1 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΣΤΟΝ $\mathbb{R}^n$

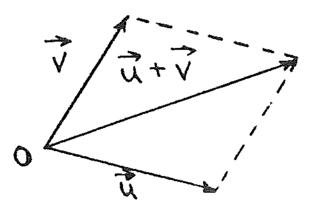
1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ως γνωστό, σε διάφορες φυσικές εφαρμογές εμφανίζονται συγκεκριμένες οντότητες που χαρακτηρίζονται μόνο από το μέγεθός (μέτρο) τους (π.χ. η θερμοκρασία). Αυτές οι ποσότητες καλούνται βαθμωτές (scalars) και μπορούν να οριστούν με πραγματικούς αριθμούς. Γνωρίζουμε επίσης ότι στους συνήθεις χώρους των δύο ή τριών διαστάσεων εμφανίζονται γεωμετρικές οντότητες που μπορούν να οριστούν ως προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα και έχουν έτσι ως χαρακτηριστικά το μέγεθος, τη διεύθυνση και τη φορά. Οι οντότητες αυτές καλούνται διανύσματα (vectors) και μπορούν να παρασταθούν με βέλη ορισμένου μήκους, διεύθυνσης και φοράς.

Σ' αυτό το κεφάλαιο εξετάζουμε τις ιδιότητες των διανυσμάτων. Εχουμε τις ακόλουθες πράξεις:

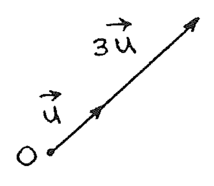
(i) Πρόσθεση διανυσμάτων

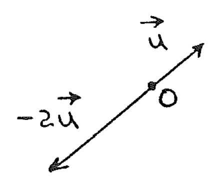
Το άθροισμα $\vec{u}+\vec{v}$ δυο διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$ είναι το διάνυσμα που προκύπτει με τη μέθοδο του παραλληλογράμου, δηλ. είναι η διαγώνιος του παραλληλογράμμου που σχηματίζεται από τα $\vec{u}$ και $\vec{v}$:



(ii) Βαθμωτός πολλαπλασιασμός

Εστω ένα διάνυσμα $\vec{u}$ και ένας πραγματικός αριθμός λ. Το γινόμενο $\lambda\vec{u}$ είναι ένα διάνυσμα με ίδια διεύθυνση, ίδια (αν $\lambda>0$) ή αντίθετη (αν $\lambda<0$) φορά και μέτρο ίσο με το μέτρο του $\vec{u}$ πολλαπλασιασμένο με $|\lambda|$:





(iii) Ισότητα

Τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ είναι ίσα,

$$\vec{u}=\vec{v}$$

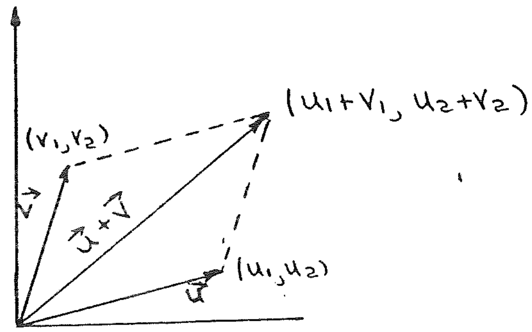
εάν έχουν τα ίδια χαρακτηριστικά: μέγεθος, διεύθυνση, φορά.

Σημειώνουμε ότι τα διανύσματα θεωρούνται συνήθως ελεύθερα, μπορούν δηλ. να μετατοπιστούν παράλληλα προς τον εαυτό τους. Εάν τώρα εισαγάγουμε ένα σύστημα συντεταγμένων Oxy και θεωρήσουμε ότι τα διανύσματα έχουν ως αρχή την αρχή των αξόνων O, τότε κάθε διάνυσμα χαρακτηρίζεται πλήρως από ένα σημείο του επιπέδου, δηλ. από τις συντεταγμένες του πέρατος του διανύσματος. Εξετάζουμε στη συνέχεια τη σχέση μεταξύ των πράξεων που αναφέραμε προηγουμένως και των συντεταγμένων των περάτων των διανυσμάτων.

(i) Πρόσθεση διανυσμάτων

Αν (u_1, u_2) και (v_1, v_2) είναι τα πέρατα των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$, αντίστοιχα, τότε:

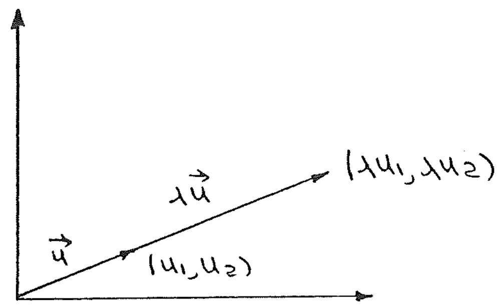
$$\vec{u}+\vec{v} = (u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1+v_1, u_2+v_2)$$



(ii) Βαθμωτός πολλαπλασιασμός

Αν (u_1, u_2) είναι το πέρας του διανύσματος $\vec{u}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε το πέρας του διανύσματος $\lambda\vec{u}$ είναι το $(\lambda u_1, \lambda u_2)$:

$$\lambda \vec{u} = \lambda (u_1, u_2) = (\lambda u_1, \lambda u_2)$$



(iii) Ισότητα διανυσμάτων

Αν (u_1, u_2) και (v_1, v_2) είναι τα πέρατα των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$, αντίστοιχα, τότε.

$$\vec{u} = \vec{v} \iff u_1 = v_1 \text{ και } u_2 = v_2 .$$

Μαθηματικά, ορίζουμε ένα διάνυσμα με το πέρας του. Έτσι καλούμε το διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών (u_1, u_2) διάνυσμα. Η έννοια αυτή μπορεί να επεκταθεί στις τρεις ή περισσότερες διαστάσεις.

Ορισμός

Καλούμε χώρο $\mathbb{R}^n$ το σύνολο όλων των διατεταγμένων νιάδων $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ όπου τα a_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ είναι πραγματικοί αριθμοί. Κάθε στοιχείο του $\mathbb{R}^n$ $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ονομάζεται διάνυσμα στο χώρο $\mathbb{R}^n$ και οι αριθμοί $a_1, a_2, \ldots, a_n$ είναι οι συνιστώσες (ή συντεταγμένες) του διανύσματος $\vec{a}$.

Είναι γνωστό ότι στο $\mathbb{R}^n$ ορίζεται ισότητα με την ισοδυναμία

$$(u_1, u_2, \ldots, u_n) = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \Longleftrightarrow u_1 = v_1, \; u_2 = v_2, \ldots, u_n = v_n .$$

Επιπλέον στο $\mathbb{R}^n$ ορίζονται οι παρακάτω γνωστές πράξεις συνθέσεως:

Πρόσθεση: Αν $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ και $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ είναι δυο στοιχεία του $\mathbb{R}^n$, τότε το στοιχείο $\vec{w}$ του $\mathbb{R}^n$ που ορίζεται από τη σχέση

$$\vec{w} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$$

ονομάζεται άθροισμα των $\vec{u}$ και $\vec{v}$ και συμβολίζεται με

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} .$$

Η πράξη + ονομάζεται πρόσθεση στο $\mathbb{R}^n$. Εύκολα μπορεί να διαπιστώσει κανείς ότι η πράξη της προσθέσεως είναι αντιμεταθετική και προσεταιριστική.

Επίσης είναι φανερό ότι το στοιχείο

$$\mathbb{O} = (0, 0, \ldots, 0)$$

είναι το ουδέτερο στοιχείο της προσθέσεως. Πράγματι

$$\vec{u} + \mathbb{O} = (u_1 + 0, u_2 + 0, \ldots, u_n + 0) = (u_1, u_2, \ldots, u_n) = \vec{u}$$

Το στοιχείο $\mathbb{O}$ καλείται μηδενικό διάνυσμα στο $\mathbb{R}^n$.

Το αντίθετο διάνυσμα του $\vec{u}$ ορίζεται ως

$$-\vec{u} = -1\,\vec{u} = (-u_1, -u_2, \ldots, -u_n)$$

<u>Βαθμωτός πολλαπλασιασμός</u> Εστω ότι $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\vec{u}=(u_1,u_2,\dots,u_n) \in \mathbb{R}^n$. Τότε $\lambda\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ και μάλιστα

$$\lambda\vec{u} = \lambda(u_1,u_2,\dots,u_n) = (\lambda u_1, \lambda u_2, \dots, \lambda u_n).$$

<u>Πρόταση</u>

Εστω $\vec{u},\vec{v},\vec{w} \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda, \kappa \in \mathbb{R}$. Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

(i) $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$ (προσεταιριστική ιδιότητα)

(ii) $\vec{u}+\mathbb{O} = \vec{u}$

(iii) $\vec{u}+(-\vec{u}) = \mathbb{O}$

(iv) $\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$ (αντιμεταθετική ιδιότητα)

(v) $\lambda(\vec{u}+\vec{v}) = \lambda\vec{u}+\lambda\vec{v}$

(vi) $(\lambda+\kappa)\vec{u} = \lambda\vec{u}+\kappa\vec{u}$

(vii) $(\lambda\kappa)\vec{u} = \lambda(\kappa\vec{u})$

(viii) $1\vec{u} = \vec{u}$.

Η απόδειξη της πρότασης στηρίζεται στους ορισμούς των πράξεων και στις ιδιότητες των πραγματικών αριθμών.

<u>Παραδείγματα</u>

(1) Να υπολογιστούν τα εξής:

(i) $(3,-4,5)+(1,1,-2)$

(ii) $(1,2,-3)+(4,-5)$

(iii) $-3(4,-5,-6)$

(iv) $-(-6,7,-8)$

<u>Λύση</u>

(i) Προσθέτουμε τις αντίστοιχες συνιστώσες των δυο διανυσμάτων

$$(3,-4,5)+(1,1,-2) = (3+1,-4+1,5-2) = (4,-3,3)$$

(ii) Το άθροισμα <u>δεν ορίζεται</u> γιατί τα διανύσματα έχουν διαφορετικό πλήθος συνιστωσών.

(iii) Πολλαπλασιάζουμε κάθε συνιστώσα με -3

$$-3(4,-5,-6) = (-12,15,18)$$

(iv) $-(-6,7,-8) = (6,-7,8)$

(2) Δίνονται τα διανύσματα :

$\vec{u} = (2, -7, 1)$

$\vec{v} = (-3, 0, 4)$

$\vec{w} = (0, 5, -8)$

Να βρεθούν τα εξής : (i) $3\vec{u} - 4\vec{v}$

(ii) $2\vec{u} + 3\vec{v} - 5\vec{w}$

Λύση

(i) $3\vec{u} - 4\vec{v} = 3(2,-7,1) - 4(-3,0,4)$

$= (6,-21,3) - (-12,0,16)$

$= (18,-21,-13)$

(ii) $2\vec{u} + 3\vec{v} - 5\vec{w} = 2(2,-7,1) + 3(-3,0,4) - 5(0,5,-8)$

$= (4,-14,2) + (-9,0,12) + (0,-25,40)$

$= (4-9+0,\ -14+0-25,\ 2+12+40)$

$= (-5, -39, 54)$

---

(3) Να βρεθούν τα x και y αν

$(x, 3) = (2, x+y)$

Λύση

Επειδή τα δυο διανύσματα είναι ίσα , και οι αντίστοιχες συνιστώσες είναι ίσες :

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 \\ 3 = x+y \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1. \end{array}$$

---

(4) Να βρεθούν τα x και y αν

$(4, y) = x(2,3)$

Λύση

Εκτελώντας τις πράξεις έχουμε : $(4, y) = (2x, 3x)$.

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4 = 2x \\ y = 3x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 3x \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 6 \end{array}$$

1.2 ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

Εστω δύο διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ στον $\mathbb{R}^n$:

$$\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \quad \text{και} \quad \vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

Τότε ως εσωτερικό γινόμενο (inner product) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ των $\vec{u}$ και $\vec{v}$ ορίζεται το άθροισμα

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$$

Σημειώνουμε ότι αντί του συμβόλου $\langle \cdot, \cdot \rangle$ για το εσωτερικό γινόμενο μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε και το $\bullet$:

$$\boxed{\vec{u} \bullet \vec{v} = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n}$$

Γι' αυτό το λόγο, στην αγγλική χρησιμοποιείται και ο όρος dot product (αντί του inner product). Στα επόμενα θα χρησιμοποιούμε και τους δύο συμβολισμούς.

Δυο στοιχεία $\vec{u}, \vec{v}$ του $\mathbb{R}^n$ θα λέμε ότι είναι ορθογώνια (orthogonal) ή κάθετα (perpendicular) όταν το εσωτερικό τους γινόμενο ισούται με μηδέν:

$$\boxed{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0} \quad , \quad \left[\text{ή} \quad \vec{u} \bullet \vec{v} = 0 \right]$$

Θεώρημα

Εστω ότι $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

(I) $(\vec{u} + \vec{v}) \bullet \vec{w} = \vec{u} \bullet \vec{w} + \vec{v} \bullet \vec{w}$

(II) $(\lambda \vec{u}) \bullet \vec{v} = \lambda (\vec{u} \bullet \vec{v})$

(III) $\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{v} \bullet \vec{u}$

(IV) $\vec{u} \bullet \vec{u} \geqslant 0$

$\vec{u} \bullet \vec{u} = 0 \iff \vec{u} = \mathbb{O}$

Παρατήρηση

Οπως θα δούμε στη συνέχεια ο χώρος $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένος με τις πράξεις της πρόσθεσης διανυσμάτων, του βαθμωτού πολλαπλασιασμού και του εσωτερικού γινομένου καλείται Ευκλείδειος χώρος n διαστάσεων.

Παραδείγματα

(1) Να βρεθεί το εσωτερικό γινόμενο $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ όταν

(α) $\vec{u} = (1,0,0)$, $\vec{v} = (0,1,0)$

(β) $\vec{u} = (1,0,-2)$, $\vec{v} = (-3,1,2)$

(γ) $\vec{u} = (1,2,-1,2)$, $\vec{v} = (0,1,-1)$

(δ) $\vec{u} = (1,-1,1,-1)$, $\vec{v} = (1,2,2,1)$

Λύση

(α) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 0\cdot 0 = 0$ (τα δυο διανύσματα είναι ορθογώνια)

(β) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 1(-3) + 0\cdot 1 - 2(2) = -3-4 = -7$

(γ) Το εσωτερικό γινόμενο δεν ορίζεται γιατί τα δυο διανύσματα έχουν διαφορετικό πλήθος συνιστωσών.

(δ) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 1(1) - 1(2) + 1(2) - 1(1) = 1-2+2-1 = 0$
(τα δυο διανύσματα είναι ορθογώνια).

---

(2) Να βρεθεί το κ έτσι ώστε τα διανύσματα $\vec{u} = (2,\kappa,-1)$ και $\vec{v} = (\kappa,-1,2)$ να είναι ορθογώνια

Λύση

Για να είναι τα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ ορθογώνια πρέπει το εσωτερικό τους γινόμενο να ισούται με μηδέν:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 2\kappa - \kappa - 2 = 0 \Rightarrow \kappa - 2 = 0 \Rightarrow \kappa = 2$$

---

(3) Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{e_1} = (1,0,0)$, $\vec{e_2} = (0,1,0)$ και $\vec{e_3} = (0,0,1)$ είναι ορθογώνια μεταξύ τους.

Λύση

Για να είναι τα διανύσματα $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ και $\vec{e_3}$ ορθογώνια μεταξύ τους πρέπει να ισχύουν τα εξής:

$\langle \vec{e_1}, \vec{e_2} \rangle = 0$, $\langle \vec{e_2}, \vec{e_3} \rangle = 0$ και $\langle \vec{e_3}, \vec{e_1} \rangle = 0$.

Πράγματι:

$$\langle \vec{e_1}, \vec{e_2} \rangle = 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 0\cdot 0 = 0$$

$$\langle \vec{e_2}, \vec{e_3} \rangle = 0\cdot 0 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0$$

$$\langle \vec{e_3}, \vec{e_1} \rangle = 0\cdot 1 + 0\cdot 0 + 1\cdot 0 = 0$$

1.3 ΜΗΚΟΣ ΚΑΙ ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΤΟΝ $\mathbb{R}^n$

Ορισμοί

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ του $\mathbb{R}^n$:

$$\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$$
$$\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

Η απόσταση μεταξύ των σημείων $\vec{u}$ και $\vec{v}$ ορίζεται ως εξής:

$$\boxed{d = \sqrt{(u_1-v_1)^2 + (u_2-v_2)^2 + \dots + (u_n-v_n)^2}} \qquad (1)$$

Το μήκος (length) ή νόρμα (norm) του διανύσματος $\vec{u}$ συμβολίζεται με $\|\vec{u}\|$ και ορίζεται ως εξής:

$$\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{<\vec{u}, \vec{u}>} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}} \qquad (2)$$

Παρατηρήσεις

(1) Για τη νόρμα συναντούμε στην ελληνική βιβλιογραφία και άλλες εναλλακτικές ονομασίες, όπως μέτρο και νόρμ.

(2) Για την απόσταση μεταξύ των σημείων $\vec{u}$ και $\vec{v}$ παρατηρούμε ότι ισχύει:

$$\boxed{d = \|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{(u_1-v_1)^2 + (u_2-v_2)^2 + \dots + (u_n-v_n)^2}} \qquad (3)$$

Παραδείγματα

(1) Αν $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ είναι δύο διανύσματα στον $\mathbb{R}^3$, τότε η απόσταση των $\vec{x}$ και $\vec{y}$ είναι:

$$d = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \|(x_1-y_1, x_2-y_2, x_3-y_3)\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2}$$

που συμπίπτει με τη γνωστή από την Αναλυτική Γεωμετρία απόσταση δύο σημείων του $\mathbb{R}^3$.

(2) Να βρεθεί η απόσταση των $\vec{u} = (1, -2, 4, 1)$ και $\vec{v} = (3, 1, -5, 0)$.

Λύση

$$d = \|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{(1-3)^2 + (-2-1)^2 + (4+5)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{95}$$

(3) Αν $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ είναι ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$, τότε η νόρμα $\|\vec{x}\|$ είναι:

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

που συμπίπτει με το μήκος του διανύσματος $\vec{x}$ (που έχει ως αρχή την αρχή των αξόνων).

(4) Να βρεθεί η νόρμα του $\vec{v} = (3, 1, -5, 0)$.

Λύση

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2} = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-5)^2 + 0^2} = \sqrt{35}.$$

Ενα διάνυσμα $\vec{u}$ του $\mathbb{R}^n$ καλείται μοναδιαίο (unit vector) αν ισχύει:

$$\|\vec{u}\| = 1 \qquad (4)$$

Συνήθως, για τα μοναδιαία διανύσματα χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\vec{e}$. Κάθε μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{u}$ μπορεί να κανονικοποιηθεί ως εξής:

$$\vec{e_u} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$$

Το $\vec{e_u}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα που έχει ίδια διεύθυνση και φορά με το $\vec{u} \neq \mathbf{0}$.

Παραδείγματα

(1) Να εξετάσετε αν τα ακόλουθα διανύσματα είναι μοναδιαία:

(α) $(1, 1, 1)$ (γ) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(β) $(1, 0, 0)$ (δ) $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -1, 0\right)$

Λύση

(α) $\|(1,1,1)\| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3} \neq 1$ Δεν είναι μοναδιαίο

(β) $\|(1,0,0)\| = \sqrt{1^2+0^2+0^2} = 1$. Είναι μοναδιαίο

(γ) $\left\|\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = 1$. Είναι μοναδιαίο

(δ) $\left\|\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -1, 0\right)\right\| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{1}{3} + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \neq 1$.

Δεν είναι μοναδιαίο.

(2) Να κανονικοποιηθούν τα διανύσματα

(α) $\vec{u} = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$

(β) $\vec{u} = (1, -2) \in \mathbb{R}^2$

(γ) $\vec{u} = (1, -1, 1) \in \mathbb{R}^3$

(δ) $\vec{u} = (1, -2, 0) \in \mathbb{R}^3$

<u>Λύση</u>

(α) Η νόρμα του $\vec{u}$ είναι

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \Rightarrow \vec{e}_u = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

(β) $\|\vec{u}\| = \sqrt{1+(-2)^2} = \sqrt{5}$. Το κανονικοποιημένο διάνυσμα θα είναι:

$$\vec{e}_u = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2) \quad \text{ή} \quad \vec{e}_u = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

(γ) $\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2+(-1)^2+1^2} = \sqrt{3}$

$$\vec{e}_u = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1) \quad \text{ή} \quad \vec{e}_u = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

(δ) $\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2+(-2)^2+0^2} = \sqrt{5}$

$$\vec{e}_u = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2, 0) \quad \text{ή} \quad \vec{e}_u = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right)$$

<u>Θεώρημα (Ανισότητα Cauchy - Schwartz)</u>

Για τυχόντα διανύσματα $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\boxed{|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|} \qquad (5)$$

<u>Ορισμός</u>

Θεωρούμε δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. <u>Γωνία των διανυσμάτων</u> $\vec{u}$ και $\vec{v}$ καλείται ο αριθμός θ που δίνεται από τη σχέση

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|}} \qquad (6)$$

<u>Παρατηρήσεις</u>

(1) Ο αριθμός θ ορίζεται σε ακτίνια, $\theta \in [0, \pi]$

(2) Εαν $\cos\theta = 0$, εάν δηλ. $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ τότε $\theta = \frac{\pi}{2}$ και τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ είναι <u>κάθετα</u> (<u>ορθογώνια</u>)

Παραδείγματα

(1) Δίνονται τα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{u} = (-1,-2,0) \quad \text{και} \quad \vec{v} = (2,0,3)$$

Να επαληθευτεί η ανισότητα Cauchy-Schwartz:

$$|\langle \vec{u},\vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|$$

Λύση

Υπολογίζουμε τα $|\langle \vec{u},\vec{v} \rangle|$, $\|\vec{u}\|$ και $\|\vec{v}\|$

$$\langle \vec{u},\vec{v} \rangle = (-1)2 + (-2)\cdot 0 + 0\cdot 3 = -2 \Rightarrow |\langle \vec{u},\vec{v} \rangle| = 2.$$

$$\left.\begin{array}{l} \|\vec{u}\| = \sqrt{(-1)^2+(-2)^2+0^2} = \sqrt{5} \\ \|\vec{v}\| = \sqrt{2^2+0^2+3^2} = \sqrt{13} \end{array}\right\} \Longrightarrow \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| = \sqrt{65}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$2 \leq \sqrt{65}$$

άρα η ανισότητα Cauchy-Schwartz ισχύει:

$$|\langle \vec{u},\vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|.$$

(2) Αν $\vec{a} = (1,0)$ και $\vec{b} = (-3,\sqrt{3})$ δύο διανύσματα του $\mathbb{R}^2$, να βρεθεί η γωνία τους.

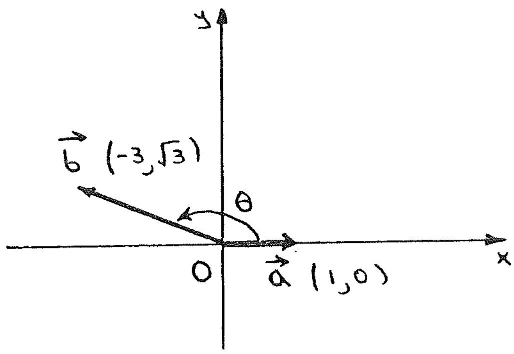
Λύση.

Εχουμε:

$$\langle \vec{a},\vec{b} \rangle = 1(-3) + 0\cdot\sqrt{3} = -3$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{1^2+0^2} = 1$$

$$\|\vec{b}\| = \sqrt{(-3)^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$



Από τον ορισμό έχουμε

$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{a},\vec{b} \rangle}{\|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\|} = \frac{-3}{1\cdot 2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

δηλ. $\theta = \frac{5\pi}{6}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ.

1. Να υπολογιστούν τα εξής:

α) $(1, -2, 0)+(-2,3,4)$
β) $(1, -2, 0, 3)+(4, -3, -2, 0)$
γ) $(1, -1)+(-1,1)$
δ) $(1, -1, 2)+(1,0,1,0)$
ε) $(1, -2,3)-2(1,-1,-2)$
στ) $-3(1, -2,1,0)$
ζ) $3(1,-1, 2)-(1, -2, 1)$

2. Να βρεθούν τα x και y αν $(x, 5)=(y-x,y)$

3. Να βρεθούν τα x,y και z αν

$$(2, -3,4)=x(1,1,1)+y(1,1,0)+z(1,0,0)$$

4. Να δείξετε ότι $0\vec{u}=\vec{0}$ ($\vec{0}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα)

5. Αν $\vec{u}$ είναι ένα διάνυσμα στο R^n και $\vec{0}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα στο R^n να δείξετε ότι το $\vec{0}$ είναι ορθογώνιο στο $\vec{u}$.

6. Να υπολογιστεί το εσωτερικό γινόμενο $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle$ όταν:
α) $\vec{u}=(2,-3,6)$, $\vec{v}=(8,2,-3)$
β) $\vec{u}=(1,-8,0,5)$, $\vec{v}=(3,6)$
γ) $\vec{u}=(3,-5,2,1)$, $\vec{v}=(4,1,-2,5)$

7. Να βρεθεί η τιμή του κ έτσι ώστε τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ να είναι ορθογώνια:
α) $\vec{u}=(1,k,-3)$ και $\vec{v}=(2,-5,4)$
β) $\vec{u}=(2,3k,-4,1,5)$ και $\vec{v}=(6,-1,3,7,2k)$

8. Να βρεθεί η απόσταση d μεταξύ των διανυσμάτων όπου:

α) $\vec{u}=(1,7)$, $\vec{v}=(6,-5)$
β) $\vec{u}=(3,-5,4)$, $\vec{v}=(6,2,-1)$

9. Να βρεθεί η τιμή του k έτσι ώστε η απόσταση των διανυσμάτων $\vec{u}=(2,k,1,-4)$ και $\vec{v}=(3,-1,6,-3)$ να είναι 6.

10. Να βρεθεί η νόρμα $||\vec{u}||$ του διανύσματος $\vec{u}$ εάν

α) $\vec{u}=(2,-7)$ β) $\vec{u}=(3,-12,-4)$

11. Να βρεθεί η τιμή του k έτσι ώστε να είναι $||\vec{u}||=\sqrt{39}$ όπου $\vec{u}=(1,k,-2,5)$

12. Ποιά από τα παρακάτω διανύσματα ειναι μοναδιαία;
α) $\vec{u}=(1,0,-\frac{1}{2})$
β) $\vec{u}=(0,-1,0)$
γ) $\vec{u}=(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$
δ) $\vec{u}=(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$

13. Να κανονικοποιηθούν τα διανύσματα
α) $\vec{u}=(-3,4)$
β) $\vec{v}=(1,-2,0,2)$

14. Να επαληθευτεί η ανισότητα Cauchy-Schwartz στις ακόλουθες περιπτώσεις:
α) $\vec{u}=(1,-1), \vec{v}=(0,1)$
β) $\vec{u}=(1,0,-1), \vec{v}=(1,-1,0)$
γ) $\vec{u}=(1,0,0,-1), \vec{v}=(2,1,0,0)$

15. Να υπολογιστεί η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων του R^4
$\vec{u}=(-3,0,6,2)$ και $\vec{v}=(1,-2,0,2)$