4 ΑΛΓΕΒΡΑ ΠΙΝΑΚΩΝ

4.1 ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός 4.1.1

Μια "τυπική ορθογώνια διάταξη" m·n το πλήθος στοιχείων ενός σώματος K :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

λέγεται <u>πίνακας πάνω στο K</u> ή απλώς <u>πίνακας</u> (matrix).

Οι m το πλήθος οριζόντιες "νιάδες" :

$$(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}),\ (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \dots, (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$$

ή συνοπτικά οι

$$r_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}), \quad i = 1, 2, \dots, m$$

καλούνται <u>γραμμές</u> (rows) του πίνακα.

Οι n το πλήθος κατακόρυφες "μιάδες"

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

ή συνοπτικά οι

$$C_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, \quad j=1,2,\ldots,n$$

καλούνται <u>στήλες</u> (columns) του πίνακα.

Ενας πίνακας με m γραμμές και n στήλες λέγεται <u>m×n πίνακας</u> ή <u>πίνακας τύπου m×n</u>.

Οι αριθμοί a_{ij} λέγονται <u>στοιχεία</u> του πίνακα και από τους δείκτες i, j ο πρώτος λέγεται <u>δείκτης γραμμής</u> και ο δεύτερος <u>δείκτης στήλης</u>.

Το στοιχείο a_{ij} βρίσκεται στην τομή της γραμμής i με τη στήλη j. Θα λέμε ότι το στοιχείο a_{ij} <u>βρίσκεται στη θέση (i,j)</u> ή εναλλακτικά θα το καλούμε <u>(i,j)-στοιχείο</u>.

Το a_{ij} λέγεται <u>γενικό στοιχείο</u> του πίνακα A.

Ο πίνακας A μπορεί να γραφεί σε συντετμημένη μορφή ως

$$A = (a_{ij})_{m\times n}$$

ή ακόμα όταν ο τύπος του εννοείται

$$A = (a_{ij}).$$

Οταν τα στοιχεία του πίνακα είναι αριθμοί πραγματικοί, ο πίνακας λέγεται <u>πραγματικός</u>.

Οταν αυτά είναι καθαρώς φανταστικοί ή μιγαδικοί, ο πίνακας λέγεται <u>καθαρώς φανταστικός</u> ή <u>μιγαδικός</u>, αντίστοιχα.

Παράδειγμα 1

Ο πίνακας

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

είναι ένας πραγματικός 3x4 πίνακας, με γραμμές τις:

$$r_1 = (2, 0, -1, 1),$$
$$r_2 = (3, 1, 4, 2), \quad \text{και}$$
$$r_3 = (1, -1, 6, 7)$$

και στήλες τις

$$C_1=\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad C_3=\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad C_4=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Εχουμε επίσης $a_{11}=2$, $a_{14}=1$, $a_{23}=4$ κ.ο.κ.

Παράδειγμα 2

Εστω οι πίνακες

$$A=\begin{bmatrix} 2i & -3i \\ 3i & i \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B=\begin{bmatrix} 1-i & 1+i \\ 2-3i & 2+i \\ 4-5i & 3 \end{bmatrix}.$$

Ο A είναι καθαρώς φανταστικός 2x2 πίνακας, ενώ ο B είναι μιγαδικός 3x2 πίνακας.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1 Το γινόμενο mxn δεν εκτελείται, διαβάζεται "m επί n" και δηλώνει τον τύπο του πίνακα.

2 Στην ελληνική βιβλιογραφία χρησιμοποιείται επίσης ο όρος "πίνακας διαστάσεως mxn" αντί του "πίνακας τύπου mxn".
Συναντούμε επίσης τους όρους "μητρώο" και "μήτρα" αντί του "πίνακας".

3 Για τους πίνακες χρησιμοποιούμε είτε αγκύλες είτε παρενθέσεις, π.χ.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

4 Χρησιμοποιώντας τους συμβολισμούς του Ορ. 4.1.1 θα γράφουμε τον πίνακα A καταχρηστικώς και στις μορφές:

$$A=(a_{ij})=(c_1\ c_2 \cdots c_n)=\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_m \end{pmatrix}$$

όπου c_j, r_i οι στήλες και οι γραμμές του πίνακα, αντίστοιχα.

5 Στα επόμενα, θα συμβολίζουμε με $M_{m\times n}(K)$ το σύνολο των $m\times n$ πινάκων με στοιχεία από το σώμα K.

<u>Ορισμός 4.1.2</u>

Οταν ένας πίνακας αποτελείται μόνο από μια γραμμή, είναι δηλαδή $1\times n$ πίνακας:

$$A=[a_1\ a_2 \cdots a_n],$$

ονομάζεται <u>πίνακας γραμμής</u> (ή <u>διάνυσμα γραμμής τάξης n</u>).

Οταν ένας πίνακας αποτελείται μόνο από μια στήλη, είναι δηλαδή $m\times 1$ πίνακας:

$$B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

ονομάζεται <u>πίνακας στήλης</u> (ή <u>διάνυσμα στήλης τάξης m</u>).

Ορισμός 4.1.3

Ενας πίνακας του οποίου όλα τα στοιχεία είναι μηδέν λέγεται <u>μηδενικός</u> (zero or null matrix) και θα τον παριστάνουμε με το σύμβολο $\mathbb{O}$ ή O (όταν δεν υπάρχει κίνδυνος να γίνει σύγχυση):

$$\mathbb{O}_{m\times n} = (\mathbb{O}_{ij}) \ , \ \mathbb{O}_{ij} = 0 \ \text{ για όλα τα } (i,j).$$

<u>Παράδειγμα 1</u>

Εστω οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & 2 & i \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ο A είναι πίνακας γραμμής ενώ οι B και Γ είναι πίνακες στήλης.

<u>Παράδειγμα 2</u>

Οι

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

είναι όλοι μηδενικοί πίνακες διαφορετικού τύπου (3×1, 3×4 και 2×2 αντίστοιχα).

Ορισμός 4.1.4

Εάν το πλήθος των γραμμών ενός πίνακα A ισούται με το πλήθος των στηλών του, εάν δηλαδή αυτός είναι τύπου $n \times n$,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$ τότε ο A

λέγεται <u>τετραγωνικός πίνακας</u> (square matrix) τάξεως n.

Τα στοιχεία

$$a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$$

λέμε ότι σχηματίζουν την <u>κύρια διαγώνιο</u> του πίνακα, και τα

$$a_{1n}, a_{2,n-1}, \ldots, a_{n1}$$

τη <u>δευτερεύουσα διαγώνιό</u> του.

Το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου λέγεται <u>ίχνος</u> (trace) του (τετραγωνικού) πίνακα και συμβολίζεται με $tr(A)$. Έχουμε δηλαδή:

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Παράδειγμα

Οι πίνακες Hilbert είναι τετραγωνικοί πίνακες με γενικό στοιχείο το

$$h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$$

και συμβολίζονται με H_n όπου n η τάξη του πίνακα.

Για τους H_2 και H_3 έχουμε:

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{bmatrix}, \quad tr(H_2) = 1 + \frac{1}{3}$$

και

$$H_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix}, \quad tr(H_3) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$$

Ορισμός 4.1.5

Ενας τετραγωνικός πίνακας A του οποίου όλα τα στοιχεία που βρίσκονται κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν, δηλ.

$$a_{ij} = 0, \quad i > j$$

λέγεται άνω τριγωνικός (upper triangular).

Ενας τετραγωνικός πίνακας A του οποίου όλα τα στοιχεία που βρίσκονται πάνω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν, δηλ.

$$a_{ij} = 0, \quad i < j$$

λέγεται κάτω τριγωνικός (lower triangular).

Παράδειγμα

Οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 3+2i & 1-i & 3 \\ 0 & 4i & 2+i \\ 0 & 0 & 7-3i \end{bmatrix}$$

είναι τετραγωνικοί 3x3 πίνακες. Ο A είναι κάτω τριγωνικός και ο B άνω τριγωνικός. Για τα ίχνη τους έχουμε:

$$tr(A) = 1 + 0 - 5 = -4$$

$$tr(B) = 3+2i + 4i + 7-3i = 10+3i$$

Ορισμός 4.1.6

Ενας τετραγωνικός πίνακας A λέγεται <u>διαγώνιος</u> (diagonal) όταν

$$a_{ij}=0\,,\quad i\neq j\,,$$

όταν δηλ. όλα τα στοιχεία του εκτός της διαγωνίου είναι μηδέν:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ενας διαγώνιος πίνακας γράφεται σε συντετμημένη μορφή ως:

$$A=\mathrm{diag}(a_{11}\;a_{22}\;\cdots\;a_{nn}).$$

Οταν ειδικώς είναι

$$a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=a\,,$$

δηλ.

$$A=\begin{bmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix}=\mathrm{diag}(a\;a\;\cdots\;a)\,,\quad a\in K$$

ο πίνακας λέγεται <u>βαθμωτός</u>.

Οταν είναι επιπλέον $a=1$, δηλ.

$$a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=1\,,$$

ο πίνακας λέγεται <u>μοναδιαίος</u> ή <u>ταυτοτικός</u> (unit or identity matrix). Τους μοναδιαίους πίνακες θα τους παριστάνουμε με το σύμβολο I_n ή απλούστερα με I εφόσον ο τύπος τους συνάγεται από το κείμενο:

$$I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Για κάθε μοναδιαίο πίνακα μπορούμε να γράψουμε:

$$I = (\delta_{ij}) \quad , \quad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

όπου δ_{ij} το <u>δέλτα του Kronecker</u>:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 , & i = j \\ 0 , & i \neq j \end{cases}$$

<u>Παράδειγμα</u>

Εστω οι πραγματικοί πίνακες:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \text{ και } \Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Ο A είναι διαγώνιος, ο B βαθμωτός και ο Γ μοναδιαίος. Για τα ίχνη τους έχουμε:

$$tr(A) = 3 + 4 - 2 = 5$$

$$tr(B) = -4 - 4 - 4 = -12$$

$$tr(\Gamma) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

Είναι προφανές ότι το ίχνος ενός βαθμωτού πίνακα

$$A_n = diag(a \ a \ \ldots \ a)$$

είναι

$$tr(A_n) = na$$

και ότι

$$tr(I_n) = n .$$

4.2 ΠΡΑΞΕΙΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Ορισμός 4.2.1 (Ισότητα πινάκων)

Δύο πίνακες του ίδιου τύπου,

$$A=(a_{ij}),\quad B=(b_{ij})\in M_{m\times n}(K)$$

θα λέμε ότι είναι ίσοι, συμβολικά $A=B$, όταν τα ομοθέσιά τους στοιχεία είναι ίσα, δηλ.

$$A=B \quad \text{όταν} \quad a_{ij}=b_{ij} \quad \forall i,j.$$

Ορισμός 4.2.2

Εστω δύο πίνακες του ίδιου τύπου:

$$A=(a_{ij}),\quad B=(b_{ij})\in M_{m\times n}(K)$$

Θα λέμε ότι ο πίνακας A είναι αντίθετος του B, συμβολικά $A=-B$, όταν τα ομοθέσιά τους στοιχεία είναι αντίθετα, δηλ.

$$A=-B \quad \text{όταν} \quad a_{ij}=-b_{ij} \quad \forall i,j$$

Από τις ιδιότητες των μιγαδικών αριθμών προκύπτει αμέσως ότι η ισότητα δύο πινάκων είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο $M_{m\times n}$, δηλ. ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

1 Ανακλαστική (reflexive): $A=A$

2 Συμμετρική (symmetric): $A=B \Longrightarrow B=A$

3 Μεταβατική (transitive):

$$A=B,\ B=\Gamma \Longrightarrow A=\Gamma$$

Από τους πιο πάνω ορισμούς και ιδιότητες προκύπτει ότι αν ο πίνακας A είναι ίσος ή αντίθετος με τον B, τότε και ο πίνακας B είναι ίσος ή αντίθετος με τον A. Ετσι μπορούμε να λέμε: οι πίνακες A, B είναι ίσοι ή αντίστοιχα οι πίνακες A, B είναι αντίθετοι.

<u>Παράδειγμα</u>

Αν είναι $\begin{bmatrix} x+y & 2 \\ 1 & x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ τότε

$$\left.\begin{aligned} x+y &= 3 \\ x-y &= 5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad x=4 \quad \text{και} \quad y=-1.$$

<u>Ορισμός 4.2.3 (Πρόσθεση πινάκων)</u>

Εστω δύο πίνακες του ίδιου τύπου:

$$A=(a_{ij}), \quad B=(b_{ij}) \in M_{m\times n}(K)$$

Το άθροισμά τους

$$C=(c_{ij})=A+B$$

είναι επίσης $m\times n$ πίνακας και ορίζεται ως εξής:

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij} \quad \forall\, i,j$$

<u>Θεώρημα 4.2.4 (Ιδιότητες της πρόσθεσης πινάκων).</u>

Εστω $A, B, C \in M_{m\times n}(K)$ και O ο μηδενικός $m\times n$ πίνακας. Τότε:

(α) $A+B=B+A$

Αντιμεταθετική (commutative) ιδιότητα.

(β) $A+(B+C)=(A+B)+C$

Προσεταιριστική (associative) ιδιότητα.

(γ) $A+O=A$

(δ) $A+(-A)=O$

<u>Απόδειξη.</u>

Πολύ απλή. $\square$

Παράδειγμα 1

Να βρεθούν τα αθροίσματα των παρακάτω πινάκων:

(α) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$

(β) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

Λύση

(α)

$$A+B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3 & -1+0 \\ 2-1 & 2-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(β) Η πρόσθεση δεν ορίζεται γιατί οι A και B είναι διαφορετικού τύπου: $A \in M_{3\times3}$ και $B \in M_{3\times2}$.

Παράδειγμα 2

Αν είναι

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & i \\ 1+i & 1 & 3i \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2i & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ i & 3 & 1+i \end{bmatrix}$$

τότε

$$A+B = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 2i & i \\ 2+i & 0 & 2+3i \\ i & 2 & 2+i \end{bmatrix}$$

Ορισμός 4.2.5 (Βαθμωτός πολλαπλασιασμός)

Αν $A=(a_{ij}) \in M_{m\times n}(K)$ και $\lambda \in K$ τότε το βαθμωτό τους πολλαπλάσιο λA είναι επίσης ένας $m\times n$ πίνακας και ορίζεται ως εξής:

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})$$

Ο λA είναι δηλαδή ο πίνακας που προκύπτει πολλαπλασιάζοντας κάθε στοιχείο του A με λ.

Παράδειγμα 1

Αν είναι

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

τότε

$$3A = 3\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 9 & 0 & 18 \\ -3 & 6 & 3 \\ 3 & -3 & 9 \end{bmatrix}$$

και

$$A-2B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & 8 & 10 \\ 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 3 & -8 & -4 \\ -5 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 2

Εστω ο μιγαδικός πίνακας $A=\begin{bmatrix} 1-i & 1+i \\ 2+i & 3-2i \end{bmatrix}$.

Θα υπολογίσουμε το $(1+i)A$:

$$(1+i)A = (1+i)\begin{bmatrix} 1-i & 1+i \\ 2+i & 3-2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-i)(1+i) & (1+i)^2 \\ (2+i)(1+i) & (3-2i)(1+i) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$(1+i)A = \begin{bmatrix} 2 & 2i \\ 1+3i & 5+i \end{bmatrix}$$

Παρατήρηση

Αν $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij}) \in M_{m\times n}$, τότε

$$C=(c_{ij}) = A-B = A+(-B)$$

όπου

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \qquad \forall i,j$$

Θεώρημα 4.2.6 (Ιδιότητες του βαθμωτού πολλαπλασιασμού)

Εστω $A, B \in M_{m\times n}(K)$, $a, b \in K$ και 1 το μοναδιαίο στοιχείο του K. Τότε:

(α) $a(A+B) = aA + aB$

(β) $(a+b)A = aA + bA$

(γ) $a(bA) = (ab)A$

(δ) $1\cdot A = A$

Απόδειξη

Πολύ απλή $\square$

Εύκολα μπορεί να παρατηρήσει κάποιος ότι ο $M_{m\times n}(K)$ εφοδιασμένος με τις πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού των Ορισμών 4.2.3 και 4.2.5 και το μηδενικό πίνακα $O_{m\times n}$, είναι ένας διανυσματικός χώρος πάνω στο K. Τα Θεωρήματα 4.2.4 και 4.2.6 δείχνουν ότι όλες οι συνθήκες για να είναι ο $M_{m\times n}(K)$ διανυσματικός χώρος ικανοποιούνται.

Είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, ότι στην περίπτωση των πραγματικών πινάκων μια βάση του $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ αποτελείται από τους mn το πλήθος πίνακες,

$$E_{11}, E_{12}, \ldots, E_{1n}, E_{21}, \ldots, E_{ij}, \ldots, E_{mn}$$

που ορίζονται με τον ακόλουθο τρόπο: όλα τα στοιχεία του E_{ij} είναι ίσα με μηδέν εκτός από το στοιχείο στη θέση (i,j) που είναι ίσο με 1.

Γενικά, κάθε πίνακας $A=(a_{ij})\in M_{m\times n}(K)$ γράφεται μονοσήμαντα σαν γραμμικός συνδυασμός των $E_{11}, E_{12}, \dots, E_{mn}$:

$$A = a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} + \dots + a_{mn}E_{mn}$$

Έτσι το σύνολο $\{E_{11}, E_{12}, \dots, E_{mn}\}$ είναι βάση του $M_{m\times n}(K)$, οπότε

$$\dim M_{m\times n}(K) = mn$$

Εφόσον ο $M_{m\times n}(K)$ είναι διανυσματικός χώρος, ισχύουν γι' αυτόν οι στοιχειώδεις ιδιότητες των Προτάσεων 2.1.2 και 2.1.3. Τις επαναδιατυπώνουμε στο θεώρημα που ακολουθεί.

<u>Θεώρημα 4.2.7</u>

(α) Ο μηδενικός πίνακας $O\in M_{m\times n}(K)$ είναι μοναδικός

(β) Ο αντίθετος πίνακας $-A$ του $A\in M_{m\times n}(K)$ είναι μοναδικός

(γ) Αν $A, B, C\in M_{m\times n}(K)$ και $A+C=B+C$, τότε $A=B$.

(δ) Αν $A\in M_{m\times n}(K)$, τότε $-(-A)=A$.

(ε) $0\cdot A = O \quad \forall\, A\in M_{m\times n}(K)$

(στ) Αν $a\in K$ και $O\in M_{m\times n}(K)$, τότε

$$aO = O$$

(ζ) Αν $aA=O$ όπου $a\in K$ και $A\in M_{m\times n}(K)$, τότε $a=0$ ή/και $A=O$.

(η) Για κάθε $a\in K$ και $A\in M_{m\times n}(K)$ ισχύει

$$(-a)A = -(aA).$$

Ειδικότερα,

$$(-1)A = -A$$

4.3 ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Ορισμός 4.3.1

Δύο πίνακες $A=(a_{ij})\in M_{m\times p}$ και $B=(b_{ij})\in M_{s\times n}$ λέμε ότι είναι <u>συμβιβαστοί ως προς τον πολλαπλασιασμό</u> ή απλά <u>συμβιβαστοί</u> όταν το πλήθος των στηλών του πρώτου είναι ίσο με το πλήθος των γραμμών του δεύτερου, δηλαδή όταν

$$p=s$$

Παράδειγμα 1

Εστω οι πίνακες

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 6\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B=\begin{bmatrix}1 & -6 & 3 & 1\\ 3 & 4 & -2 & 0\\ -2 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix}.$$

Είναι $A\in M_{2\times 3}$ και $B\in M_{3\times 4}$. Οι A, B είναι συμβιβαστοί ενώ οι B, A δεν είναι! Γιατί;

Παράδειγμα 2

Εστω ένας πίνακας γραμμής $A\in M_{1\times n}$ και ένας πίνακας στήλης $B\in M_{n\times 1}$ που περιέχει τον ίδιο αριθμό στοιχείων. Τότε οι A, B είναι συμβιβαστοί καθώς επίσης και οι B, A!

Ετσι οι

$$A=[1, -3, -4, 2] \quad \text{και} \quad B=\begin{bmatrix}-5\\ 6\\ 3\\ 1\end{bmatrix}$$

είναι συμβιβαστοί.

<u>Ορισμός 4.3.2 (Πολλαπλασιασμός πινάκων)</u>

Ας είναι $A=(a_{ij})\in M_{m\times p}$ και $B=(b_{ij})\in M_{p\times n}$ δύο συμβιβαστοί πίνακες. Συμβολίζουμε τις γραμμές του A με

$$r_k(A)\,, \quad k=1,2,\dots,m$$

και τις στήλες του B με

$$c_\ell(B)\,, \quad \ell=1,2,\dots,n.$$

Ορίζουμε το <u>γινόμενο του "A επί τον B"</u>, συμβολικά AB, ως τον πίνακα $\Gamma=(\gamma_{ij})\in M_{m\times n}$ του οποίου τα στοιχεία γ_{ij} είναι το εσωτερικό γινόμενο των $r_i(A)$ και $c_j(B)$:

$$\gamma_{ij}=r_i(A)\,c_j(B).$$

Επομένως το γινόμενο AB δίνεται από τον τύπο:

$$\Gamma=AB=\begin{bmatrix} r_1(A)c_1(B) & r_1(A)c_2(B) & \cdots & r_1(A)c_n(B)\\ r_2(A)c_1(B) & r_2(A)c_2(B) & \cdots & r_2(A)c_n(B)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ r_m(A)c_1(B) & r_m(A)c_2(B) & \cdots & r_m(A)c_n(B)\end{bmatrix}$$

Πιο αναλυτικά, για το γενικό στοιχείο γ_{ij} του γινομένου AB έχουμε:

$$\gamma_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{ip}b_{pj} \implies$$

$$\boxed{\gamma_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}}$$

Παρατήρηση 1

Αν $A \in M_{m\times p}$ και $B \in M_{p\times n}$, τότε το γινόμενο $\Gamma = AB$ είναι ένας πίνακας τύπου

$$(m\times \cancel{p})\times(\cancel{p}\times n) = m\times n.$$

Ο AB έχει ίσο αριθμό γραμμών με τον A και ίσο αριθμό στηλών με τον B.

Παρατήρηση 2

Είναι προφανές ότι το γινόμενο AB ορίζεται μόνο όταν οι A, B είναι συμβιβαστοί.

Παράδειγμα 1

Οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

είναι συμβιβαστοί ($A \in M_{2\times 3}$ και $B \in M_{3\times 3}$). Επομένως το γινόμενο AB ορίζεται και είναι ένας πίνακας τύπου

$$(2\times\cancel{3})\times(\cancel{3}\times 3) = 2\times 3$$

Αν θέσουμε $\Gamma = AB$, τότε για τα στοιχεία του Γ έχουμε:

$$\gamma_{11} = \sum_{k=1}^{3} a_{1k} b_{k1} = a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} + a_{13} b_{31} = -1+0-3 = -4$$

$$\gamma_{12} = \sum_{k=1}^{3} a_{1k} b_{k2} = a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} + a_{13} b_{32} = 0+2+3 = 5$$

$$\gamma_{13} = \sum_{k=1}^{3} a_{1k} b_{k3} = a_{11} b_{13} + a_{12} b_{23} + a_{23} b_{33} = -1+2+0 = 1$$

$$\gamma_{21} = \sum_{k=1}^{3} a_{2k} b_{k1} = a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} + a_{23} b_{31} = 0+0-1 = -1$$

$$\gamma_{22} = \sum_{k=1}^{3} a_{2k} b_{k2} = a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} + a_{23} b_{32} = 0 - 1 + 1 = 0$$

$$\gamma_{23} = \sum_{k=1}^{3} a_{2k} b_{k3} = a_{21} b_{13} + a_{22} b_{23} + a_{23} b_{33} = 0 - 1 + 0 = -1$$

Εχουμε τελικά:

$$\Gamma = AB = \begin{bmatrix} -4 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Σημειώνουμε επίσης ότι το γινόμενο BA δεν ορίζεται.

<u>Παράδειγμα 2</u>

Εστω οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Στην περίπτωση αυτή ορίζεται τόσο το γινόμενο AB όσο και το BA. Για το γινόμενο AB έχουμε:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+0+2 & -2+0-0 \\ 0+12-2 & 0+3+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}$$

Για το γινόμενο BA έχουμε:

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-0 & 0-3 & 0-1 \\ 8+0 & 0+3 & -4+1 \\ -4+0 & 0+0 & 2+0 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 8 & 3 & -3 \\ -4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι οι AB και BA είναι διαφορετικού τύπου ($AB \in M_{2\times2}$ και $BA \in M_{3\times3}$).

Παράδειγμα 3

Θεωρούμε το κάτωθι γραμμικό σύστημα m το πλήθος εξισώσεων με n το πλήθος αγνώστους $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \qquad (1)$$

Εστω $A \in M_{m\times n}$ ο πίνακας των συντελεστών

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

$X \in M_{n\times 1}$ το n-διάστατο διάνυσμα στήλης των αγνώστων

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

και $B \in M_{m\times 1}$ το m-διάστατο διάνυσμα στήλης των γνωστών σταθερών τιμών $b_1, b_2, \ldots b_m$.

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Τότε το σύστημα (1) μπορεί να γραφεί στη μορφή εξίσωσης πινάκων:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

ή ακόμα στη συντετμημένη μορφή:

$$AX = B.$$

<u>Παράδειγμα 4</u>

Εστω οι τετραγωνικοί πίνακες:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Είναι φανερό ότι αμφότερα τα γινόμενα AB και BA ορίζονται και μάλιστα είναι του ίδιου τύπου με τους A και B, δηλ. $AB, BA \in M_{3\times3}$.

Ο αναγνώστης μπορεί εύκολα να επαληθεύσει ότι

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 14 \\ 10 & 4 & 26 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad BA = \begin{bmatrix} 11 & 11 & 8 \\ 10 & 12 & 8 \\ 9 & 12 & 8 \end{bmatrix}$$

Από τα προηγούμενα παραδείγματα, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι δεν ισχύει γενικώς η αντιμεταθετική ιδιότητα για τον πολλαπλασιασμό πινάκων, δηλ.

η ισότητα $AB=BA$ δεν ισχύει πάντοτε.

Κατ' αρχήν, τα δύο γινόμενα AB και BA δεν ορίζονται πάντα (Βλ. Παράδειγμα 1). Ακόμα και όταν ορίζονται αμφότερα τα γινόμενα, δηλ. όταν

$$A \in M_{n\times p} \quad \text{και} \quad B \in M_{p\times n},$$

τότε τα γινόμενα AB, BA δεν είναι απαραιτήτως του ίδιου τύπου:

$$AB \in M_{n\times n} \quad \text{και} \quad BA \in M_{p\times p}.$$

(Βλ. Παράδειγμα 2).

Βλέπουμε ότι μόνον όταν οι A και B είναι τετραγωνικοί (του ίδιου τύπου), δηλ.

$$A, B \in M_{n\times n},$$

τα γινόμενα AB και BA είναι του ίδιου τύπου, και μάλιστα.

$$AB, BA \in M_{n\times n}.$$

Ακόμα και σ' αυτή την ειδική περίπτωση, δεν ισχύει γενικά η αντιμεταθετική ιδιότητα δηλ.

$$AB \neq BA$$

(Βλ. Παράδειγμα 4).

<u>Παράδειγμα</u>

Εστω οι τετραγωνικοί πίνακες:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Εχουμε για τα γινόμενα AB και BA:

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+0 & 0+3 \\ -1+0 & 1+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+1 & -1+2 \\ 0+3 & 0+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι $AB \neq BA$.

Ορισμός 4.3.3

Εστω δύο τετραγωνικοί πίνακες του ίδιου τύπου $A, B \in M_{n \times n}$.

(α) Αν ισχύει

$$AB = BA,$$

οι A, B λέγονται αντιμεταθέσιμοι.

(β) Αν ισχύει

$$AB = -BA,$$

οι A, B λέγονται αντι-αντιμεταθέσιμοι.

Παράδειγμα 1

Οι πίνακες $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$ είναι αντιμεταθέσιμοι για κάθε α, β, διότι

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+\beta & 0+\alpha \\ \alpha+0 & \beta+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta & \alpha \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}$$

και

$$BA = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+\beta & \alpha+0 \\ 0+\alpha & \beta+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta & \alpha \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 2

Οποιοιδήποτε διαγώνιοι n×n πίνακες είναι αντιμεταθέσιμοι. Πράγματι, για κάθε ζευγάρι τέτοιων πινάκων έχουμε

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}b_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11}a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22}a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn}a_{nn} \end{bmatrix} = BA.$$

Παράδειγμα 3

Κάθε τετραγωνικός πίνακας $A \in M_{n\times n}$ αντιμετατίθεται με το μηδενικό πίνακα $O \in M_{n\times n}$. Γιατί;

Επίσης ο $A \in M_{n\times n}$ αντιμετατίθεται με τον μοναδιαίο πίνακα $I \in M_{n\times n}$. Γιατί;

Στα επόμενα θα ορίσουμε τον αντίστροφο ενός τετραγωνικού πίνακα $A \in M_{n\times n}$ ως τον πίνακα A^{-1} που ικανοποιεί την:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Είναι φανερό ότι ο A αντιμετατίθεται με τον αντίστροφό του. Εδώ πρέπει να σημειώσουμε ότι ο αντίστροφος A^{-1} του A δεν ορίζεται πάντα.

Μια άλλη ενδιαφέρουσα παρατήρηση είναι ότι η ισότητα

$$AB = O$$

<u>δεν συνεπάγεται κατ' ανάγκη</u> ότι $A = O$ ή $B = O$. Πράγματι, για τους πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

έχουμε $A \neq O$ και $B \neq O$ αλλά

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

Επίσης, η ισότητα

$$AB = AC \quad \text{ή η} \quad BA = CA$$

<u>δεν συνεπάγεται κατ' ανάγκη</u> ότι $B = C$ και όταν ακόμη $A \neq O$.

Για παράδειγμα, όταν

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

έχουμε $B \neq C$ αλλά

$$BA = O = CA.$$

<u>Θεώρημα 4.3.4 (Ιδιότητες πολλαπλασιασμού πινάκων)</u>

(α) Προσεταιριστικός νόμος (associative law).

Αν $A \in M_{m\times n}$, $B \in M_{n\times p}$ και $C \in M_{p\times q}$, τότε

$$A(BC) = (AB)C$$

(β) Δεξιός και αριστερός επιμεριστικός νόμος (distributive law).

(i) Αν $A, B \in M_{m\times n}$ και $C \in M_{n\times p}$, τότε

$$(A+B)C = AC + BC$$

(ii) Αν $A \in M_{m\times n}$ και $B, C \in M_{n\times p}$, τότε

$$A(B+C) = AB + AC$$

(γ) Αν $A \in M_{m\times n}$, $B \in M_{n\times p}$ και $\lambda \in K$, τότε

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$$

<u>Απόδειξη</u>

(α)
$$
\begin{aligned}
A(BC) &= A_{m\times n}\left(B_{n\times p}C_{p\times q}\right) \\
&= A_{m\times n}\left(\sum_{k=1}^{p} b_{ik}c_{kj}\right)_{n\times q} \\
&= \left(\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}\sum_{k=1}^{p} b_{\ell k}c_{kj}\right)_{m\times q} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}b_{\ell k}\right)c_{kj}\right)_{m\times q} \\
&= \left(\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}b_{\ell k}\right)_{m\times p}\left(c_{kj}\right)_{p\times q} \\
&= \left(A_{m\times n}B_{n\times p}\right)C_{p\times q} = (AB)C
\end{aligned}
$$

(β) (i) $(A+B)C = (A+B)_{m\times n} C_{n\times p} \Rightarrow$

$$(A+B)C = \left(\sum_{k=1}^{n} (a_{ik}+b_{ik}) c_{kj} \right)_{m\times p}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_{kj} \right)_{m\times p} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_{ik} c_{kj} \right)_{m\times p} \Rightarrow$$

$$(A+B)C = AC + BC$$

(ii) Αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο.

(γ)

$$\lambda(AB) = \lambda \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right)_{m\times p}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} (\lambda a_{ik}) b_{kj} \right)_{m\times p} = (\lambda A) B$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} (\lambda b_{kj}) \right)_{m\times p} = A(\lambda B)$$

$\blacksquare$

<u>Πρόταση 4.3.5</u>

(α) Αν $A, B \in M_{n\times n}$, τότε

$$tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$$

(β) Αν $A \in M_{m\times n}$ και $B \in M_{n\times m}$, τότε

$$tr(AB) = tr(BA)$$

(γ) Αν $\lambda \in \mathbb{R}$ και $A \in M_{n\times n}$, τότε $tr(\lambda A) = \lambda\, tr(A)$

<u>Απόδειξη</u>

(α) $tr(A+B) = \sum_{i=1}^{n} (a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$$

(β) Παρατηρούμε ότι τα γινόμενα AB, BA είναι τετραγωνικοί πίνακες όχι κατ' ανάγκη του ίδιου τύπου:

$$AB = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right)_{m \times m} \quad \text{και}$$

$$BA = \left(\sum_{i=1}^{m} b_{ki} a_{ij} \right)_{n \times n}$$

(Η χρήση διαφορετικών δεικτών είναι φυσικά επιτρεπτή!).
Εχουμε τώρα για τα ίχνη των AB και BA.

$$tr(AB) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} \right) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}$$

και

$$tr(BA) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} b_{ki} a_{ik} \right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} b_{ki} a_{ik}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} = tr(AB).$$

(γ) $tr(\lambda A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda a_{ii} = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \lambda \, tr(A)$ ■

Πρόταση 4.3.6

(α) Αν $A, I \in M_{n\times n}$ τότε

$$AI = IA = A$$

(β) Αν $A \in M_{n\times n}$ και O είναι ο μηδενικός $n\times n$ πίνακας, τότε

$$AO = OA = O$$

Απόδειξη.

(α)

$$AI = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\delta_{kj}\right) = (a_{ij}\,\delta_{jj}) = (a_{ij}) = A$$

Παρομοίως βρίσκουμε ότι $IA = A$.

(β)

$$AO = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} O_{kj}\right) = (O_{ij}) = O$$

Παρομοίως βρίσκουμε ότι $OA = O$.

Δίνουμε τώρα τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 4.3.7

Ενας διανυσματικός χώρος V πάνω σ' ένα σώμα K, στον οποίο έχει οριστεί ένας πολλαπλασιασμός "$\cdot$" που σε κάθε ζεύγος $(x,y)\in V\times V$ αντιστοιχεί ακριβώς ένα στοιχείο $x\cdot y \in V$ ονομάζεται άλγεβρα πάνω στο K, αν για κάθε $x,y,z\in V$ και $\lambda \in K$ ισχύουν οι ιδιότητες:

(i) $(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$

(ii) $x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z$,
$(y+z)\cdot x = y\cdot x + z\cdot x$

(iii) $\lambda(x\cdot y) = (\lambda x)\cdot y = x\cdot(\lambda y)$.

Αν υπάρχει ένα στοιχείο $e \in V$ τέτοιο ώστε $\forall x \in V$ να ισχύει

$$x \cdot e = e \cdot x = x,$$

αυτό είναι μοναδικό και ονομάζεται το <u>μοναδιαίο στοιχείο</u> της άλγεβρας.

Από το Θ. 4.3.4 προκύπτει η παρακάτω πρόταση.

<u>Πρόταση 4.3.8</u>
Ο χώρος $M_{n \times n}(K)$ είναι μια άλγεβρα πάνω στο K.

Το μοναδιαίο στοιχείο της άλγεβρας $M_{n \times n}$ είναι προφανώς ο μοναδιαίος $n \times n$ πίνακας I:

$$AI = IA = A.$$

Αν σε μια άλγεβρα ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα για την πράξη του πολλαπλασιασμού τότε λέμε ότι έχουμε μια <u>μεταθετική άλγεβρα</u>.

Είδαμε στα προηγούμενα ότι δεν ισχύει, γενικά, η αντιμεταθετική ιδιότητα στον πολλαπλασιασμό πινάκων. Έτσι, η άλγεβρα $M_{n \times n}$ δεν είναι μεταθετική.

4.4 ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ

Ορισμός 4.4.1

Εστω δύο τετραγωνικοί πίνακες του ίδιου τύπου: $A, B \in M_{n \times n}$. Ο B λέγεται αντίστροφος (inverse) του A αν

$$AB = BA = I$$

Ορισμός 4.4.2

Αν ο τετραγωνικός πίνακας $A \in M_{n \times n}$ έχει αντίστροφο, τότε λέγεται αντιστρέψιμος (invertible) ή ομαλός ή μή-ιδιάζων (non-singular).

Στην αντίθετη περίπτωση, λέμε ότι ο A είναι μη αντιστρέψιμος ή μη ομαλός ή ιδιάζων.

Πρόταση 4.4.3

Ο αντίστροφος ενός αντιστρέψιμου πίνακα $A \in M_{n \times n}$ είναι μοναδικός

Απόδειξη

Εστω B, C δύο αντίστροφοι του A, οπότε

$$CA = I \Rightarrow CAB = IB = B \Rightarrow C(AB) = B \Rightarrow$$

$$CI = B \Rightarrow C = B.$$

Αρα ο αντίστροφος του A είναι μοναδικός. ∎

Συμβολισμός

Ο μοναδικός αντίστροφος ενός αντιστρέψιμου πίνακα A συμβολίζεται με A^{-1}, δηλ.

$$\boxed{AA^{-1} = A^{-1}A = I} \qquad (4.4.1)$$

Παρατήρηση 1

Μπορεί να δειχθεί ότι η

$$AA^{-1} = I \quad \text{συνεπάγεται ότι} \quad A^{-1}A = I$$

Συνεπώς, για να εξακριβωθεί εάν ο πίνακας B είναι ο αντίστροφος του A, αρκεί ο υπολογισμός μόνο ενός από τα γινόμενα AB, BA.

Παρατήρηση 2

Είναι φανερό από την (4.4.1) ότι

$$\boxed{\left(A^{-1}\right)^{-1} = A} \qquad (4.4.2)$$

Το σύνολο των αντιστρέψιμων πινάκων της άλγεβρας $M_{n\times n}$ δεν είναι κενό, γιατί ο μοναδιαίος πίνακας I_n είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφος είναι ο εαυτός του: $II = I$.

Με τον καθορισμό κριτηρίων αντιστρεψιμότητας ενός πίνακα και με τις τεχνικές εύρεσης του αντίστροφου θα ασχοληθούμε σε επόμενο κεφάλαιο.

<u>Παράδειγμα 1</u>

Ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}1&3&3\\1&4&3\\1&3&4\end{bmatrix}$ έχει αντίστροφο τον $B=\begin{bmatrix}7&-3&-3\\-1&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$

Πράγματι,

$$AB=\begin{bmatrix}1&3&3\\1&4&3\\1&3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7&-3&-3\\-1&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7-3-3&-3+3+0&-3+0+3\\7-4-3&-3+4+0&-3+0+3\\7-3-4&-3+3+0&-3+0+4\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=I$$

<u>Παράδειγμα 2</u>

Ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$ δεν είναι αντιστρέψιμος.

Πράγματι, αν ήταν

$$\begin{bmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\Longleftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix}\alpha&\alpha\\\gamma&\gamma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},$$

θα έπρεπε $\alpha=1$ και $\alpha=0$, που είναι αδύνατο.

Η επόμενη πρόταση μας λέει ότι αν μια γραμμή ή μια στήλη ενός τετραγωνικού πίνακα είναι μηδενική, τότε ο πίνακας δεν είναι αντιστρέψιμος.

<u>Πρόταση 4.4.4</u>

Αν ο $A\in M_{n\times n}$ έχει μια γραμμή (αντίστοιχα στήλη) μηδενική δεν είναι αντιστρέψιμος.

<u>Απόδειξη</u>

Εστω ότι η γραμμή i (αντίστοιχα η στήλη j) του

$A=(a_{ij})$ είναι μηδενική. Υποθέτουμε ότι ο A έχει αντίστροφο, δηλαδή, υπάρχει πίνακας $B=(b_{ij})\in M_{n\times n}$ τέτοιος ώστε

$$AB=BA=I.$$

Ο πίνακας AB (αντίστοιχα BA) έχει τη γραμμή i (αντίστοιχα τη στήλη j) μηδενική γιατί

$$\gamma_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}=\sum_{k=1}^{n} 0\cdot b_{kj}=0, \quad j=1,2,\dots,n$$

(αντίστοιχα,

$$\gamma_{ij}=\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj}=\sum_{k=1}^{n} b_{ik}\cdot 0=0, \quad i=1,2,\dots,n \text{)}.$$

Συνεπώς $AB\neq I$ (αντίστοιχα $BA\neq I$). Άρα ο A δεν είναι αντιστρέψιμος. ■

Θεώρημα 4.4.5

Αν οι $A,B\in M_{n\times n}$ είναι αντιστρέψιμοι, τότε ο AB είναι επίσης αντιστρέψιμος και

$$\boxed{(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}.}$$

Απόδειξη

Αφήνεται ως άσκηση. □

Θεώρημα 4.4.6

Αν ο $A \in M_{n \times n}$ είναι αντιστρέψιμος και $B, \Gamma, O \in M_{n \times p}$, τότε:

(α) $AB = \Gamma \implies B = A^{-1}\Gamma$

(β) $AB = A\Gamma \implies B = \Gamma$

(γ) $AB = O \implies B = O$

Απόδειξη

Αφήνεται ως άσκηση. $\square$

4.5 ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΠΙΝΑΚΑ

Ο ορισμός του γινομένου δύο πινάκων μας δίνει τη δυνατότητα να ορίσουμε τη δύναμη A^r ενός τετραγωνικού πίνακα A για κάθε μη αρνητικό ακέραιο εκθέτη r:

$$\boxed{A^0 = I \quad \text{και} \quad A^r = A^{r-1} A \;,\; r = 1, 2, \dots} \qquad (4.5.1)$$

Ετσι έχουμε:

$$\begin{aligned} A^1 &= A^0 A = I A = A \\ A^2 &= A^1 A = A A \\ &\;\vdots \\ A^r &= A^{r-1} A = \underbrace{A A \cdots A}_{r \text{ φορές}} . \end{aligned}$$

Οι παρακάτω ιδιότητες αποδεικνύονται πολύ εύκολα.

$A^r A^s = A^{r+s}$	, r, s μη αρνητικοί ακέραιοι	(4.5.2)
$(A^r)^s = A^{rs}$	, r, s μη αρνητικοί ακέραιοι	(4.5.3)

Παράδειγμα

Θα βρούμε τη νιοστή δύναμη του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} .$$

Εχουμε

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^3 & 3a^2 b \\ 0 & a^3 \end{bmatrix}$$

Θα αποδείξουμε επαγωγικά ότι

$$A^n = \begin{bmatrix} a^n & n a^{n-1} b \\ 0 & a^n \end{bmatrix}$$

Υποθέτοντας ότι ο πιο πάνω τύπος ισχύει για τον φυσικό n, παίρνουμε

$$A^{n+1} = A^n A = \begin{bmatrix} a^n & n a^{n-1} b \\ 0 & a^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A^{n+1} = \begin{bmatrix} a^{n+1} & (n+1) a^n b \\ 0 & a^{n+1} \end{bmatrix}.$$

Η σχέση αληθεύει και για τον $n+1$, άρα και για κάθε φυσικό αριθμό.

Ο ορισμός του αντίστροφου πίνακα μας δίνει τη δυνατότητα να γενικεύσουμε τον ορισμό της δυνάμεως αντιστρέψιμου πίνακα για κάθε αρνητική τιμή του εκθέτη, σύμφωνα προς τον τύπο:

$$\boxed{A^{-r} = (A^{-1})^r, \qquad r = 2, 3, \ldots} \qquad (4.5.4).$$

Σύμφωνα με τον πιο πάνω τύπο, έχουμε:

$$A^{-2} = (A^{-1})(A^{-1}) = A^{-1} A^{-1}$$

$$\vdots$$

$$A^{-r} = \underbrace{A^{-1} A^{-1} \cdots A^{-1}}_{r \text{ φορές}}$$

Από την ιδιότητα

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1},$$

προκύπτει ότι

$$A^{-r} = (\underbrace{A\,A \cdots A}_{r \text{ φορές}})^{-1} \Rightarrow$$

$$\boxed{A^{-r} = (A^{r})^{-1}} \qquad (4.5.5)$$

Ο πιο πάνω τύπος μας λέει ότι ο αντίστροφος του $A^r = AA\cdots A$ είναι ο $A^{-r} = A^{-1}A^{-1}\cdots A^{-1}$.

Για παράδειγμα ο αντίστροφος του $A^3 = AAA$ είναι ο $A^{-3} = A^{-1}A^{-1}A^{-1}$. Πράγματι,

$$A^3A^{-3} = AAAA^{-1}A^{-1}A^{-1} = AAIA^{-1}A^{-1} = AAA^{-1}A^{-1}$$
$$= AIA^{-1} = AA^{-1} = I.$$

Συνδυάζοντας τις (4.5.4)-(4.5.5) έχουμε:

$$\boxed{A^{-r} = (A^{-1})^{r} = (A^{r})^{-1}, \quad r = 2, 3, \ldots} \qquad (4.5.6)$$

Στηριζόμενοι στους ανωτέρω τύπους, μπορούμε να γενικεύσουμε τους τύπους (4.5.2), (4.5.3), στην περίπτωση που ο A είναι αντιστρέψιμος, για κάθε ακέραια τιμή των r, s.

<u>Πρόταση 4.5.1</u>

Αν ο $A \in M_{n\times n}$ είναι αντιστρέψιμος και οι r, s ακέραιοι, τότε:

(i) $A^rA^s = A^{r+s}$, (ii) $(A^r)^s = A^{rs}$

Ορισμός 4.5.2

Ο τετραγωνικός πίνακας $A \in M_{n \times n}$

(α) λέγεται <u>αδύναμος</u> (idempotent) αν

$$A^2 = A$$

(β) λέγεται <u>μηδενοδύναμος</u> (nilpotent) αν υπάρχει φυσικός αριθμός r τέτοιος ώστε να είναι

$$A^r = O.$$

Εαν r_0 είναι ο ελάχιστος φυσικός για τον οποίο είναι $A^{r_0} = O$, τότε λέμε ότι ο A είναι <u>μηδενοδύναμος δείκτη r_0</u>.

(γ) λέγεται <u>ενελικτικός</u> (involutoric) αν

$$A^2 = I$$

<u>Παρατήρηση</u>: Αν ο A είναι αδύναμος, δηλ. $A^2 = A$, τότε

$$A^3 = A^2 A = A \cdot A = A^2 = A$$

και γενικά

$$A^r = A, \quad r = 1, 2, \ldots$$

<u>Παράδειγμα</u>

Εστω οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Για τον A έχουμε:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-1 & 1-1 \\ -1+1 & -1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

Αρα ο A είναι μηδενοδύναμος δείκτη 2.

Για τον B έχουμε:

$$B^2 = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16-12 & -8+6 \\ 24-18 & -12+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} = B.$$

Αρα ο B είναι αδύναμος.

Για τον Γ έχουμε:

$$\Gamma^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Αρα ο Γ είναι ενελικτικός.

4.6 ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

Ορισμός 4.6.1

Ανάστροφος (transpose) ενός πίνακα $A \in M_{m\times n}$ ονομάζεται ο $n\times m$ πίνακας που έχει γραμμές τις στήλες του A και στήλες τις γραμμές του A. Αναλυτικά, αν $A=(a_{ij})_{m\times n}$, τότε ο ανάστροφος του A, που θα συμβολίζεται με A^T, είναι ο πίνακας

$$A^T=(a_{ji}) \in M_{n\times m}$$

Παράδειγμα

Εστω οι πίνακες

$$A=\begin{bmatrix} 1+i & 2-3i & 5 \\ 3i & 2+2i & 0 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \Gamma=\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Οι ανάστροφοί τους είναι οι:

$$A^T=\begin{bmatrix} 1+i & 3i \\ 2-3i & 2+2i \\ 5 & 0 \end{bmatrix}, \quad B^T=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \Gamma^T=\begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι ο ανάστροφος ενός πίνακα γραμμής είναι πίνακας στήλης και αντίστροφα.

Παρατήρηση

Εστω $A=(a_{ij})_{m\times n}$ ένας πίνακας. Τότε για τον ανάστροφό του έχουμε

$$A^T=(a'_{ij})_{n\times m} \quad \text{όπου} \quad a'_{ij}=a_{ji}$$

Θεώρημα 4.6.2

Εστω ένας πίνακας $A \in M_{m \times n}$. Τότε

(α) $(A^T)^T = A$

(β) $(A+B)^T = A^T + B^T$, $B \in M_{m \times n}$

(γ) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$, $\lambda \in K$.

(δ) $(AB)^T = B^T A^T$, $B \in M_{n \times p}$

Απόδειξη

Η απόδειξη των (α)-(γ) είναι απλή και αφήνεται ως άσκηση.

(δ). Εστω $A = (a_{ij})_{m \times n}$ και $B = (b_{ij})_{n \times p}$ οπότε

$$A^T = (a'_{ij})_{n \times m} \quad \text{όπου} \quad a'_{ij} = a_{ji}$$

και

$$B^T = (b'_{ij})_{p \times n} \quad \text{όπου} \quad b'_{ij} = b_{ji}$$

Για το γινόμενο AB έχουμε:

$$AB = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right)_{m \times p} \quad \text{οπότε} \quad (AB)^T = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki} \right)_{p \times m}$$

Εχουμε τώρα για το $B^T A^T$:

$$B^T A^T = \left(\sum_{k=1}^{n} b'_{ik} a'_{kj} \right)_{p \times m} = \left(\sum_{k=1}^{n} b_{ki} a_{jk} \right)_{p \times m} \Longrightarrow$$

$$B^T A^T = (AB)^T \quad \square$$

Αν οι πίνακες

$$A_1, A_2, \ldots, A_k$$

είναι συμβιβαστοί ως προς τον πολλαπλασιασμό (με τη σειρά που δίνονται), μπορούμε επαγωγικά να γενικεύσουμε την ιδιότητα (δ) του Θ. 4.6.2:

$$(A_1 A_2 \cdots A_k)^T = A_k^T \, A_{k-1}^T \cdots A_2^T \, A_1^T$$

Πρόταση 4.6.3

Εστω ο πίνακας $A \in M_{n \times n}$. Ο A^T είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν ο A είναι αντιστρέψιμος. Επιπλέον

$$\boxed{(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T}.$$

Απόδειξη

Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Αναστρέφοντας την πιο πάνω σχέση παίρνουμε:

$$(AA^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I^T \Longrightarrow$$

$$(A^{-1})^T A^T = A^T (A^{-1})^T = I$$

Εφόσον ο αντίστροφος του A^T είναι μοναδικός $\Longrightarrow$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

Ομοια αποδεικνύεται και το αντίστροφο. ■

Η πρόταση 4.6.3 μπορεί να γενικευθεί επαγωγικά.

Πρόταση 4.6.3 (Γενίκευση)

Αν ο πίνακας $A \in M_{n \times n}$ είναι αντιστρέψιμος και ο r ακέραιος τότε

$$\boxed{(A^r)^T = (A^T)^r}$$

Σημείωση

Το πιο πάνω αποτέλεσμα ισχύει και όταν ο A δεν είναι αντιστρέψιμος αλλά μόνο για μη αρνητικό r.

Ορισμός 4.6.4

Ο τετραγωνικός πίνακας A καλείται συμμετρικός (symmetric) αν

$$A^T = A$$

(δηλ. αν $a_{ij} = a_{ji}$) και αντισυμμετρικός (skew symmetric) αν

$$A^T = -A$$

(δηλ. αν $a_{ij} = -a_{ji}$).

Παράδειγμα 1

Ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} x & \alpha & \beta \\ \alpha & y & \gamma \\ \beta & \gamma & z \end{bmatrix}$ είναι συμμετρικός και

ο $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ είναι αντισυμμετρικός.

Παράδειγμα 2

Ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & \beta \\ \alpha & 0 & -3 \\ 2 & \gamma & 0 \end{bmatrix}$ είναι αντισυμμετρικός

όταν $\alpha = 1$, $\beta = -2$ και $\gamma = 3$.

Παρατήρηση

Όλα τα διαγώνια στοιχεία ενός αντισυμμετρικού πίνακα είναι μηδέν.

Κάθε τετραγωνικός πίνακας A μπορεί να γραφεί ως άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού πίνακα;

$$\boxed{A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)}$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι ο $\frac{1}{2}(A + A^T)$ είναι συμμετρικός και ο $\frac{1}{2}(A - A^T)$ είναι αντισυμμετρικός.

Ορισμός 4.6.5

Ο τετραγωνικός πίνακας A καλείται ορθογώνιος (orthogonal) αν

$$AA^T = A^T A = I$$

Είναι φανερό ότι ο αντίστροφος ενός ορθογώνιου πίνακα είναι ο ανάστροφός του:

$$A^{-1} = A^T$$

Παράδειγμα

Ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$

είναι ορθογώνιος γιατί

$$AA^T=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos^2\theta+\sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta-\cos\theta\sin\theta\\ \sin\theta\cos\theta-\cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta+\cos^2\theta\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I$$

Ως γνωστό ο συζυγής $\bar{z}$ ενός μιγαδικού αριθμού $z=x+yi$

είναι ο

$$\bar{z}=x-yi.$$

Ορισμός 4.6.6

(α) Καλούμε <u>συζυγή</u> (conjugate) του πίνακα $A=(a_{ij})_{m\times n}$ και τον συμβολίζουμε με $\bar{A}$ τον πίνακα

$$\bar{A}=(\overline{a_{ij}})_{m\times n}$$

(β) Καλούμε <u>αναστροφοσυζυγή</u> (Hermitian transpose ή tranjugate) του A, και τον συμβολίζουμε με A^*, τον πίνακα

$$A^*=(\bar{A})^T=\overline{A^T}$$

Ορισμός 4.6.7

Ο τετραγωνικός πίνακας A λέμε ότι είναι <u>ερμιτιανός</u> (Hermitian) αν ισχύει

$$A^* = A.$$

Αν ισχύει

$$A^* = -A$$

τότε λέμε ότι ο A είναι <u>αντιερμιτιανός</u> (anti-Hermitian)

Παρατηρήσεις

(1) Ο πίνακας A είναι πραγματικός αν και μόνο αν

$$\bar{A} = A$$

(2) Ο πίνακας A είναι καθαρώς φανταστικός αν και μόνο αν

$$\bar{A} = -A$$

(3) Αν ο τετραγωνικός πίνακας A είναι πραγματικός ($\bar{A} = A$) τότε ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$A^* = A \iff A^T = A$$

και

$$A^* = -A \iff A^T = -A.$$

Αυτό σημαίνει ότι κάθε πραγματικός ερμιτιανός πίνακας είναι συμμετρικός και κάθε πραγματικός αντιερμιτιανός πίνακας είναι αντισυμμετρικός.

Παράδειγμα 1

Εστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & 2 & i & 5+3i \\ 3i & -1-i & 1+3i & 2 \\ -2 & 0 & -3i & 1+i \end{bmatrix}.$$

Θα βρούμε τον ανάστροφο A^T, τον συζυγή $\bar{A}$ και τον αναστροφοσυζυγή A^*.

$$A^T = \begin{bmatrix} 1+i & 3i & -2 \\ 2 & -1-i & 0 \\ i & 1+3i & -3i \\ 5+3i & 2 & 1+i \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1-i & 2 & -i & 5-3i \\ -3i & -1+i & 1-3i & 2 \\ -2 & 0 & 3i & 1-i \end{bmatrix}$$

$$A^* = (\bar{A})^T = \begin{bmatrix} 1-i & -3i & -2 \\ 2 & -1+i & 0 \\ -i & 1-3i & 3i \\ 5-3i & 2 & 1-i \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 2

Ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & 2+3i \\ 1-i & 2 & -i \\ 2-3i & i & 0 \end{bmatrix}$$

είναι ερμιτιανός ενώ ο

$$B = \begin{bmatrix} i & 1+i & 2-3i \\ -1+i & 2i & 1 \\ -2-3i & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

είναι αντιερμιτιανός.

Παράδειγμα 3

Ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 0 & 1-i & 2 \\ x & 3i & 2+3i \\ y & z & i \end{bmatrix}$

είναι αντιερμιτιανός όταν $x=-1-i$, $y=-2$ και $z=-2+3i$.

Παρατήρηση

Τα διαγώνια στοιχεία ενός ερμιτιανού πίνακα είναι όλα πραγματικοί ενώ τα διαγώνια στοιχεία ενός αντιερμιτιανού πίνακα είναι όλα καθαρώς φανταστικοί.

Θεώρημα 4.6.8

Αν είναι $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ και $\kappa \in \mathbb{C}$, τότε

(α) $\overline{\overline{A}} = A$

(β) $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$, $B \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$

(γ) $\overline{\kappa A} = \overline{\kappa}\, \overline{A}$

(δ) $\overline{AB} = \overline{A}\, \overline{B}$, $B \in M_{n\times p}(\mathbb{C})$

(ε) $(\overline{A})^T = (\overline{A^T})$

Απόδειξη: Απλή. Αφήνεται ως άσκηση. □

Θεώρημα 4.6.9

Αν είναι $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ και $\kappa \in \mathbb{C}$, τότε

(α) $(A^*)^* = A$

(β) $(A+B)^* = A^* + B^*$, $B \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$

(γ) $(\kappa A)^* = \overline{\kappa}\, A^*$

(δ) $(AB)^* = B^* A^*$, $B \in M_{n\times p}(\mathbb{C})$

Απόδειξη: (α) και (β). Αφήνεται ως άσκηση.

(γ) $(\kappa A)^* = (\overline{\kappa A})^T = (\overline{\kappa}\, \overline{A})^T = \overline{\kappa}\, (\overline{A})^T = \overline{\kappa}\, A^*$

(δ) $(AB)^* = (\overline{AB})^T = (\overline{A}\, \overline{B})^T = (\overline{B})^T (\overline{A})^T = B^* A^*$ □

4.7 ΣΥΝΘΕΤΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

Στην παράγραφο αυτή εξετάζουμε πίνακες των οποίων τα στοιχεία είναι πίνακες. Για παράδειγμα, ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{23} & a_{24} & a_{25} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

όπου

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{23} & a_{24} & a_{25} \end{bmatrix}, \quad A_{21} = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

και $A_{22} = \begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{bmatrix}$.

Καλούμε <u>σύνθετο πίνακα</u> (block or partitioned matrix), ένα πίνακα που έχει ως στοιχεία του πίνακες.

Ενας σύνθετος πίνακας προκύπτει, εάν διαμερίσουμε έναν (απλό) πίνακα σε υποπίνακες, χρησιμοποιώντας οριζόντιες και κατακόρυφες γραμμές, π.χ.

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc|c} 2 & 1 & 0 & 3 & -5 \\ -1 & 2 & -2 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & -1 \\ \hline 1 & -3 & 4 & 0 & 7 \end{array}\right].$$

Με την πιο πάνω διαμέριση ο πίνακας A μπορεί να γραφεί ως σύνθετος πίνακας:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix}$$

όπου

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_{13} = \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{23} = \begin{bmatrix} 7 \end{bmatrix}$$

Οι πράξεις με σύνθετους πίνακες ορίζονται ακριβώς όπως και οι πράξεις με απλούς πίνακες, χρησιμοποιώντας τους υποπίνακες ως απλά στοιχεία. Βεβαίως οι πράξεις ορίζονται μόνον αν οι αντίστοιχοι υποπίνακες είναι συμβιβαστοί.

Πρόσθεση σύνθετων πινάκων

Εστω δύο σύνθετοι πίνακες του ίδιου τύπου:

$$A = (A_{ij}) \qquad \text{και} \qquad B = (B_{ij}).$$

Οι A και B είναι συμβιβαστοί ως προς την πρόσθεση εφόσον οι A_{ij} και B_{ij} είναι του ίδιου τύπου για κάθε i, j. Εχουμε τότε

$$A + B = (A_{ij} + B_{ij})$$

Παράδειγμα

Εαν

$$A = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5 & -2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -3 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

τότε

$$A+B=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \\ [3]+[-5] & [5 \ \ -2]+[-3 \ \ 0] \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$A+B=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \\ [-2] & [2 \ \ -2] \end{bmatrix}$$

<u>Βαθμωτός πολλαπλασιασμός</u>

Αν ο $A=(A_{ij})$ είναι ένας σύνθετος πίνακας και $\lambda \in K$, τότε

$$\lambda A = (\lambda A_{ij}).$$

<u>Πολλαπλασιασμός σύνθετων πινάκων</u>

Για να είναι δύο σύνθετοι πίνακες $A=(A_{ij})$ και $B=(B_{ij})$ συμβιβαστοί ως προς τον πολλαπλασιασμό πρέπει αφενός να προέρχονται από συμβιβαστούς απλούς πίνακες και, αφετέρου, να έχουν διαμεριστεί έτσι ώστε η διαμέριση των στηλών του A να είναι ίδια με τη διαμέριση των γραμμών του B.

<u>Παράδειγμα</u>

Εστω ο σύνθετος πίνακας

$$A=\begin{bmatrix} (A_{11})_{k\times m} & (A_{12})_{k\times n} \\ (A_{21})_{\ell\times m} & (A_{22})_{\ell\times n} \end{bmatrix}$$

που προέρχεται από ένα απλό πίνακα τύπου $(k+\ell)\times(m+n)$.

Ο σύνθετος πίνακας

$$B = \begin{bmatrix} (B_{11})_{m \times p} \\ (B_{21})_{n \times p} \end{bmatrix}$$

προέρχεται από ένα απλό πίνακα τύπου $(m+n) \times p$ και είναι συμβιβαστός με τον A. Εχουμε για το γινόμενο AB:

$$AB = \begin{bmatrix} (A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21})_{k \times p} \\ (A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21})_{\ell \times p} \end{bmatrix}.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

4.1 Αν είναι

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

να υπολογιστούν οι κάτωθι πίνακες:

(α) $A+B+\Gamma$ (β) $2A-\Gamma$ (γ) $2B+3\Gamma$

4.2 Να δειχθεί ότι οι παρακάτω πίνακες είναι ορθογώνιοι:

(α) $$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(β) $$B = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

4.3 Να δειχθεί ότι αν ο B είναι αντιστρέψιμος, τότε

$$AB^{-1} = B^{-1}A \quad \text{αν και μόνο αν} \quad AB = BA.$$

4.4 Αν οι A και B είναι αντιστρέψιμοι πίνακες, να δειχθούν τα εξής:

(α) $$(A^{-1}+B^{-1})^{-1} = A\,(A+B)^{-1}\,B$$

(β) $$(I+AB)^{-1}A = A\,(I+BA)^{-1}$$

(γ) $$(A+BB^{T})^{-1}B = A^{-1}B\,(I+B^{T}A^{-1}B)^{-1}$$

4.5 Να δειχθεί ότι ο πίνακας

$$A=\begin{bmatrix} 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ \cos\varphi & -\sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi \\ \sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi & -\cos\theta\cos\varphi \end{bmatrix}$$

είναι ορθογώνιος.

4.6 Αν είναι

$$\sigma_1=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2=\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \sigma_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

να δειχθούν τα εξής:

(α) $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma_3^2=I$

(β) $\sigma_1\sigma_2=-\sigma_2\sigma_1=i\sigma_3$
$\sigma_2\sigma_3=-\sigma_3\sigma_2=i\sigma_1$
$\sigma_3\sigma_1=-\sigma_1\sigma_3=i\sigma_2$

(γ) $(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2=3I$

4.7 Εστω ο πίνακας $S=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

(α) Να δειχθεί ότι ο S είναι ορθογώνιος.

(β) Αν είναι $P=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, να δειχθεί ότι ο SPS^T είναι διαγώνιος.

4.8 Αν είναι

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$$

να δείξετε ότι $S\bar{S}^T = I$.
[Σημείωση: πίνακες που ικανοποιούν την πιο πάνω συνθήκη καλούνται ορθομοναδιαίοι (unitary)].

4.9 Να βρεθούν όλοι οι 2x2 πίνακες που αντιμετατίθενται με τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.10 Να δειχθεί ότι το σύνολο W των 2x2 πινάκων που αντιμετατίθενται με τον $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$, $a \neq 0$ και $b \neq 0$, είναι ένας υπόχωρος του M_{2x2}.
Να βρεθεί επίσης μια βάση του W. Ποιά είναι η $\dim W$;

4.11 [illegible]

4.12 Αν είναι $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, να βρεθεί ο A^n, όπου n φυσικός.

4.13 Αν οι πίνακες A, B είναι συμμετρικοί, να δείξετε ότι και ο $(AB+BA)$ είναι συμμετρικός.

4.14 Αν είναι $A, B \in M_{n\times n}$, να δείξετε ότι οι πιο κάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(α) Οι A, B είναι αντιμεταθέσιμοι.

(β) Οι $(A-\lambda I)$, $(B-\lambda I)$ είναι αντιμεταθέσιμοι για κάθε λ.

4.15 Να δειχθεί ότι αν $A, B \in M_{n\times n}$, τότε η

$$AB - BA = I$$

είναι αδύνατη.

4.16 Να δειχθεί ότι αν οι A, B είναι αδύναμοι, τότε οι κάτωθι προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(α) Ο $A+B$ είναι αδύναμος

(β) $AB = BA = O$

4.17 Εστω οι $A, B \in M_{n\times n}$. Να δειχθεί ότι αν

$$AB + A + I = O$$

τότε ο A είναι αντιστρέψιμος και

$$A^{-1} = -(I+B).$$

4.18 Να αποδειχθεί το Θ. 4.4.6.

4.19 Να δειχθεί ότι αν

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

τότε

$$A(\theta)A(\varphi) = A(\theta+\varphi).$$

4.20 Αν είναι

$$A=\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -9 & -5 \end{bmatrix},$$

να δειχθεί ότι για κάθε ακέραιο n ισχύει

$$A^n = \begin{bmatrix} 1+6n & 4n \\ -9n & 1-6n \end{bmatrix}$$

4.21 Αν είναι

$$A=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

να δειχθεί ότι για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει

$$A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$$

4.22 Αν $A \in M_{n\times n}$, να δειχθούν τα εξής:

(α) Ο $A^T A$ είναι συμμετρικός

(β) Ο $(A+A^T)$ είναι συμμετρικός και ο $(A-A^T)$ αντισυμμετρικός.

(γ) Ο A μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού πίνακα κατά μοναδικό τρόπο.

4.23 Εστω οι πίνακες $A=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ και $B=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

(α) Να επιβεβαιωθεί ότι $B^{-1} = (1/3)B$.

(β) Να δειχθεί ότι ο $B^{-1}AB$ είναι διαγώνιος.

(γ) Να βρεθεί ο A^n, όπου n φυσικός αριθμός.

4.24 Εστω ο πίνακας

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

(α) Να δειχθεί ότι ο A είναι ενελικτικός.

(β) Αν είναι

$$P = AM_1A \quad \text{και} \quad Q = AM_2A,$$

όπου M_1, M_2 τυχόντες διαγώνιοι 4×4 πίνακες, να δειχθεί ότι

$$PQ = QP.$$

4.25 Αν $A, B \in M_{n\times n}$ και ο A είναι αντιστρέψιμος, να δειχθεί ότι:

$$(A+B)A^{-1}(A-B) = (A-B)A^{-1}(A+B)$$

4.26 Αν $A \in M_{n\times n}$ και οι $\lambda, \mu \in K$ είναι τέτοιοι ώστε οι πίνακες $(A-\lambda I)$ και $(A-\mu I)$ να είναι αντιστρέψιμοι, να δειχθεί ότι:

$$(\mu-\lambda)(A-\lambda I)^{-1}(A-\mu I)^{-1} = (A-\mu I)^{-1} - (A-\lambda I)^{-1}.$$

4.27 [illegible]

4.28 Εστω ένας συμμετρικός πίνακας $A \in M_{n \times n}$ και ένας αντισυμμετρικός πίνακας $B \in M_{n \times n}$. Αν ο $(A+B)$ είναι αντιστρέψιμος και

$$C = (A+B)^{-1}(A-B)$$

να δειχθούν τα εξής:

(α) $C^T(A+B)C = A+B$

(β) $C^T(A-B)C = A-B$

4.29 Αν οι A, B είναι αντιμεταθέσιμοι και αντιστρέψιμοι, να δειχθούν τα εξής:

(α) $AB^{-1} = B^{-1}A$

(β) $A^{-1}B = BA^{-1}$

(γ) $A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

4.30 Να βρεθεί η γενική μορφή του πραγματικού $n \times n$ πίνακα ο οποίος αντιμετατίθεται με τον πίνακα

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4.31 Εστω ένας συμμετρικός πίνακας A και ένας αντισυμμετρικός B. Αν οι A, B είναι αντιμεταθέσιμοι και ο $(A+B)$ είναι αντιστρέψιμος, να δειχθεί ότι ο πίνακας

$$(A+B)^{-1}(A-B)$$

είναι ορθογώνιος.

4.32 Να δειχθεί ότι, αν ο $I+SA$ είναι αντιστρέψιμος, όπου A συμμετρικός πίνακας και S αντισυμμετρικός, τότε ο πίνακας

$$L = (I-SA)(I+SA)^{-1}$$

είναι τέτοιος ώστε

$$L^T A L = A.$$

Αντίστροφα, αν είναι $L^T A L = A$, όπου ο A είναι συμμετρικός και οι $I+L$, A είναι αντιστρέψιμοι, να δειχθεί ότι ο

$$S = (I+L)^{-1}(I-L)A^{-1}$$

είναι αντισυμμετρικός.

4.33 Αν

$$A(a) = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2/2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

να δειχθεί ότι $A(a)A(b) = A(a+b)$. Στη συνέχεια, να βρεθεί ο αντίστροφος του $A(a)$. Επίσης να δειχθεί ότι

$$A(3a) - 3A(2a) + 3A(a) = I.$$

4.34 Να δειχθεί ότι κάθε 2×2 πίνακας X, για τον οποίο έχουμε

$$X^T A X = B,$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

έχει μια από τις δύο μορφές:

$$\begin{bmatrix} a & \frac{1}{2a} \\ a & -1/2a \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{bmatrix} a & 1/2a \\ -a & 1/2a \end{bmatrix}.$$

4.35 Να βρεθούν όλοι οι πίνακες X, οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση

$$X^T X = 2I \qquad (X \in M_{2\times 2}).$$

4.36 Αν ο A είναι ένας πραγματικός πίνακας, να βρεθεί το $tr(A^T A)$ συναρτήσει των στοιχείων του A. Κατόπιν, να δειχθεί ότι αν οι A, B είναι πραγματικοί συμμετρικοί πίνακες και ο C αντισυμμετρικός, τότε

αν $A^2 + B^2 = C^2 \implies A = B = C = 0$.

Καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα αν ο A δεν είναι αναγκαστικά συμμετρικός;