνουμε ότι ο λ=1 είναι ιδιοτιμή του I και ο ιδιόχωρος E_1 ταυτίζεται με το γραμμικό χώρο V. Είναι επίσης φανερό ότι κάθε διάνυσμα $u \in V - \{\mathbf{0}\}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του I που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 1.

2. Έστω ο διαφορικός τελεστής $D \equiv \frac{d}{dx} \in \mathcal{L}(C^\infty)$, όπου C^∞ ο χώρος των απείρως παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Επειδή
$$D(e^{\lambda x}) = \lambda\, e^{\lambda x}\,,$$
συμπεραίνουμε ότι ο αριθμός $\lambda \in K$ είναι ιδιοτιμή του D και η συνάρτηση $e^{\lambda x}$ είναι ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.

3. Έστω ο γραμμικός τελεστής $T \in \mathcal{L}(V)$. Αν v είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του T που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ, τότε και το διάνυσμα av, όπου $a \in K$ και $a \neq 0$, είναι ιδιοδιάνυσμα του T που αντιστοιχεί στην λ. Πραγματικά,
$$T(av) = a\,T(v) = a\,\lambda v = \lambda\,(av)\,.$$

Η σχέση (9.1) είναι ισοδύναμη με την
$$(T - \lambda I)\,(u) = \mathbf{0}\,, \tag{9.4}$$
όπου I ο ταυτοτικός τελεστής $I \in \mathcal{L}(V)$. Κάθε διάνυσμα $u \in V$ που ικανοποιεί την (9.4) ανήκει στον πυρήνα του γραμμικού τελεστή $T - \lambda I$ και επομένως το $u \in V$ είναι ιδιοδιάνυσμα του T που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ αν
$$u \neq \mathbf{0} \quad \text{και} \quad u \in Ker(T - \lambda I)\,.$$
Έτσι, το $\lambda \in K$ είναι ιδιοτιμή του T όταν
$$Ker(T - \lambda I) \neq \{\mathbf{0}\}\,,$$
δηλαδή όταν ο $T - \lambda I$ δεν είναι αμφιμονοσήμαντος τελεστής. Η πρόταση που ακολουθεί μας λέει ότι ισχύει και το αντίστροφο.

Πρόταση 9.1.4
Έστω ο γραμμικός τελεστής $T \in \mathcal{L}(V)$. Ο $\lambda \in K$ είναι ιδιοτιμή του T όταν και μόνο όταν ο $T - \lambda I$ δεν είναι αμφιμονοσήμαντος.

Απόδειξη
Αφήνεται ως άσκηση. □

Ορισμός 9.1.5
Το σύνολο $\sigma(T)$ των ιδιοτιμών του γραμμικού τελεστή $T \in \mathcal{L}(V)$,
$$\sigma(T) = \{\lambda \in K\ :\ Ker(T - \lambda I) \neq \{\mathbf{0}\}\,\}\,, \tag{9.5}$$
ονομάζεται **φάσμα** (spectrum) του T.

Πόρισμα 9.1.6
Ο γραμμικός τελεστής $T \in \mathcal{L}(V)$ είναι αμφιμονοσήματος όταν και μόνο όταν το μηδέν δεν είναι ιδιοτιμή του T.

Ισχύει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 9.1.7
Έστω ο γραμμικός τελεστής $T \in \mathcal{L}(V)$. Αν $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ είναι διαφορετικές ανά δύο ιδιοτιμές του T και για κάθε i το X_i είναι ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i, τότε τα διανύσματα $X_1, X_2, \cdots, X_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Απόδειξη
Χρησιμοποιούμε την αρχή της τέλειας επαγωγής. Για n=1, το θεώρημα ισχύει, αφού ένα ιδιοδιάνυσμα X_1 που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_1, είναι εξ ορισμού μη μηδενικό. Υποθέτουμε τώρα ότι το θεώρημα ισχύει για n=k. Θα δείξουμε ότι τα ιδιοδιανύσματα $X_1, X_2, \cdots, X_{k+1}$ που αντιστοιχούν στις διαφορετικές ανά δύο ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{k+1}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.
Έστω λοιπόν ότι

$$a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_{k+1}X_{k+1} \;=\; \mathbf{0}\,, \quad a_i \in K,\;\; i = 1, 2, \cdots, k+1\,. \qquad (i)$$

Εφαρμόζουμε το γραμμικό τελεστή T στα δύο μέλη της (i) και έχουμε διαδοχικά:

$$T(a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_{k+1}X_{k+1}) \;=\; T(\mathbf{0}) \;=\; \mathbf{0} \quad \Longrightarrow$$

$$a_1\,T(X_1) + a_2\,T(X_2) + \cdots + a_{k+1}\,T(X_{k+1}) \;=\; \mathbf{0}\,.$$

Επειδή

$$T(X_i) \;=\; \lambda_i\,X_i\,,$$

έχουμε

$$a_1\,\lambda_1X_1 + a_2\,\lambda_2X_2 + \cdots + a_{k+1}\,\lambda_{k+1}X_{k+1} \;=\; \mathbf{0}\,. \qquad (ii)$$

Υποθέτοντας ότι $\lambda_{k+1} \neq 0$ και πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη της (i) με λ_{k+1}, έχουμε

$$a_1\,\lambda_{k+1}X_1 + a_2\,\lambda_{k+1}X_2 + \cdots + a_{k+1}\,\lambda_{k+1}X_{k+1} \;=\; \mathbf{0}\,. \qquad (iii)$$

Αφαιρώντας την (iii) από τη (ii) βρίσκουμε ότι

$$a_1\,(\lambda_1 - \lambda_{k+1})\,X_1 + a_2\,(\lambda_2 - \lambda_{k+1})\,X_2 + \cdots + a_k\,(\lambda_k - \lambda_{k+1})\,X_k \;=\; \mathbf{0}\,.$$

Επειδή τα ιδιοδιανύσματα $X_1, X_2, \cdots, X_k$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα,

$$a_i\,(\lambda_i - \lambda_{k+1}) \;=\; 0\,, \quad i = 1, 2, \cdots, k$$

και επειδή

$$\lambda_i \neq \lambda_{k+1}\,, \quad i = 1, 2, \cdots, k \quad \Rightarrow$$

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0\,. \qquad (iv)$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε και στην περίπτωση που είναι λ_{k+1}=0. Πράγματι, από την (ii) έχουμε

$$a_1\,\lambda_1X_1 + a_2\,\lambda_2X_2 + \cdots + a_k\,\lambda_kX_k \;=\; \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad a_i\,\lambda_i \;=\; 0\,, \quad i = 1, 2, \cdots, k\,,$$

αφού τα $X_1, X_2, \cdots, X_k$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Επειδή δε $\lambda_i \neq \lambda_{k+1}$=0, βρίσκουμε πάλι ότι

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0\,.$$

Από τις (i) και (iv) βρίσκουμε ότι

$$a_{k+1}\,X_{k+1} \;=\; \mathbf{0} \quad\Rightarrow\quad a_{k+1} \;=\; 0\,,$$

αφού το X_{k+1} είναι εξ ορισμού μη μηδενικό. Άρα τα X_1, X_2, $\cdots$, X_{k+1} είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Έτσι το θεώρημα αποδείχθηκε. $\square$

Πόρισμα 9.1.8
Αν $T \in \mathcal{L}(V)$, όπου $dimV{=}n \in \mathbf{N}$, και ο T έχει n διαφορετικές μεταξύ τους ιδιοτιμές, τότε υπάρχει μια βάση του V που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του T.

Σημείωση: Όπως θα δούμε στη συνέχεια, δεν είναι απαραίτητο ο $T\in\mathcal{L}(V)$ να έχει n διαφορετικές μεταξύ τους ιδιοτιμές για να έχει ο V μια βάση από ιδιοδιανύσματα του T.

Παράδειγμα
Έστω ο διαφορικός τελεστής $D\in\mathcal{L}(C^\infty)$ και $a_1,a_2,\cdots,a_m\in K$ διακεκριμένοι αριθμοί. Οι συναρτήσεις

$$e^{a_1x},\cdots,e^{a_mx}$$

είναι ιδιοδιανύσματα του D, που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές a_1, a_2, $\cdots$, a_m, και συνεπώς είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

Έστω τώρα ο γραμμικός τελεστής $T\in\mathcal{L}(V)$, όπου ο V είναι πεπερασμένης διάστασης $dimV{=}n\in\mathbf{N}$. Σύμφωνα με τη θεωρία του Κεφαλαίου 7, για μια δοσμένη βάση του V, στον T αντιστοιχεί ένας μονοσήμαντα ορισμένος πίνακας $A \in M_{n\times n}$, έτσι ώστε η

$$T(u) \;=\; v\,,\quad u,v\in V\,,$$

να είναι ισοδύναμη με τη

$$A\,X_u \;=\; Y_v\,,$$

όπου $X_u,Y_v \in K^n$ τα διανύσματα στήλης των u και v ως προς τη δοσμένη βάση του V. Λόγω της αλγεβρικής ισομορφίας των γραμμικών χώρων $\mathcal{L}(V)$ και $M_{n\times n}$, στις επόμενες παραγράφους θα επικεντρώσουμε την προσοχή μας στην εύρεση και τη μελέτη των χαρακτηριστικών μεγεθών ενός τετραγωνικού πίνακα.

Παράδειγμα
Έστω ο γραμμικός τελεστής $T \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$ που ορίζεται από τη σχέση

$$T(x_1,x_2) \;=\; (x_1+2x_2,\; 3x_1+2x_2)\,.$$

Θα βρούμε τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του T.

Αν λ μια ιδιοτιμή του T, τότε εξ ορισμού ισχύει

$$T(x_1,x_2) \;=\; \lambda\,(x_1,\,x_2)\,.$$

Από την πιο πάνω σχέση και τον τύπο του T, βρίσκουμε το ακόλουθο σύστημα:

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 + 2\,x_2 &=& \lambda\,x_1 \\ 3\,x_1 + 2\,x_2 &=& \lambda\,x_2 \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad \left.\begin{array}{rcl} (1-\lambda)\,x_1 + 2\,x_2 &=& 0 \\ 3\,x_1 + (2-\lambda)\,x_2 &=& 0 \end{array}\right\}. \tag{i}$$

Το σύστημα (i) πρέπει να έχει μη τετριμμένη λύση αφού εξ ορισμού τα ιδιοδιανύσματα είναι μη μηδενικά. Άρα

$$det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0 \quad\Rightarrow \tag{ii}$$

$$(1-\lambda)\,(2-\lambda) - 6 = 0 \quad\Rightarrow\quad \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \quad\Rightarrow\quad (\lambda-4)\,(\lambda+1) = 0\,.$$

Ο T έχει λοιπόν δύο ιδιοτιμές, τις $\lambda_1{=}4$ και $\lambda_2{=}{-1}$.

Ας βρούμε τώρα τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα. Για $\lambda_1{=}4$, το σύστημα (i) γίνεται

$$\left.\begin{array}{rcl} -3\,x_1 + 2\,x_2 &=& 0 \\ 3\,x_1 - 2\,x_2 &=& 0 \end{array}\right\}.$$

Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στη λ_1 είναι της μορφής

$$X_1 = a\,(2,\,3)\,, \quad a \in \mathbf{R},\, a \neq 0$$

και ο αντίστοιχος ιδιόχωρος είναι ο

$$E_{\lambda_1} = \{u \in \mathbf{R}^2 \,:\, u = a\,(2,\,3), \;\; a \in \mathbf{R}\,\}\,.$$

Για $\lambda_2{=}{-1}$, το σύστημα (i) γίνεται

$$\left.\begin{array}{rcl} 2\,x_1 + 2\,x_2 &=& 0 \\ 3\,x_1 + 3\,x_2 &=& 0 \end{array}\right\}.$$

Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στη λ_2 είναι της μορφής

$$X_2 = a\,(1,\,-1)\,, \quad a \in \mathbf{R},\, a \neq 0$$

και ο αντίστοιχος ιδιόχωρος είναι ο

$$E_{\lambda_2} = \{u \in \mathbf{R}^2 \,:\, u = a\,(1,\,-1), \;\; a \in \mathbf{R}\,\}\,.$$

Ας βρούμε τώρα τον πίνακα A του T ως προς τη συνήθη βάση του $\mathbf{R}^2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι η (ii) είναι ισοδύναμη με τη

$$det(A - \lambda I) = 0\,. \tag{iii}$$

Η (iii) μας λέει ότι θα μπορούσαμε να εργαστούμε απευθείας με τον πίνακα A προκειμένου να βρούμε τα **ιδιοποσά** (δηλ. τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα) του T. Με αυτό τον τρόπο η εύρεση των χαρακτηριστικών μεγεθών του T απλοποιείται αρκετά.

9.2 Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα πινάκων

Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας. Θα λέμε ότι ο αριθμός $\lambda \in K$ (όπου K=$\mathbf{R}$ ή $\mathbf{C}$) είναι μια **ιδιοτιμή** (eigenvalue) ή **χαρακτηριστική τιμή** του A όταν ισχύει

$$AX = \lambda X\,, \tag{9.6}$$

όπου $X = (x_1, x_2, ..., x_n)^T \in K^n$. Κάθε διάνυσμα $X \neq \mathbf{0}$ για το οποίο ισχύει η (9.6) λέμε ότι είναι ένα **ιδιοδιάνυσμα** (eigenvector) ή **χαρακτηριστικό διάνυσμα** του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.

Για να βρούμε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη, ώστε ο αριθμός λ να είναι ιδιοτιμή του πίνακα A, γράφουμε την (9.6) στη μορφή:

$$(A - \lambda I)\,X = \mathbf{0} \tag{9.7}$$

όπου I είναι ο μοναδιαίος $n \times n$ πίνακας.

Η εξίσωση (9.7) παριστάνει ένα γραμμικό ομογενές σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους, τις συνιστώσες του διανύσματος X, και καλείται **χαρακτηριστικό σύστημα** του A. Ο πίνακας $(A - \lambda I)$ λέγεται **χαρακτηριστικός πίνακας** του A.

Ως γνωστό, το σύστημα (9.7) έχει μη τετριμμένη λύση αν και μόνο αν

$$det(A - \lambda I) \;=\; 0\,. \tag{9.8}$$

Η ορίζουσα $det(A - \lambda I)$ είναι ένα πολυώνυμο του λ βαθμού n και καλείται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του A. Η εξίσωση (9.9) καλείται **χαρακτηριστική εξίσωση** του πίνακα A.

Έχουμε την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 9.2.1
Έστω ο $n \times n$ πίνακας A. Ο αριθμός λ είναι ιδιοτιμή του A όταν ισχύει

$$det(A - \lambda I) \;=\; \begin{vmatrix} a_{11-\lambda} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n_1} & a_{n_2} & \cdots & a_{nn-\lambda} \end{vmatrix} \;=\; 0\,. \tag{9.9}$$

Απόδειξη
Είναι προφανής από τα πιο πάνω. □

Θεώρημα 9.2.2
Ένας $n \times n$ πίνακας A έχει ακριβώς n ιδιοτιμές (λαμβάνοντας υπόψη την πολλαπλότητά τους).

Απόδειξη
Οι ιδιοτιμές του A είναι οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης (9.9). Η $det(A-\lambda I)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n. Σύμφωνα με το *Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας*, η $det(A-\lambda I)$ έχει ακριβώς n ρίζες. Άρα ο πίνακας A έχει ακριβώς n ιδιοτιμές. □

Παρατήρηση
Έστω $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ οι ιδιοτιμές ενός $n \times n$ πίνακα A. Αν υπάρχουν $k \leq n$ ιδιοτιμές ίσες με λ_1 τότε λέμε ότι η ιδιοτιμή λ_1 έχει **αλγεβρική πολλαπλότητα** (algebraic multiplicity) ίση με k, συμβολικά:

$$\pi(\lambda_1) = k \tag{9.10}$$

Έτσι, αν η λ_1 είναι **απλή** ιδιοτιμή έχουμε $\pi(\lambda_1) = 1$, ενώ αν η λ_1 είναι τριπλή ιδιοτιμή, έχουμε $\pi(\lambda_1) = 3$.

Παράδειγμα 1
Έστω ο 2×2 πίνακας $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Η χαρακτηριστική εξίσωση του A είναι η

$$|A - \lambda I| = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(4-\lambda)(1-\lambda) + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda-2)(\lambda-3) = 0\,.$$

Οι ιδιοτιμές του A είναι οι $\lambda_1 = 2$ με $\pi(\lambda_1) = 1$ και $\lambda_2 = 3$ με $\pi(\lambda_2) = 1$. (Οι δύο ιδιοτιμές είναι απλές.)

Παράδειγμα 2
Έστω ο 3×3 πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$. Η χαρακτηριστική εξίσωση του A είναι η

$$|A - \lambda I| = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & -2-\lambda & 3 \\ 2+\lambda & -2-\lambda & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad -(\lambda+2)^2 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda+2)^2(\lambda - 4 - 3 + 3) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(\lambda+2)^2(\lambda-4) = 0\,.$$

Οι ιδιοτιμές του A είναι οι $\lambda_1 = -2$ με $\pi(\lambda_1) = 2$ (διπλή ιδιοτιμή) και $\lambda_2 = 4$ με $\pi(\lambda_2) = 1$ (απλή ιδιοτιμή).

Παράδειγμα 3
Έστω ο άνω τριγωνικός πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση του A είναι η

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (2-\lambda)^2(3-\lambda)(1-\lambda) = 0 \, .$$

Άρα οι ιδιοτιμές του A είναι οι $\lambda_1 = 2$ με $\pi(\lambda_1) = 2$, $\lambda_2 = 3$ με $\pi(\lambda_2) = 1$, και $\lambda_3 = 1$ με $\pi(\lambda_3) = 1$.

Παρατηρούμε ότι οι ιδιοτιμές ενός τριγωνικού πίνακα είναι ίσες με τα διαγώνιά του στοιχεία (βλ. Πρόβλημα 9.2). Είναι επίσης προφανές ότι αν ο $n \times n$ πίνακας A έχει $k \leq n$ διακεχριμένες (δηλ. διαφορετικές) ιδιοτιμές, τότε ισχύει

$$\sum_{i=1}^{k} \pi(\lambda_i) = n \, . \tag{9.11}$$

Ορισμός 9.2.3
Το σύνολο $\sigma(A)$ των ιδιοτιμών του $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$,

$$\sigma(A) \;=\; \{\lambda \in K \;:\; |A - \lambda I| \;=\; 0\} \;, \tag{9.12}$$

καλείται **φάσμα** (spectrum) του A.
Το μέγιστο μέτρο των ιδιοτιμών του $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ καλείται **φασματική ακτίνα** (spectral radius) του A και συμβολίζεται με $r_\sigma(A)$:

$$r_\sigma(A) \;=\; \max_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda| \, . \tag{9.13}$$

Παρατήρηση
Όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 8, για τη 2-νόρμα τετραγωνικού πίνακα A ισχύει[1]

$$||A||_2 \;=\; \sqrt{r_\sigma(A^*A)} \, . \tag{9.14}$$

Παράδειγμα
Έστω ο πίνακας

$$A \;=\; \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} .$$

[1] Για την απόδειξη της (9.14) απαιτείται η θεωρία του επόμενου κεφαλαίου.

Για να βρούμε την $||A||_2$, πρέπει να βρούμε τη φασματική ακτίνα του πίνακα

$$B = A^*A = A^TA = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση του B είναι η

$$|B - \lambda I| = 0 \implies \begin{vmatrix} 20-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \implies \lambda^2 - 22\lambda + 36 = 0 \implies$$

$$\lambda_{1,2} = 11 \pm \sqrt{85}\,.$$

Συνεπώς

$$r_\sigma(B) = 11 + \sqrt{85}$$

και έτσι

$$||A||_2 = \sqrt{r_\sigma(A^*A)} = \sqrt{11 + \sqrt{85}}\,.$$

Θεώρημα 9.2.4
Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας. Οι πίνακες A και A^T έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

Απόδειξη
Έχουμε

$$det(A - \lambda I) = det(A - \lambda I)^T = det(A^T - \lambda I^T) = det(A^T - \lambda I)\,.$$

Οι πίνακες A και A^T έχουν την ίδια χαρακτηριστική εξίσωση, άρα έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές. □

Θεώρημα 9.2.5
Ο $n \times n$ πίνακας A είναι μη αντιστρέψιμος αν και μόνο αν η $\lambda = 0$ είναι μια ιδιοτιμή του.

Απόδειξη
Ο A είναι μη αντιστρέψιμος αν και μόνο αν

$$det(A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad det(A - 0I) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

η $\lambda = 0$ είναι ιδιοτιμή του A. □

Θεώρημα 9.2.6
Αν $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές του $n \times n$ πίνακα A, τότε

$$detA = \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n \tag{9.15}$$

και

$$tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n\,. \tag{9.16}$$

Απόδειξη
Θεωρούμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A:

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n_1} & a_{n_2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$det(A - \lambda I) = (-\lambda)^n + (a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})(-\lambda)^{n-1} + \ldots \qquad (i)$$

Αν $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές του A έχουμε επίσης:

$$det(A - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)...(\lambda_n - \lambda) \quad \Rightarrow$$

$$det(A - \lambda I) = (-\lambda)^n + (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)(-\lambda)^{n-1} + \cdots + \lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_n \, . \qquad (ii)$$

(α) Για $\lambda = 0$, παίρνουμε από την (ii):

$$det A = \lambda_1\lambda_2...\lambda_n \, .$$

(β) Από τις (i) και (ii) παίρνουμε,

$$a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn} = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \quad \Rightarrow \quad tr A = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$

□

Για την εύρεση των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν σε μια ιδιοτιμή λ του $n \times n$ πίνακα A επιλύουμε το χαρακτηριστικό σύστημα του A:

$$(A - \lambda I)\, X = \mathbf{0} \, .$$

Η επίλυση του συστήματος μπορεί να γίνει με τη μέθοδο της αναγωγής του $(A - \lambda I)$ σε ανηγμένο κλιμακωτό. Πριν προχωρήσουμε σε παραδείγματα δίνουμε την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 9.2.7
Αν τα $X_1, X_2, \ldots, X_k$ είναι ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε μια ιδιοτιμή λ του $n \times n$ πίνακα A , τότε κάθε γραμμικός συνδυασμός τους,

$$c_1X_1 + c_2X_2 + ... + c_kX_k \, , \qquad (9.17)$$

όπου οι αριθμοί $c_i, i = 1, 2, \cdots, k$ δεν είναι όλοι ίσοι με μηδέν, είναι επίσης ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.

Απόδειξη
Αφού τα $X_1, X_2, \ldots, X_k$ είναι ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ, έχουμε:

$$(A - \lambda I)\, X_i = \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, \ldots, k \quad \Longrightarrow$$

$$(A - \lambda I)\, c_iX_i = \mathbf{0}, \quad c_i \in K, \quad i = 1, 2, \ldots, k \quad \Longrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{k}(A-\lambda I)\, c_i X_i = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad (A-\lambda I)\sum_{i=1}^{k} c_i X_i = \mathbf{0}\,.$$

Άρα το διάνυσμα (9.17) είναι λύση του χαρακτηριστικού συστήματος του A, είναι δηλ. ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ. (Σημείωση: Είναι φανερό ότι το διάνυσμα (9.17) είναι μη μηδενικό αφού τα τα X_i δεν είναι μηδενικά και τα c_i δεν είναι όλα μηδέν.). □

Πόρισμα 1
Αν X είναι ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ του $n\times n$ πίνακα A, τότε το aX, όπου $a \in K$, $a \neq 0$, είναι επίσης ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην λ.

Παράδειγμα 1
Έστω ο άνω τριγωνικός πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση του A είναι η

$$(1-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) = 0\,.$$

Έχουμε έτσι 3 απλές ιδιοτιμές:

$$\lambda_1 = 1, \ \ \lambda_2 = 2 \quad \text{και} \quad \lambda_3 = 3\,.$$

Θα βρούμε τώρα τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε κάθε ιδιοτιμή επιλύοντας σε κάθε περίπτωση το αντίστοιχο χαρακτηριστικό σύστημα,

$$(A-\lambda_i I)\, X = \mathbf{0}\,.$$

$\underline{\lambda_1 = 1}$

$$(A-1I)X = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{rcrcl} 2x_2 & & & = & 0 \\ 2x_2 & + & 5x_3 & = & 0 \\ & & x_3 & = & 0 \end{array}\right\}$$

Άρα $x_2 = x_3 = 0$. Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στη λ_1 είναι της μορφής

$$X_1 = (a,0,0) = a(1,0,0), \qquad a \in \mathbf{R}, a \neq 0\,.$$

$\underline{\lambda_2 = 2}$

$$(A-2I)X = \mathbf{0} \ \Rightarrow \ \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ \Rightarrow \ \left.\begin{array}{rrcrl} -x_1 + & 2x_2 & & & = 0 \\ & x_2 & + & 5x_3 & = 0 \\ & & & 0 & = 0 \end{array}\right\}$$

Άρα $x_1 = 2x_2$ και $x_3 = -\frac{1}{5}x_2$. Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στη $\lambda_2 = 2$ είναι της μορφής:

$$X_2 = (2a', a', -\frac{1}{5}a') = a(10, 5, -1), \quad a \in \mathbf{R}, a \neq 0 .$$

<u>$\lambda_3 = 3$</u>

$$(A-3I)X = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{rr} -2x_1 + 2x_2 & = 0 \\ 5x_3 & = 0 \\ -x_3 & = 0 \end{array}\right\}$$

Άρα $x_1 = x_2$ και $x_3 = 0$. Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στη $\lambda_3 = 3$ είναι της μορφής

$$X_3 = (a, a, 0) = a(1, 1, 0), \quad a \in \mathbf{R}, a \neq 0 .$$

Παράδειγμα 2

Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

(α) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του.
(β) Να βρεθούν και να κανονικοποιηθούν τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα.

(α) Η χαρακτηριστική εξίσωση του A είναι η

$$|A - \lambda I| = 0 \quad\Rightarrow\quad \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad\Rightarrow$$

$$-(\lambda+2)\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad\Rightarrow$$

$$-(\lambda+2)\,[(\lambda+2)^2 - 1] + \lambda + 2 = 0 \quad\Rightarrow\quad -(\lambda+2)[(\lambda+2)^2 - 2] = 0 \quad\Rightarrow$$

$$(\lambda+2)\,(\lambda+2+\sqrt{2})\,(\lambda+2-\sqrt{2}) = 0 .$$

Ο πίνακας A έχει τρεις απλές ιδιοτιμές:

$$\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = -2-\sqrt{2} \text{ και } \lambda_3 = -2+\sqrt{2}$$

(β) Για την $\lambda_1 = -2$ έχουμε

$$(A+2I)X=\mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{rl} x_2 & = 0 \\ x_1 + x_3 & = 0 \end{array} \right\} .$$

Συνεπώς, $x_3 = -x_1$ και $x_2 = 0$. Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην $\lambda_1 = -2$ είναι της μορφής

$$X_1 = (a, 0, -a) = a(1, 0, -1), \quad a \in \mathbf{R}, a \neq 0 .$$

Για την $\lambda_2 = -2 - \sqrt{2}$ έχουμε:

$$[A + (2+\sqrt{2})I]\, X = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{rcrcrl} \sqrt{2}x_1 & + & x_2 & & & = 0 \\ x_1 & + & \sqrt{2}x_2 & + & x_3 & = 0 \\ & & x_2 & + & \sqrt{2}x_3 & = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{rl} x_1 & = -x_2/\sqrt{2} \\ x_1 + x_3 & = -\sqrt{2}\, x_2 \\ x_3 & = -x_2/\sqrt{2} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$x_1 = x_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\, x_2 .$$

Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην $\lambda_2 = -2 - \sqrt{2}$ είναι της μορφής:

$$X_2 = a' \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \; = \; a\,(1, -\sqrt{2}, 1), \quad a \in \mathbf{R},\; a \neq 0 .$$

Για την $\lambda_3 = -2 + \sqrt{2}$ έχουμε:

$$[A + (2-\sqrt{2})I]\, X = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{rcrcrcl} -\sqrt{2}x_1 & + & x_2 & & & = & 0 \\ x_1 & - & \sqrt{2}x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & - & \sqrt{2}x_3 & = & 0 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}\, x_2 .$$

Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην $\lambda_3 = -2 + \sqrt{2}$ είναι της μορφής:

$$X_3 = a' \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \; = \; a\,(1, \sqrt{2}, 1), \quad a \in \mathbf{R},\; a \neq 0 .$$

Τα κανονικοποιημένα ιδιοδιανύσματα είναι τα

$$X_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ X_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \text{και} \quad X_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Η πρόταση που ακολουθεί είναι παρόμοια με το Θ. 9.1.7 για γραμμικούς τελεστές.

Πρόταση 9.2.8
Έστω ότι ο $n \times n$ πίνακας A έχει απλές (διακεκριμένες) ιδιοτιμές. Αν $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στις n ιδιοτιμές, τότε τα $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Απόδειξη
Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ οι διακεκριμένες ιδιοτιμές του A:

$$\lambda_i \neq \lambda_j, \quad i \neq j\,, \quad i, j = 1, \ldots, n\,. \tag{i}$$

Για τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα ισχύουν εξ ορισμού οι σχέσεις:

$$A\,X_i = \lambda_i X_i\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{ii}$$

Υπενθυμίζουμε στο σημείο αυτό ότι εξ ορισμού για κάθε ιδιοδιάνυσμα ισχύει

$$X_i \neq \mathbf{0}\,. \tag{iii}$$

Θα αποδείξουμε το θεώρημα με τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο. Υποθέτουμε λοιπόν ότι μόνο τα m πρώτα ιδιοδιανύσματα ($1 \leq m < n$) είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, οπότε τα ιδιοδιανύσματα $X_1, X_2, \ldots, X_{m+1}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Άρα υπάρχουν σταθερές $c_1, c_2, \ldots, c_{m+1}$, που δεν είναι όλες μηδέν, τέτοιες ώστε να ισχύει

$$c_1 X_1 + c_2 X_2 + \ldots + c_m X_m + c_{m+1} X_{m+1} = \mathbf{0}\,. \tag{iv}$$

Επιπλέον για την τελευταία σταθερά έχουμε

$$c_{m+1} \neq 0\,. \tag{v}$$

Πράγματι, αν $c_{m+1} = 0$, τότε η (iv) μας δίνει

$$c_1 X_1 + c_2 X_2 + \ldots + c_m X_m = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad c_1 = c_2 = \ldots = c_m = 0\,,$$

λόγω του ότι τα $X_1, X_2, \ldots, X_m$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Αυτό είναι άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι οι $c_1, c_2, ..., c_{m+1}$ δεν είναι όλες μηδέν.
Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά την (iv) με A έχουμε:

$$c_1 A X_1 + c_2 A X_2 + \ldots + c_m A X_m + c_{m+1} A X_{m+1} = \mathbf{0}\,.$$

Αντικαθιστώντας τις (ii) παίρνουμε

$$c_1 \lambda_1 X_1 + c_2 \lambda_2 X_2 + \ldots + c_m \lambda_m X_m + c_{m+1} \lambda_{m+1} X_{m+1} = \mathbf{0}\,. \tag{vi}$$

Υποθέτουμε τώρα ότι $\lambda_{m+1} \neq 0$. Πολλαπλασιάζοντας την (iv) με λ_{m+1} παίρνουμε:

$$c_1\lambda_{m+1}X_1 + c_2\lambda_{m+1}X_2 + \ldots + c_m\lambda_{m+1}X_m + c_{m+1}\lambda_{m+1}X_{m+1} = \mathbf{0}\,. \qquad (vii)$$

Αφαιρώντας την (vi) από την (vii), βρίσκουμε ότι:

$$c_1\,(\lambda_{m+1} - \lambda_1)X_1 + c_2\,(\lambda_{m+1} - \lambda_2)X_2 + \ldots + c_m\,(\lambda_{m+1} - \lambda_m)X_m = \mathbf{0}\,.$$

Εφόσον τα $X_1, X_2, \ldots, X_m$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα,

$$c_1(\lambda_{m+1} - \lambda_1) = c_2(\lambda_{m+1} - \lambda_2) = \ldots = c_m(\lambda_{m+1} - \lambda_m) = 0\,.$$

Επειδή οι ιδιοτιμές του A είναι διακεκριμένες,

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_m = 0\,.$$

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε και στην περίπτωση που λ_{m+1}=0. Πράγματι, αν λ_{m+1}=0, τότε από την (vi) έχουμε

$$c_1\lambda_1X_1 + c_2\lambda_2X_2 + \ldots + c_m\lambda_mX_m = \mathbf{0}\,.$$

Εφόσον τα $x_1, x_2, \cdots, x_m$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα,

$$c_1\lambda_1 = c_2\lambda_2 = \cdots = c_m\lambda_m = 0\,.$$

Επειδή οι ιδιοτιμές του A είναι διακεκριμένες,

$$\lambda_i \neq 0 \quad \text{για} \quad i \neq m+1 \quad \Longrightarrow \quad c_1 = c_2 = \ldots = c_m = 0\,.$$

Επομένως, από την (ii) έχουμε

$$c_{m+1}X_{m+1} = \mathbf{0}$$

και επειδή $c_{m+1} \neq 0$ έχουμε αναγκαστικά $X_{m+1} = \mathbf{0}$. Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί το X_{m+1} είναι ιδιοδιάνυσμα. Άρα τα ιδιοδιανύσματα του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. □

Πόρισμα 1

Αν ο πραγματικός $n \times n$ πίνακας A έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, τότε το σύνολο $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$, όπου X_i ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i, είναι μια βάση του $\mathbf{R}^n$.

Παράδειγμα

Είδαμε σε προηγούμενο παράδειγμα ότι ο 3×3 πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

έχει απλές ιδιοτιμές: λ_1=-2, λ_2=-2 $-\sqrt{2}$ και λ_3=-2+ $\sqrt{2}$ με ιδιοδιανύσματα τα $X_1 = (1, 0, -1)$, $X_2 = (1, -\sqrt{2}, 1)$ και $X_3 = (1, \sqrt{2}, 1)$, αντίστοιχα. Σύμφωνα με την Πρόταση 9.2.8, τα X_1, X_2, X_3 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Ο αναγνώστης μπορεί εύκολα να επαληθεύσει αυτό το συμπέρασμα. Είναι επίσης φανερό ότι το σύνολο $\{X_2, X_2, X_3\}$ αποτελεί μια βάση του $\mathbf{R}^3$.

Όπως θα δούμε στην επόμενη παράγραφο, αν μια ιδιοτιμή λ_i του $n \times n$ πίνακα A δεν είναι απλή, δηλ. $\pi(\lambda_i) = m > 1$, τότε σε αυτή μπορεί να αντιστοιχούν λιγότερα από m γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. Άρα, αν οι ιδιοτιμές του A δεν είναι απλές, ο A μπορεί να έχει λιγότερα από n γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. Η περίπτωση αυτή θα διερευνηθεί στην επόμενη παράγραφο.

Αν ο $n \times n$ πίνακας A έχει $k \leq n$ απλές ιδιοτιμές, μπορούμε να δείξουμε ότι τα ιδιοδιανύσματα $X_1, X_2, ..., X_k$, που αντιστοιχούν στις διακεχριμένες ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Συνεπώς, η πρόταση 9.2.8 μπορεί να επεκταθεί ως ακολούθως:

Πρόταση 9.2.9
Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας και $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$, με $k \leq n$, κάποιες (όχι απαραίτητα όλες) από τις απλές ιδιοτιμές του. Αν $X_1, X_2, ..., X_k$ είναι ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στις $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$, τότε τα $X_1, X_2, ..., X_k$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Απόδειξη
Παρόμοια με την απόδειξη της Πρότασης 9.2.8. □

9.3 Ιδιόχωροι

Είδαμε σε προηγούμενο παράδειγμα ότι μια ιδιοτιμή του 3×3 πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

είναι η $\lambda_1 = 1$ με αλγεβρική πολλαπλότητα $\pi(\lambda_1) = 1$. Στην ιδιοτιμή αυτή αντιστοιχούν ιδιοδιανύσματα της μορφής

$$X_1 = a\,(1, 0, 0), \qquad a \neq 0 \,.$$

Τα ιδιοδιανύσματα αυτά ικανοποιούν την χαρακτηριστική εξίσωση

$$(A - \lambda_1 I)\, X_1 \;=\; \mathbf{0} \tag{9.18}$$

και μαζί με την τετριμμένη λύση $X = \mathbf{0}$ αποτελούν ένα διανυσματικό χώρο (πιο συγκεκριμένα, ένα υπόχωρο του $\mathbf{R}^3$). Είναι φανερό από τη θεωρία του κεφαλαίου 7 ότι τα ιδιοδιανύσματα X_1 μαζί με το μηδενικό στοιχείο $\mathbf{0}$ αποτελούν τον πυρήνα $N(A - \lambda_1 I)$ του χαρακτηριστικού πίνακα $(A - \lambda_1 I)$. Έχουμε έτσι τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 9.3.1
Έστω ο $n \times n$ πίνακας A και λ_0 μια ιδιοτιμή του. Ο πυρήνας $N(A - \lambda_0 I)$ του χαρακτηριστικού πίνακα $(A - \lambda_0 I)$ καλείται **ιδιόχωρος** (eigenspace) της ιδιοτιμής λ_0 και συμβολίζεται με E_{λ_0}:

$$E_{\lambda_0} = N(A - \lambda_0 I) = \{X \in \mathbf{R}^n : (A - \lambda_0 I)X = \mathbf{0}\} \,. \tag{9.19}$$

Η διάσταση του ιδιοχώρου E_{λ_0} ονομάζεται **γεωμετρική πολλαπλότητα** (geometric multiplicity) της λ_0 και θα τη συμβολίζουμε με $\gamma(\lambda_0)$:

$$\gamma(\lambda_0) = dim E_{\lambda_0} = dim N(A - \lambda_0 I) \,. \tag{9.20}$$

Παρατηρήσεις

1. Ο ιδιόχωρος E_{λ_0} είναι προφανώς ο υπόχωρος του $\mathbf{R}^n$ που παράγεται από τα ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_0.

2. Από το θεώρημα βαθμού και μηδενικότητας έχουμε για τη γεωμετική πολλαπλότητα της λ_0:
$$\gamma(\lambda_0) = dim E_{\lambda_0} = n - rank(A - \lambda_0 I) \,. \tag{9.21}$$

3. Εξ ορισμού, κάθε ιδιοδιάνυσμα X είναι μη μηδενικό, και έτσι $E_{\lambda_0} \neq \{\mathbf{0}\}$. Συνεπώς
$$\gamma(\lambda_0) = dim E_{\lambda_0} \geq 1 \,. \tag{9.22}$$

Θεώρημα 9.3.2
Έστω λ_0 μια ιδιοτιμή του πίνακα $A \in M_{n\times n}(K)$ και E_{λ_0} ο αντίστοιχος ιδιόχωρος. Ισχύει τότε

$$\gamma(\lambda_0) \leq \pi(\lambda_0)\,, \tag{9.23}$$

όπου $\gamma(\lambda_0)$ και $\pi(\lambda_0)$ η γεωμετρική και η αλγεβρική πολλαπλότητα της λ_0, αντίστοιχα.

Απόδειξη
Στην απόδειξη αυτή κάνουμε χρήση της θεωρίας της επόμενης παραγράφου. Έστω ότι $dimE_{\lambda_0}=k$, όπου $1\leq k \leq n$, και έστω $T \in \mathcal{L}(K^n)$ ο τελεστής που ορίζεται από τον πίνακα A (ως προς τη συνήθη βάση του K^n). Τότε το λ_0 είναι ιδιοτιμή του T και ο ιδιόχωρος του T που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή αυτή ταυτίζεται με τον E_{λ_0}.
Έστω $B' = \{u_1, u_2, \cdots, u_k\}$ μια βάση του E_{λ_0}, όπου τα $u_1, u_2, \cdots, u_k$ είναι προφανώς ιδιοδιανύσματα του T που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_0. Επεκτείνουμε τη βάση B' σε μια βάση

$$B = \{u_1,\, u_2,\, \cdots,\, u_k,\, u_{k+1},\, \cdots,\, u_n\}$$

του K^n. Ο πίνακας A_T του τελεστή T ως προς τη βάση B του K^n θα έχει τη μορφή:

$$A_T = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 & \beta_{11} & \cdots & \beta_{1,n-k} \\ 0 & \lambda_0 & \cdots & 0 & \beta_{21} & \cdots & \beta_{2,n-k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_0 & \beta_{k1} & \cdots & \beta_{k,n-k} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta_{k+1,1} & \cdots & \beta_{k+1,n-k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta_{n1} & \cdots & \beta_{n,n-k} \end{bmatrix}.$$

Οι πίνακες A και A_T ως όμοιοι (βλέπε Θ. 7.7.6), έχουν ίδιες ιδιοτιμές και μάλιστα η χαρακτηριστική εξίσωση του A_T είναι η

$$\begin{vmatrix} \lambda_0-\lambda & 0 & \cdots & 0 & \beta_{11} & \cdots & \beta_{1,n-k} \\ 0 & \lambda_0-\lambda & \cdots & 0 & \beta_{21} & \cdots & \beta_{2,n-k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_0-\lambda & \beta_{k1} & \cdots & \beta_{k,n-k} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta_{k+1,1}-\lambda & \cdots & \beta_{k+1,n-k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta_{n1} & \cdots & \beta_{n,n-k}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ή

$$(\lambda_0 \,-\, \lambda)^k\, q(\lambda) \,=\, 0\,,$$

όπου $q(\lambda)$ ένα πολυώνυμο του λ βαθμού $degq=n-k$. Από τη μορφή της χαρακτηριστικής εξίσωσης του A_T συμπεραίνουμε ότι η ιδιοτιμή λ_0 έχει πολλαπλότητα τουλάχιστον k, δηλαδή

$$\gamma(\lambda_0) = dimE_{\lambda_0} \leq \pi(\lambda_0)\,.$$

□

Συνδυάζοντας τις (9.22) και (9.23) παίρνουμε

$$1 \le \gamma(\lambda_0) \le \pi(\lambda_0)\,. \tag{9.24}$$

Η πιο πάνω σχέση μας λέει ότι ο μέγιστος αριθμός γραμμικώς ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_0 είναι $\pi(\lambda_0)$ και ο ελάχιστος 1. Παρατηρούμε επίσης ότι αν η $\pi(\lambda_0) = 1$, αν δηλ. η ιδιοτιμή λ_0 είναι απλή, τότε

$$\gamma(\lambda_0) = dim E_{\lambda_0} = 1\,.$$

Με διαφορετικά λόγια, σε κάθε απλή ιδιοτιμή έχουμε μόνο ένα γραμμικώς ανεξάρτητο ιδιοδιάνυσμα. Αυτό το διαπιστώσαμε σε όλα τα σχετικά παραδείγματα του εδαφίου 9.2.

Στη συνέχεια θα δώσουμε παραδείγματα με πίνακες των οποίων οι ιδιοτιμές δεν είναι όλες απλές. Για να βρούμε πόσα γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα αντιστοιχούν σε μια ιδιοτιμή λ_i με $\pi(\lambda_i) > 1$, χρησιμοποιούμε το θεώρημα βαθμού και μηδενικότητας [εξίσωση (9.21)].

Παράδειγμα 1

Έστω ο 2×2 πίνακας $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

(α) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του A.
(β) Να οριστούν οι αντίστοιχοι ιδιόχωροι και να βρεθούν οι διαστάσεις τους (δηλ. οι γεωμετρικές πολλαπλότητες των ιδιοτιμών).

(α) Η χαρακτηριστική εξίσωση του πίνακα A είναι η

$$|A - \lambda I| = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad -(4-\lambda)\lambda + 4 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda - 2)^2 = 0\,.$$

Έχουμε μια διπλή ιδιοτιμή, $\lambda = 2$ με $\pi(\lambda) = 2$.

Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην $\lambda = 2$ είναι οι λύσεις του χαρακτηριστικού συστήματος:

$$(A - \lambda I)X = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2\,.$$

Άρα τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην $\lambda = 2$ είναι της μορφής

$$X = a(1,1), \quad a \in \mathbf{R}, a \neq 0\,.$$

(β) Ο ιδιόχωρος της ιδιοτιμής $\lambda = 2$ είναι ο

$$E_\lambda = \{X \in \mathbf{R}^2 : X = a(1,1),\ a \in \mathbf{R}\}\,.$$

Ο E_λ παράγεται από μόνο ένα (γραμμικώς ανεξάρτητο) ιδιοδιάνυσμα, το (1,1), οπότε

$$\gamma(\lambda) = dim E_\lambda = 1\,.$$

Μπορούμε να καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας τη σχέση (9.21). Βρίσκουμε πρώτα το βαθμό του χαρακτηριστικού πίνακα:

$$(A-\lambda I)=\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Ο ανηγμένος κλιμακωτός του $(A-\lambda I)$ έχει μόνο μία μη μηδενική γραμμή. Άρα $rank(A-\lambda I)=1$ και από την (9.21) βρίσκουμε ότι

$$\gamma(\lambda)=dim E_\lambda = 2-rank(A-\lambda I)=1 .$$

Παράδειγμα 2

Έστω ο 3×3 πίνακας $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.
(α) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του A.
(β) Να βρεθούν οι γεωμετρικές πολλαπλότητες των ιδιοτιμών του A.
(γ) Να βρεθούν τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές του A και να οριστούν οι σχετικοί ιδιόχωροι.

(α) Η χαρακτηριστική εξίσωση του A είναι η

$$|A-\lambda I|=0 \quad\Rightarrow\quad 0=\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ 1 & -2+\lambda & 3-\lambda \end{vmatrix} \quad\Rightarrow$$

$$0=(\lambda-2)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} \quad\Rightarrow$$

$$(\lambda-2)\,1\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 3 & 5-\lambda \end{vmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad (\lambda-2)\left[(3-\lambda)(5-\lambda)-3\right]=0 \quad\Rightarrow$$

$$(\lambda-2)\,(\lambda^2-8\lambda+12)=0 \quad\Rightarrow\quad (\lambda-2)^2\,(\lambda-6)=0 .$$

Οι ιδιοτιμές του A είναι οι $\lambda_1=2$ με $\pi(\lambda_1)=2$ και $\lambda_2=6$ με $\pi(\lambda_2)=1$.

(β) Για να βρούμε την $\gamma(\lambda_1)$, χρησιμοποιούμε το θεώρημα βαθμού και μηδενικότητας:

$$\gamma(\lambda_1)=3-rank(A-\lambda_1 I)=3-rank(A-2I) .$$

Κλιμακοποιούμε τον πίνακα $(A-2I)$:

$$(A-2I)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Βλέπουμε ότι ο κλιμακωτός έχει μόνο μια μη μηδενική γραμμή. Άρα $rank(A-2I)$=1 και $\gamma(\lambda_1)$=3-1=2.

Επειδή η ιδιοτιμή λ_2 είναι απλή, $\gamma(\lambda_2)$=1.

(γ)
$\underline{\lambda_1=2}$

Έχουμε το χαρακτηριστικό σύστημα

$$(A-\lambda_1 I)X=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x_1+x_2+x_3=0\,.$$

Έχουμε άπειρο πλήθος λύσεων με 2 ελεύθερες μεταβλητές. Έστω $x_1=a$ και $x_3=b$ οπότε $x_2=-(a+b)$. Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην $\lambda_1=2$ είναι της μορφής

$$X_1=(a,-(a+b),b)=a\,(1,-1,0)+b\,(0,-1,1), \quad a,b\in\mathbf{R}, a^2+b^2\neq 0\,.$$

Παρατηρούμε ότι στην $\lambda_1=2$ αντιστοιχούν 2 γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, τα

$$X_1^a=(1,-1,0) \quad \text{και} \quad X_1^\beta=(0,-1,1)\,.$$

Αυτό βέβαια αναμενόταν αφού στο (β) βρήκαμε ότι $\gamma(\lambda_1)$=2. Ο αντίστοιχος ιδιόχωρος είναι ο

$$E_{\lambda_1}=\{x\in\mathbf{R}^3 : X=a\,(1,-1,0)+b\,(0,-1,1), \quad a,b\in\mathbf{R}\}\,.$$

$\underline{\lambda_2=6}$

Έχουμε το χαρακτηριστικό σύστημα:

$$(A-\lambda_2 I)\,X=\mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Κλιμακοποιούμε τον χαρακτηριστικό πίνακα:

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & 4 & -8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1-x_2 & = & 0 \\ x_2-2x_3 & = & 0 \end{array}\right\}.$$

Θέτοντας $x_3=a$, παίρνουμε τη γενική μορφή των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στη λ_2:

$$X_2=(a,2a,a)=a\,(1,2,1), \quad a\in\mathbf{R}, a\neq 0\,.$$

Συνεπώς,

$$E_{\lambda_2}=\{X\in\mathbf{R}^3 : X=a\,(1,2,1), \quad a\in\mathbf{R}\}\,.$$

9.4 Διαγωνοποίηση πινάκων

Ορισμός 9.4.1
Οι $n \times n$ πίνακες A και B είναι **όμοιοι** (similar) αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας S τέτοιος ώστε να ισχύει

$$B = S^{-1} A\, S\,. \tag{9.25}$$

Είναι φανερό ότι η (9.25) είναι ισοδύναμη με την

$$A = S\, B S^{-1}\,. \tag{9.26}$$

Για όμοιους πίνακες ισχύει η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 9.4.2
Όμοιοι πίνακες έχουν ίδιες χαρακτηριστικές εξισώσεις και επομένως ίδιες ιδιοτιμές.

Απόδειξη
Έστω A και B δύο όμοιοι πίνακες. Άρα υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας S, τέτοιος ώστε να ισχύει:

$$B = S^{-1} AS \quad \Rightarrow \quad B - \lambda I = S^{-1} AS - \lambda I \quad \Rightarrow$$

$$|B - \lambda I| \;=\; |S^{-1} AS - \lambda I| \;=\; |S^{-1} AS - S^{-1} \lambda I S| \quad \Rightarrow$$
$$|B - \lambda I| \;=\; |S^{-1}(A - \lambda I) S| \;=\; |S^{-1}|\; |A - \lambda I|\; |S|\,.$$

Επειδή $|S^{-1}|\; |S| = |S^{-1} S| = |I| = 1$, παίρνουμε

$$|B - \lambda I| = |A - \lambda I|\,.$$

Έτσι οι πίνακες A και B έχουν τις ίδιες χαρακτηριστικές εξισώσεις και άρα ίδιες ιδιοτιμές. □

Παρατήρηση
Έστω A και B δύο όμοιοι πίνακες και λ μια ιδιοτιμή τους. Έστω X ένα ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ, οπότε ισχύει:

$$AX = \lambda X \quad \Longrightarrow \quad S^{-1} AX = \lambda\, S^{-1} X \quad \Longrightarrow$$

$$S^{-1} ASS^{-1} X = \lambda\, S^{-1} X \quad \Longrightarrow \quad BS^{-1} X = \lambda\, S^{-1} X \quad \Longrightarrow$$
$$B\, Y = \lambda\, Y \quad \text{οπου} \quad Y = S^{-1} X\,. \tag{9.27}$$

Βρήκαμε έτσι ότι τα ιδιοδιανύσματα του B που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ δίνονται από την (9.27).

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση όπου ένας $n\times n$ πίνακας A είναι όμοιος με ένα διαγώνιο πίνακα D. Σύμφωνα με την Πρόταση 9.4.2, οι A και D έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές. Τα διαγώνια στοιχεία του D είναι οι κοινές ιδιοτιμές των δύο πινάκων:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} . \tag{9.28}$$

Όπως θα δούμε σε λίγο ο πίνακας S στη σχέση $S^{-1}AS = D$ έχει ως στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$.

Ορισμός 9.4.3
Ο $n \times n$ πίνακας A είναι **διαγωνοποιήσιμος** (diagonalizable) αν είναι όμοιος με ένα διαγώνιο $n \times n$ πίνακα D, αν δηλαδή υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας S, τέτοιος ώστε

$$S^{-1}AS = D \iff A = SDS^{-1} . \tag{9.29}$$

Το θεώρημα που ακολουθεί είναι πολύ σημαντικό.

Θεώρημα 9.4.4
Έστω ο $n \times n$ πίνακας A με στοιχεία από το σώμα K. Ο A είναι διαγωνοποιήσιμος όταν και μόνον όταν ο A έχει n γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. Στην περίπτωση αυτή, αν D είναι ο διαγώνιος πίνακας με στοιχεία στην κύρια διαγώνιο τις ιδιοτιμές του A, τότε ο πίνακας S στην σχέση (9.29) έχει ως στήλες τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του A.

Απόδειξη
Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ οι όχι κατ᾽ ανάγκη διαφορετικές μεταξύ τους ιδιοτιμές του A. Υποθέτουμε πρώτα ότι ο A έχει n γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, τα

$$X_1, X_2, \cdots, X_n .$$

Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε ιδιοτιμή λ_i μπορούμε να αντιστοιχίσουμε το ιδιοδιάνυσμα X_i, έτσι ώστε

$$AX_i = \lambda_i X_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n . \tag{i}$$

(Για παράδειγμα, αν $\pi(\lambda_1)$=2 και λ_1=λ_5, τότε στην λ_1 αντιστοιχούν ακριβώς δύο γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, αφού στην αντίθετη περίπτωση, ο A θα είχε λιγότερα από n γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. Αυτά τα συμβολίζουμε με X_1 και X_5, οπότε πράγματι $AX_1 = \lambda_1 X_1$ και $AX_5 = \lambda_5 X_5$).
Ορίζουμε τώρα τους πίνακες S και D:

$$S = [X_1 \ X_2 \ \cdots \ X_n] \quad \text{και} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} .$$

Για τα γινόμενα AS και SD έχουμε

$$AS = [AX_1 \ AX_2 \ \cdots \ AX_n] \tag{ii}$$

και

$$SD = [X_1 \ X_2 \ \cdots \ X_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = [\lambda_1 X_1 \ \lambda_2 X_2 \ \cdots \ \lambda_n X_n] \tag{iii}$$

Λόγω της (i), έχουμε:

$$AS = [AX_1 \ AX_2 \ \cdots \ AX_n] = [\lambda_1 X_1 \ \lambda_2 X_2 \ \cdots \ \lambda_n X_n] \quad \Rightarrow \quad AS = SD\,. \tag{iv}$$

Αφού τα $X_1, X_2, \cdots, X_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, $rank(S)=n$ και άρα ο S είναι αντιστρέψιμος. Από την (iv) παίρνουμε

$$S^{-1}AS = S^{-1}SD = D\,, \tag{v}$$

που σημαίνει ότι ο A είναι όμοιος με το διαγώνιο πίνακα D και άρα είναι διαγωνοποιήσιμος.

Αντίστροφα, αν ο Α είναι όμοιος με το διαγώνιο πίνακα D, τότε υπάρχει ένας αντιστρέψιμος πίνακας S τέτοιος ώστε να ισχύει η (v). Έστω ότι

$$S = [Y_1 \ Y_2 \ \cdots \ Y_n]\,.$$

Πρέπει να δείξουμε ότι τα Y_1, Y_2, $\cdots Y_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του A. Εφόσον ο S είναι αντιστρέψιμος, $rank(S)=n$ και άρα τα Y_1, Y_2, $\cdots Y_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Από την (v), έχουμε διαδοχικά:

$$S^{-1}AS = D \quad \Rightarrow \quad SS^{-1}AS = SD \quad \Rightarrow \quad AS = SD \quad \Rightarrow$$

$$A\,[Y_1 \ Y_2 \ \cdots \ Y_n] = [Y_1 \ Y_2 \ \cdots \ Y_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$[AY_1 \ AY_2 \ \cdots \ AY_n] = [\lambda_1 Y_1 \ \lambda_2 Y_2 \ \cdots \ \lambda_n Y_n] \quad \Rightarrow$$

$$AY_i = \lambda_i\, Y_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n\,. \tag{vi}$$

Πράγματι, τα $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ είναι (γραμμικώς ανεξάρτητα) ιδιοδιανύσματα του Α που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$. □

Όπως αναφέραμε στην πιο πάνω απόδειξη, για να έχει ένας $n \times n$ πίνακας A ακριβώς n γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα πρέπει σε κάθε διακεκριμένη ιδιοτιμή λ_i να αντιστοιχούν ακριβώς $\pi(\lambda_i)$ γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, δηλαδή να ισχύει

$$\gamma(\lambda_i) = \pi(\lambda_i), \quad i = 1, 2, \cdots, k\,, \tag{9.30}$$

όπου k το πλήθος των διακεκριμένων ιδιοτιμών του πίνακα. Πράγματι, το πλήθος των γραμμικώς ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα είναι

$$\sum_{i=1}^{k} \gamma(\lambda_i) \, .$$

Επειδή $1 \leq \gamma(\lambda_i) \leq \pi(\lambda_i)$,

$$k \;\leq\; \sum_{i=1}^{k} \gamma(\lambda_i) \;\leq\; \sum_{i=1}^{k} \pi(\lambda_i) \;=\; n \, .$$

Βλέπουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{k} \gamma(\lambda_i) = n$$

αν και μόνο αν ισχύει η (9.30).

Ορισμός 9.4.5
Έστω ο $n \times n$ πίνακας A. Αν για κάθε διακεκριμένη ιδιοτιμή λ_i του A ισχύει

$$\gamma(\lambda_i) = \pi(\lambda_i) \, , \tag{9.31}$$

τότε ο A λέγεται **μη ελλιπής** (non-defective).
Αν για κάποια ιδιοτιμή λ_i του A ισχύει

$$\gamma(\lambda_i) < \pi(\lambda_i) \, , \tag{9.32}$$

τότε ο πίνακας A λέγεται **ελλιπής** (defective).

Παρατηρήσεις

1. Αν όλες οι ιδιοτιμές ενός $n \times n$ πίνακα είναι απλές, τότε ο πίνακας είναι μη ελλιπής.
2. Είναι φανερό από τα προηγούμενα ότι ένας $n \times n$ πίνακας είναι μη ελλιπής αν και μόνο αν έχει n γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. Έτσι το Θεώρημα 9.4.4 μπορεί να αναδιατυπωθεί ως εξής.

Θεώρημα 9.4.6
Έστω ο $n \times n$ πίνακας A με στοιχεία από το σώμα K. Ο A είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μόνο αν είναι μη ελλιπής.

Απόδειξη
Σύμφωνα με τη θεωρία της παρούσας παραγράφου, η διαγωνοποίηση ενός $n \times n$ πίνακα A γίνεται κάνοντας τα εξής βήματα:

1. Βρίσκουμε τις ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του A. Ο A είναι διαγωνοποιήσιμος αν έχει n γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα $X_1, X_2, \cdots, X_n$ (δηλ. αν ο A είναι μη ελλιπής $\Leftrightarrow \gamma(\lambda_i) = \pi(\lambda_i)$).

2. Αν ο A είναι διαγωνοποιήσιμος, κατασκευάζουμε τους πίνακες S και D:

$$S = [X_1 \ X_2 \ \cdots \ X_n] \quad \text{και} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

3. Βρίσκουμε τον αντίστροφο S^{-1} του S και υπολογίζουμε τον A:

$$A = SDS^{-1}.$$

□

Πόρισμα 9.4.7
Αν όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα $A \in M_{n\times n}(K)$ είναι απλές, τότε ο A είναι διαγωνοποιήσιμος.

Παράδειγμα 1

Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, που μελετήσαμε σε προηγούμενο παράδειγμα. Οι ιδιοτιμές του A είναι οι $\lambda_1 = 2$ με $\pi(\lambda_1) = 2$ και $\lambda_2 = 6$ με $\pi(\lambda_2) = 1$.

Στη διπλή ιδιοτιμή λ_1=2 αντιστοιχούν δύο γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, τα X_1=(1, -1, 0) και X_2=(0,1, -1), ενώ στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 6$ αντιστοιχεί το ιδιοδιάνυσμα X_3=(1,2,1). Ο A είναι διαγωνοποιήσιμος αφού έχει 3 γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. Έστω οι πίνακες

$$S = [X_1 \ X_2 \ X_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Ο αντίστροφος S^{-1} του S μπορεί να βρεθεί με μια από τις γνωστές μεθόδους:

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Άρα μια διαγωνοποίηση του A είναι η:

$$A = SDS^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Μια άλλη διαγωνοποίηση του A προκύπτει αν θέσουμε:

$$S = [X_2 \ X_3 \ X_1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

οπότε

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Βρίσκουμε τότε ότι

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix},$$

οπότε έχουμε την παρακάτω διαγωνοποίηση του A:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα 2

Να διαγωνοποιηθεί ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Βρίσκουμε πρώτα τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του A. Η χαρακτηριστική εξίσωση του A είναι η

$$|A-\lambda I| = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 3 \\ -2 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 3 \\ -2 & \lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$0 = \lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2-\lambda & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$0 = \lambda \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad -\lambda\,(2-\lambda)\,(3-\lambda) = 0\,. \qquad (i)$$

(Η χαρακτηριστική εξίσωση μπορεί να βρεθεί και με πολλούς άλλους τρόπους, για παράδειγμα, αναπτύσσοντας την αρχική ορίζουσα ως προς τα στοιχεία της πρώτης στήλης). Από την (i) βλέπουμε ότι ο A έχει τρεις απλές ιδιοτιμές: $\lambda_1=0$, $\lambda_2=2$ και $\lambda_3=3$. Άρα ο A έχει 3 γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα και είναι διαγωνοποιήσιμος.

Για λ_1=0, έχουμε το χαρακτηριστικό σύστημα:

$$(A-0I)\,X=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Κλιμακοποιούμε τον πίνακα του συστήματος:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το

$$\left.\begin{array}{lcl} x_1 & = & 0 \\ x_2+x_3 & = & 0 \end{array}\right\}.$$

Παίρνοντας το x_3 ως ελεύθερη μεταβλητή, βρίσκουμε τη γενική μορφή των ιδιοδιανυσμάτων του A που αντιστοιχούν στην λ_1=0:

$$(0,-a,a)=a\,(0,-1,1), \quad a\in\mathbf{R}, a\neq 0\,.$$

Έστω λοιπόν ότι

$$X_1=(0,-1,1)\,.$$

Για λ_2=2, έχουμε το χαρακτηριστικό σύστημα:

$$(A-2I)\,X=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Κλιμακοποιούμε, όπως και προηγουμένως, τον πίνακα του συστήματος:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το

$$\left.\begin{array}{lcl} x_1+2x_3 & = & 0 \\ x_2+x_3 & = & 0 \end{array}\right\}$$

Η γενική μορφή των ιδιοδιανυσμάτων του A που αντιστοιχούν στην λ_2=2 είναι:

$$(-2a,-3a,a)=a\,(-2,-3,1), \quad a\in\mathbf{R}, a\neq 0\,.$$

Έστω λοιπόν ότι

$$X_2=(-2,-3,1)\,.$$

Για $\lambda_3 = 3$, έχουμε το χαρακτηριστικό σύστημα:

$$(A - 3I)\,X = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Κλιμακοποιούμε τον πίνακα του συστήματος:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ & 0 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x_1 - x_2 & = & 0 \\ x_3 & = & 0 \end{array}\right\}$$

Η γενική μορφή των ιδιοδιανυσμάτων του A που αντιστοιχούν στην λ_3=3 είναι:

$$(a, 2a, 0) = a\,(1, 2, 0), \qquad a \in \mathbf{R}, a \neq 0\,.$$

Έστω λοιπόν ότι

$$X_3 = (1, 2, 0)\,.$$

Συνοψίζουμε στο σημείο αυτό τα μέχρι στιγμής αποτελέσματα. Ο πίνακας A έχει τρεις απλές ιδιοτιμές, τις λ_1=0, λ_2=2, και λ_3=3 στις οποίες αντιστοιχούν τα ιδιοδιανύσματα

$$X_1 = (0, -1, 1), \qquad X_2 = (-2, -3, 1) \quad \text{και} \quad X_3 = (1, 2, 0)\,.$$

Τα X_1, X_2 και X_3 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (Πρόταση 9.2.8) και συνεπώς ο A είναι διαγωνοποιήσιμος. Έστω λοιπόν ότι

$$S = [X_1\ X_2\ X_3] = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

οπότε

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Απομένει να βρούμε τον αντίστροφο S^{-1} του S. Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο αναγωγής σε ανηγμένο κλιμακωτό. ($[S|I] \sim [I|S^{-1}]$):

$$\begin{aligned}
[S|I] \;=\; & \left[\begin{array}{rrr|rrr} 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \\
\sim\; & \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right] \\
\sim\; & \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad \Longrightarrow
\end{aligned}$$

$$[S|I] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad \Rightarrow$$

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

Εχουμε τελικά την εξής διαγωνοποίηση του A:

$$A = SDS^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

Ο υπολογισμός δυνάμεων ενός διαγωνοποιήσιμου πίνακα καθίσταται ευκολότερος μετά τη διαγωνοποίησή του. Πραγματικά, αν

$$A = SDS^{-1} ,$$

τότε

$$A^2 = AA = SDS^{-1}SDS^{-1} = SD^2S^{-1} .$$

Επαγωγικά βρίσκουμε ότι

$$A^k = SD^kS^{-1}, \quad k \in \mathbf{N} . \tag{9.33}$$

Η πιο πάνω σχέση ισχύει και για $k = 0$ (γιατί;). Ο D^k υπολογίζεται εύκολα, αφού

$$D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix} . \tag{9.34}$$

Παράδειγμα

Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

του προηγούμενου παραδείγματος. Βρήκαμε ότι μια διαγωνοποίηση του A είναι η εξής:

$$A = SDS^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

Σύμφωνα με την (9.33), για τον A^6 έχουμε:

$$A^6 = SD^6S^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^6 & 0 \\ 0 & 0 & 3^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

Στην περίπτωση που ο A είναι αντιστρέψιμος, όλες οι ιδιοτιμές του είναι διάφορες του 0 και ο D (που έχει τις ίδιες ιδιοτιμές) είναι αντιστρέψιμος. Η (9.33) επεκτείνεται τότε και για αρνητικά k. Πράγματι από την

$$A = SDS^{-1}$$

παίρνουμε:

$$A^{-1} = \left(SDS^{-1}\right)^{-1} = \left(S^{-1}\right)^{-1} D^{-1}S^{-1} = SD^{-1}S^{-1} ,$$

όπου

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

Για τον A^{-2} έχουμε:

$$A^{-2} = A^{-1}A^{-1} = SD^{-2}S^{-1} .$$

Επαγωγικά βρίσκουμε ότι για αντιστρέψιμο πίνακα A ισχύει

$$A^{-k} = SD^{-k}S^{-1}, \quad k \in \mathbf{N} .$$

Εφόσον οι A^k και D^k είναι όμοιοι μπορούμε εύκολα να παρατηρήσουμε ότι αν $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A, τότε οι ιδιοτιμές του A^k είναι οι $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \cdots, \lambda_n^k$. Ακόμα, αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε οι ιδιοτιμές του A^{-1} είναι οι $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \cdots, \frac{1}{\lambda_k}$.

Θεώρημα 9.4.8
Έστω λ μια ιδιοτιμή του $n \times n$ πίνακα A και X ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στη λ.
(α) Ο πίνακας A^k με $k = 2, 3, \cdots$ έχει ιδιοτιμή τη λ^k και αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το X.
(β) Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, ο A^{-1} έχει ιδιοτιμή την $\frac{1}{\lambda}$ και αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το X.

Απόδειξη
(α)

$$AX = \lambda X \quad \Rightarrow \quad A^2X = \lambda AX = \lambda(\lambda X) \quad \Rightarrow \quad A^2X = \lambda^2 X .$$

Συνεχίζοντας επαγωγικά βρίσκουμε ότι

$$A^kX = \lambda^k X, \quad k = 2, 3, \cdots$$

άρα η πρόταση ισχύει.
(Σημείωση: Η πρόταση ισχύει και για $k = 0$. Ισχύει ακόμα για αρνητικά k αν ο A είναι αντιστρέψιμος).

(β) Αν ο Α είναι αντιστρέψιμος, τότε $\lambda \neq 0$. Εχουμε διαδοχικά:

$$AX = \lambda X \quad \Rightarrow \quad A^{-1}AX = \lambda\, A^{-1}X \quad \Rightarrow \quad X = \lambda\, A^{-1}X \quad \Rightarrow \quad A^{-1}X = \frac{1}{\lambda}\, X\,.$$

Άρα η $\frac{1}{\lambda}$ είναι μια ιδιοτιμή του A^{-1} και το X ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. □

Οι έννοιες αυτής της παραγράφου ορίζονται φυσικά και για γραμμικούς τελεστές στο $\mathcal{L}(V)$, όπου ο V είναι πεπερασμένης διάστασης. Παραθέτουμε σχετικές προτάσεις και ένα ορισμό του Κεφαλαίου 7, καθώς και κάποια χρήσιμα πορίσματα.

Θεώρημα 7.7.6
Έστω οι πίνακες $A, B \in M_{n\times n}$. Οι A και B είναι **όμοιοι** αν και μόνο αν αυτοί αντιστοιχούν στον ίδιο γραμμικό τελεστή $T \in \mathcal{L}(V)$, όπου ο γραμμικός χώρος V είναι πεπερασμένης διάστασης n.

Ορισμός 7.7.7
Ένας γραμμικός τελεστής $T \in \mathcal{L}(V)$, όπου ο γραμμικός χώρος V είναι πεπερασμένης διάστασης n, λέγεται **διαγωνοποιήσιμος** αν υπάρχει μια βάση B του V τέτοια ώστε ο $(A_T)_B$ να είναι διαγώνιος.

Σύμφωνα με τον πιο πάνω ορισμό, ο γραμμικός τελεστής $T \in \mathcal{L}(V)$, όπου $dimV = n \in \mathbf{N}$, είναι διαγωνοποιήσιμος αν υπάρχει μια βάση $B=\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ του V τέτοια ώστε να ισχύει

$$T(u_i) \;=\; \lambda_i\, u_i\,, \quad \lambda_i \in K\,, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

ή ισοδύναμα αν υπάρχει βάση B του V που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του T. Στην περίπτωση αυτή, τα διαγώνια στοιχεία του $(A_T)_B$ είναι οι ιδιοτιμές του T:

$$(A_T)_B \;=\; \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Πόρισμα 9.4.9
Έστω ο τελεστής $T \in \mathcal{L}(V)$, όπου $dimV=n \in \mathbf{N}$. Αν υπάρχει μια βάση του V η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του T, τότε ο T είναι διαγωνοποιήσιμος.

Πόρισμα 9.4.10
Έστω ο τελεστής $T \in \mathcal{L}(V)$, όπου $dimV=n \in \mathbf{N}$. Αν ο T έχει n διακεχριμένες ιδιοτιμές, τότε ο T είναι διαγωνοποιήσιμος.

Πρόταση 7.7.8

Ένας τελεστής $T \in \mathcal{L}(V)$, όπου $dimV = n \in \mathbf{N}$, είναι διαγωνοποιήσιμος όταν και μόνον όταν υπάρχει μια βάση B του V και ένας αντιστρέψιμος πίνακας P τέτοιος ώστε ο πίνακας

$$P^{-1}\,(A_T)_B\,P$$

να είναι διαγώνιος.

9.6 Προβλήματα

1. Να αποδειχθεί η Πρόταση 9.1.3.

2. Να αποδειχθεί η Πρόταση 9.1.4.

3. Αν ο τελεστής $T \in \mathcal{L}(V)$ είναι μηδενοδύναμος να δειχθεί ότι η μόνη ιδιοτιμή του T είναι το μηδέν.

4. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχοι ιδιοχώροι του γραμμικού τελεστή $T \in L(\mathbf{R}^2)$ που ορίζεται από τη σχέση
$$T(x_1, x_2) \;=\; (x_1 + 2x_2,\; 4x_1 + 3x_2)\,.$$

5. Αν ο λ είναι ιδιοτιμή του αντιστρέψιμου γραμμικού τελεστή $T \in \mathcal{L}(V)$, να δειχθεί ότι ο λ^{-1} είναι ιδιοτιμή του T^{-1}.

6. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές των κάτωθι πινάκων:
$$(\alpha) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad\qquad (\beta) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

7. Δείξτε ότι οι ιδιοτιμές ενός τριγωνικού πίνακα (άνω ή κάτω) είναι ίσες με τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα.

8. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα των παρακάτω πινάκων:
$$(\alpha) \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad\qquad (\beta) \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

9. Έστω ο 3×3 πίνακας
$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{bmatrix}$$
(α) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του A.
(β) Να βρεθούν και να κανονικοποιηθούν τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα.

10. Δίνεται ο 3×3 πίνακας
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$
(α) Δείξτε ότι οι ιδιοτιμές του A είναι οι $\lambda_1 = 1$ με $\pi(\lambda_1) = 1$ και $\lambda_2 = 2$ με $\pi(\lambda_2) = 2$.
(β) Να βρεθούν οι $\gamma(\lambda_1) = dim E\lambda_1$ και $\gamma(\lambda_2) = dim E\lambda_2$.
(γ) Να βρεθούν τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ_1 και λ_2 και να ορισθούν οι ιδιόχωροι $E\lambda_1$ και $E\lambda_2$.

11. Να διαγωνοποιηθούν οι πιο κάτω πίνακες:

(α) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$ (β) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

12. Δείξτε ότι ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

διαγωνοποιείται και γράψτε μια διαγωνοποίησή του.

13. Έστω λ μια ιδιοτιμή του $n \times n$ πίνακα A και X ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. Να δειχθεί ότι ο πίνακας $(A + aI)$, όπου a σταθερά, έχει ιδιοτιμή τη $\lambda + a$ και αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το X.

14. Έστω ο τελεστής $T \in \mathcal{L}(V)$ για τον οποίο ισχύει

$$T^2 = T$$

(ένας τέτοιος τελεστής καλείται **προβολή** (projection)). Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του T.

15. Έστω ο τελεστής $T \in L(\mathbf{R}^3)$ που ορίζεται από τη σχέση

$$T(x, y, z) = (0, x, y) .$$

Να βρεθούν τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα των T, T^2 και T^3.

16. Έστω ο τελεστής $T \in L(\mathbf{R}^3)$ που ορίζεται από τη σχέση

$$T(x, y, z) = (x - 2z,\ 0,\ -2x + 4z) .$$

Να βρεθεί μια βάση B του $\mathbf{R}^3$ έτσι ώστε ο $(A_T)_B$ να είναι διαγώνιος.

17. Έστω ο τελεστής $T \in L(\mathbf{R}^4)$ που ορίζεται από τη σχέση

$$T(x, y, z, w) = (x,\ 2x + 5y + 6z + 7w,\ 3x + 8z + 9w,\ 4x + 10w) .$$

Να βρεθεί μια βάση B του $\mathbf{R}^4$ έτσι ώστε ο $(A_T)_B$ να είναι διαγώνιος.

18. Έστω ο τελεστής $S \in L(\mathbf{C}^3)$ που ορίζεται από τη σχέση

$$T(u, v, w) = (-u,\ -w,\ v) .$$

Να βρεθεί μια βάση B του $\mathbf{C}^3$ έτσι ώστε ο $(A_T)_B$ να είναι διαγώνιος.

19. Έστω $f(x)$ ένα πολυώνυμο και A ένας $n \times n$ πίνακας.
(α) Να δειχθεί ότι αν λ, X είναι αντίστοιχα ιδιοποσά του πίνακα A, τότε τα $f(\lambda), X$ είναι αντίστοιχα ιδιοποσά του πίνακα $f(A)$.
(β) Αν $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές του A, να δειχθεί ότι

$$det[f(A)] = f(\lambda_1)\, f(\lambda_2)\, \cdots\, f(\lambda_n) .$$

20. Αν ο $n \times n$ πίνακας A έχει μόνο μια ιδιοτιμή διάφορη του μηδενός, δείξτε ότι

$$det(I + A) = 1 + trA\,.$$

21. Να βρεθούν τα ελάχιστα πολυώνυμα των κάτωθι πινάκων:

$$\text{(i)} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(ii)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{(iii)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{(iv)} \quad \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

22. Υπολογίζοντας το ελάχιστο πολυώνυμο, καθορίστε ποιοι από τους κάτωθι πίνακες είναι διαγωνοποιήσιμοι.

$$\text{(i)} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(ii)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

23. Δείξτε ότι αν $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$, τότε οι πίνακες AB και BA έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

24. Αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix},$$

να βρεθούν οι $||A||_1$, $||A||_2$, $||A||_\infty$ και $||A||_F$.

25. Αν ο $n \times n$ πίνακας A είναι μηδενοδύναμος και μη μηδενικός, δείξτε ότι αυτός *δεν είναι* διαγωνοποιήσιμος.