Έλεγχος Στατιστικών Υποθέσεων

- Πώς αποφασίζω αν ένα νόμισμα είναι δίκαιο;
- Υπόθεση που εκδικάζεται (Μηδενική Υπόθεση):
  - Το νόμισμα είναι δίκαιο
- Αντίπαλη Υπόθεση (Εναλλακτική Υπόθεση)
  1. Το νόμισμα δεν είναι δίκαιο.
  2. Το νόμισμα έχει πιο πολλά γράμματα.
  3. Το νόμισμα έχει πιο πολλές κορώνες.

Για να ελέγξω κατά πόσο το νόμισμα είναι δίκαιο, ρίχνω το νόμισμα *n* φορές.

$$X_i = \begin{cases} 1, & \Gamma \\ 0, & \mathrm{K} \end{cases}$$

$$P(\Gamma) = P(X_i = 1) = p, \quad p \in [0,1]$$

$$H_0: \quad p = 1/2$$
$$H_1: \quad p \neq 1/2$$

Οι υποθέσεις διαμερίζουν τον παραμετρικό χώρο σε δύο σύνολα.

Η από κοινού των $X_1, \ldots, X_n$ είναι:

$$\prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i} = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i} = \begin{cases} (1/2)^n & : H_0 \\ p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i} & : H_1 \end{cases}$$

Παράδειγμα

Έστω, n=6,

$$H_0: \quad p = 1/2$$
$$H_1: \quad p \neq 1/2$$

Η πληροφορία για την p είναι στην $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$, λόγω επάρκειας,

$$H_0 : T \sim Bin(6, 1/2)$$
$$H_1 : T \sim Bin(6, 3/4)$$

$$P(T = t \mid H_0) = \binom{6}{t}\left(\tfrac{1}{2}\right)^t \left(\tfrac{1}{2}\right)^{6-t}$$

$$P(T = t \mid H_1) = \binom{6}{t}\left(\tfrac{3}{4}\right)^t \left(\tfrac{1}{4}\right)^{6-t}$$

T	$p=\frac{1}{2}$	$p=\frac{3}{4}$
0	0,0156	0,0002
1	0,0938	0,0044
2	0,2344	0,0330
3	0,3125	0,1318
4	0,2344	0,2966
5	0,0938	0,3560
6	0,0156	0,1780

πιο πιθανό το νόμισμα να είναι δίκαιο

Όταν το T=0,1,2,3 $\Rightarrow H_0$

Όταν το $\underbrace{T=4,5,6}_{\text{περιοχή απόρριψης της } H_0 \text{ ή κρίσιμη περιοχή}}$ $\Rightarrow H_1$

<u>Πιθανότητες Λάθους</u>

Σφάλμα Τύπου I = P(απορρίπτω την H_0|H_0 αληθής)

= P(T=4, 5, 6 | p= $\frac{1}{2}$) =0.2344+0.0938+0.0156 = 0.348

Σφάλμα Τύπου II = P(απορρίπτω την H_1|H_1 αληθής)

= P(T=0, 1, 2, 3 | p= $\frac{3}{4}$) = 0.1694

$X_1,\ldots,X_n \quad \tau.\delta \sim \quad f(x,\theta)$

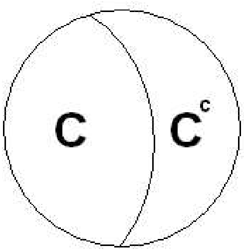
Μηδενική Υπόθεση

$H_0:\theta=\theta_0$

Εναλλακτική Υπόθεση

$H_1:\theta=\theta_1 \qquad (\theta\neq\theta_0)$ <u>απλή</u> υπόθεση

$\theta\neq\theta_0$ <u>σύνθετη</u> υπόθεση



C: κρίσιμη περιοχή

$\underset{\sim}{X}=(X_1,\ldots,X_n)\in C \quad\Rightarrow$ απορρίπτω την H_0

$\underset{\sim}{X}=(X_1,\ldots,X_n)\notin C \quad\Rightarrow$ δεν απορρίπτω την H_0

Ελεγχοσυνάρτηση

$$\phi(X_1,\ldots,X_n)=\begin{cases}1 & , \quad (X_1,\ldots,X_n)\in C \\ 0 & , \quad \alpha\lambda\lambda o\iota\omega\varsigma\end{cases}$$

	Στατιστικός		
ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ	H_0 / H_1	H_0	H_1
	H_0	✓	Σφάλμα τύπου I
	H_1	Σφάλμα τύπου II	✓

α=P($\underset{\sim}{X} \in$ C|H_0 αληθής)

β=P($\underset{\sim}{X} \in C^c$ /H_1 αληθής)

γ=1-β=P($\underset{\sim}{X} \in$ C /H_1 αληθής) = ισχύς της ελεγχοσυνάρτησης.

<u>Απλή προς Απλή:</u> Αναζητούμε ισχυρότατη ελεγχοσυνάρτηση δηλαδή εκείνη τη συνάρτηση που έχει τη μεγαλύτερη ισχύ ανάμεσα σε όλες που έχουν επίπεδο σημαντικότητας α.
<u>Απλή προς Σύνθετη:</u> Αναζητούμε την ομοιομόρφως ισχυρότατη ελεγχοσυνάρτηση.

Λήμμα Neyman – Pearson:

(απλή προς απλή υπόθεση)

H_0 : θ=θ_0 προς
H_1 : θ=θ_1

Όταν ισχύει η H_0, $L_0=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta_0)$

Όταν ισχύει η H_1, $L_1=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta_1)$

Αν υπάρχει κρίσιμη περιοχή C,
επιπέδου σημαντικότητας α και σταθερά κ,

$\frac{L_0}{L_1}\le k$ όταν $\underset{\sim}{x}\in C$

$\frac{L_0}{L_1}> k$ όταν $\underset{\sim}{x}\notin C$,

εξαρτάται από το επαρκές στατιστικό

τότε η C είναι η πλέον ισχυρή περιοχή απόρριψης της H_0

$$\phi(\underset{\sim}{x}) = \begin{cases} 1 \quad , & L_0 / L_1 \leq k \\ 0 \quad , & L_0 / L_1 > k \end{cases}$$

<u>Απόδειξη:</u>
Έστω D οποιαδήποτε άλλη κρίσιμη περιοχή επιπέδου σημαντικότητας α.
Θα δείξουμε ότι η ισχύς της περιοχής C,
ισχύς (C) ≥ ισχύς (D).

ισχύς (C) = γ(C) $= 1 - P(\underset{\sim}{x} \notin C | H_1)$

$= P(\underset{\sim}{x} \in C | H_1)$

$= \int \underset{C}{\cdots} \int L_1 \, dx_1 \ldots dx_n$

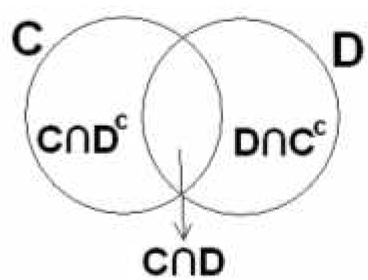
Θέλω να δείξω ότι
γ(C) ≥ γ(D)

$$\Leftrightarrow \int \underset{C}{\cdots} \int L_1 \, dx_1 \ldots dx_n \geq \int \underset{D}{\cdots} \int L_1 \, dx_1 \ldots dx_n$$

επίπεδο σημαντικότητας = α = α(C) $= P(\underset{\sim}{x} \in C | H_0)$

$$= \int \underset{C}{\cdots} \int L_0 \, dx_1 \ldots dx_n = \int \underset{D}{\cdots} \int L_0 \, dx_1 \ldots dx_n \quad (*)$$

επειδή τα δύο επίπεδα σημαντικότητας είναι τα ίδια



$$\int \underset{C}{\cdots} \int L_0 = \int \underset{C \cap D^C}{\cdots} \int L_0 + \int \underset{C \cap D}{\cdots} \int L_0$$

$$C = (C \cap D^C) \cup (C \cap D)$$

$$\int \underset{D}{\cdots} \int L_0 = \int \underset{D \cap C^C}{\cdots} \int L_0 + \int \underset{C \cap D}{\cdots} \int L_0$$

$$D = (D \cap C^C) \cup (C \cap D)$$

Λόγω της (*)

$$\int \underset{C \cap D^c}{\cdots} \int L_0 = \int \underset{D \cap C^c}{\cdots} \int L_0 \quad (**)$$

Παρατηρώ ότι,

$$\frac{L_0}{L_1} \le k \quad , \quad \underset{\sim}{x} \in C \Rightarrow L_1 \ge \frac{L_0}{k} \quad , \quad \underset{\sim}{x} \in C$$

Θεωρώ $\int_{C \cap D^c} \ldots \int L_1 \ge \int_{C \cap D^c} \ldots \int \frac{L_0}{k} \overset{(**)}{=} \int_{D \cap C^c} \ldots \int \frac{L_0}{k} > \int_{D \cap C^c} \ldots \int L_1$

Αν προσθέσω $\int_{D \cap C} \ldots \int L_1$ και στα δύο μέρη της ανισότητας, τότε το ζητούμενο αποδεικνύεται.

$$\gamma(C) \ge \gamma(D) \Leftrightarrow \int_C \ldots \int L_1 \ge \int_D \ldots \int L_1$$

Παράδειγμα:

$X_1, \ldots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$

σ^2 γνωστό

α επίπεδο σημαντικότητας

$\mathrm{H}_0 : \mu = \mu_0$

$\mathrm{H}_1 : \mu = \mu_1 \quad (\mu_1 > \mu_0)$

Όταν ισχύει η H_0, $L_0 = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(X_i - \mu_0)^2} = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)^2}$

Όταν ισχύει η H_1, $L_1 = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(X_i - \mu_1)^2} = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_1)^2}$

Απορρίπτω την H_0 αν $\frac{L_0}{L_1} \le k$

$$\Rightarrow e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left\{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2 - \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_1)^2\right\}} \le k$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_1)^2 - \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)^2 \le 2\sigma^2 \log k$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i - 2\mu_1 \sum_{i=1}^{n} X_i + n\mu_1^2 - \sum_{i=1}^{n} X_\iota^2 + 2\mu_0 \sum_{i=1}^{n} X_i - n{\mu_0}^2 \le 2\sigma^2 \log k$$

$$\Rightarrow 2(\mu_0 - \mu_1)\sum_{i=1}^{n} X_i + n(\mu_1^2 - \mu_0^2) \le 2\sigma^2 \log k$$

$$\Rightarrow 2(\mu_0 - \mu_1)\sum_{i=1}^{n} X_i \le 2\sigma^2 \log k - n(\mu_1^2 - \mu_0^2)$$

$$\Rightarrow \overline{X} \ge c$$

$\alpha = \mathrm{P}$ (απορρίπτω την H_0 / H_0 αληθής) $= \mathrm{P}\left(\bar{X} \geq c / X_1, \ldots, X_n \sim N\left(\mu_0, \sigma^2\right)\right) =$

$$= \mathrm{P}\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{c - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right),$$ όπου $c = \mu_0 + z_\alpha \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Σφάλμα τύπου II: P (μη απόρριψης της H_0 / H_1 αληθής) =

$$= \mathrm{P}\left(\bar{X} < \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} / X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{N}\left(\mu_1, \sigma^2\right)\right)$$

$$= \mathrm{P}\left(\frac{\bar{X} - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} + z_a\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} + z_a\right)$$

Ισχύς του ελέγχου$= 1 - \Phi\left(\dfrac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} + z_a\right) = \begin{cases} 1 - \Phi\left(z_a\right) = a, & \mu_0 \approx \mu_1 \\ 1 - \Phi\left(-\infty\right) = 1, & \mu_0 << \mu_1 \end{cases}$

<u>Παράδειγμα:</u>

$X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$,

σ^2 γνωστό,

α επίπεδο σημαντικότητας

$\mathrm{H}_0 : \mu = \mu_0$

$\mathrm{H}_1 : \mu > \mu_0$

Αντί να θεωρήσω αυτόν τον έλεγχο, θεωρώ τον προηγούμενο:

$\mathrm{H}_0 : \mu = \mu_0$

$\mathrm{H}_1 : \mu = \mu_1 \quad (\mu_1 > \mu_0)$

Απορρίπτουμε αν $\bar{X} \geq \mu_0 + z_\alpha \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Με τον Neyman-Pearson αν μια συνθήκη τη θεωρήσω ως απλή και παρατηρήσω ότι η κρίσιμη περιοχή δεν εξαρτάται από την εναλλακτική, τότε έχω ομοιομόρφως ισχυρότατο έλεγχο.

$$\mathrm{H}_0 : \mu = \mu_0$$
$$\mathrm{H}_1 : \mu < \mu_0$$

Κρίσιμη περιοχή: $\bar{X} \le \mu_0 - z_a \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$$\mathrm{H}_0 : \mu = \mu_0$$
$$\mathrm{H}_1 : \mu \ne \mu_0$$

Κρίσιμη περιοχή: $\bar{X} \le \mu_0 - z_{\alpha/2} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ή $\bar{X} \ge \mu_0 + z_{\alpha/2} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Παράδειγμα:

$$\mathrm{X} \sim \mathrm{E}(\theta)$$

$$f(x,\theta) = \theta e^{-\theta x} \quad , \quad x > 0$$

H_0 : $\theta=\theta_0$ προς
H_1 : $\theta=\theta_1$ $(\theta_1 > \theta_0)$
α επίπεδο σημαντικότητας

Από το θεώρημα Neyman-Pearson,

$$\frac{L_0}{L_1} \le k$$

$$\Leftrightarrow \frac{\theta_0 e^{-\theta_0 x}}{\theta_1 e^{-\theta_1 x}} \le k \Leftrightarrow \frac{\theta_0}{\theta_1} e^{-(\theta_0-\theta_1)x} \le k \Leftrightarrow -(\theta_0-\theta_1)x \le \log\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}k\right) \Rightarrow x \le k^*, \quad \text{όπου}$$

$$k^* = \frac{1}{\theta_0 - \theta_1} \log\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}k\right).$$

Για να υπολογίσω την k^*,

$\alpha = \mathrm{P}$ (απορρίπτω την H_0 | H_0 αληθής)= $\mathrm{P}(x \le k^* \mid \theta = \theta_0) = 1 - e^{-\theta_0 k^*}$

Λύνοντας ώς προς k^*, $k^* = -\dfrac{1}{\theta_0} \log(1-\alpha)$.

Αρα ο ισχυρότατος έλεγχος επιπέδου σημαντικότητας α για τον παρακάτω έλεγχο δίνεται από το $x \le -\dfrac{1}{\theta_0} \log(1-\alpha)$.

Επειδή η κρίσιμη περιοχή δεν εξαρτάται από το θ_1, η παραπάνω ελεγχοσυνάρτηση είναι ομοιομώρφος ισχυρότατος έλεγχος για H_0 : $\theta=\theta_0$ προς H_1 : $\theta=\theta_1$.

Ισχύς $= \mathrm{P}$ (απορρίπτω την H_0 | H_1 αληθής)

$= \mathrm{P}\left(x \le -\frac{1}{\theta_0} \log(1-\alpha) \,/\, \theta=\theta_1 \right)$

$= 1 - e^{\frac{1}{\theta_0}\log(1-a)\theta_1}, \quad \theta_1 > \theta_0$

η ισχύς είναι συνάρτηση μιάς παραμέτρου.

Παράδειγμα:

$X_1, \ldots, X_n \sim Bernoulli(p)$

$\mathrm{H}_0: \quad p = \frac{2}{10} \qquad \pi\rho o\varsigma$

$\mathrm{H}_1: \quad p = \frac{4}{10}$

α επίπεδο σημαντικότητας

Από το λήμμα Neyman-Pearson,

$$\frac{L_0}{L_1} \le k$$

$$\Leftrightarrow \frac{\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{2}{10}\right)^{x_i}\left(\frac{8}{10}\right)^{1-x_i}}{\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{4}{10}\right)^{x_i}\left(\frac{6}{10}\right)^{1-x_i}} \le k \overset{T=\sum_{i=1}^{n} X_i}{\Rightarrow} \frac{\left(\frac{2}{10}\right)^{T}\left(\frac{8}{10}\right)^{n-T}}{\left(\frac{4}{10}\right)^{T}\left(\frac{6}{10}\right)^{n-T}} \le k$$

$$\Rightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^{n}\left(\frac{3}{8}\right)^{T} \le k \Rightarrow \left(\frac{3}{8}\right)^{T} \le k\left(\frac{3}{4}\right)^{n} \Rightarrow T\log\left(\frac{3}{8}\right) \le \log\left(k\left(\frac{3}{4}\right)^{n}\right) \Rightarrow T \ge \frac{\log\left(k\left(\frac{3}{4}\right)^{n}\right)}{\log\left(\frac{3}{8}\right)} = k^*$$

αφού $\log\left(\frac{3}{8}\right)<0$.

$$a = P\left(T \ge k^* \mid H_0\right) = P\left(T \ge k^* \mid p = \frac{2}{10}\right)$$

$$T \sim Bin\left(n, \frac{2}{10}\right)$$

$a = 0.05, \quad n = 10,$

$k^* = 4, \qquad P(T \ge 4) = P(T > 4) + P(T = 4) = 0.0328 + 0.0881 = 0.1209$

$k^* = 5, \qquad P(T \ge 5) = P(T > 4) = 0.0328$

$0.0328 + \delta(0.0881) = 0.05 \Rightarrow \delta = 0.195$

Ορίζω $z = \begin{cases} 1, & \mu\varepsilon \quad \pi\iota\theta\alpha\nu o\tau\eta\tau\alpha \quad \delta \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\iota\omega\varsigma \end{cases}$

Ονομάζεται τυχαιοποιημένος έλεγχος και εφαρμόζεται συνήθως για διακριτές κατανομές, στις οποίες δεν μπορούμε να υπολογίσουμε ακριβώς το επίπεδο σημαντικότητας.
Ελεγχοσυνάρτηση:

$$\phi(x)=\begin{cases}1, & \mathrm{T}>4\\ \delta, & \mathrm{T}=4\\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\iota\omega\varsigma\end{cases}$$

$$\mathrm{E}\left(\phi(x)\right)=\alpha.$$

Θεώρημα:

Για την εκθετική οικογένεια κατανομών,

$\mathrm{H}_0:\theta\le\theta_0$

$\mathrm{H}_1:\theta>\theta_0$

ή

$\mathrm{H}_0:\theta>\theta_0$

$\mathrm{H}_1:\theta\le\theta_0$

τότε υπάρχουν ομοιομόρφως ισχυρότατοι έλεγχοι.

Μονότονο Πηλίκο Πιθανοφάνειας

$X_1,\ldots,X_n \sim f(x,\theta)$

T μια στατιστική συνάρτηση.

Λέμε ότι η οικογένεια κατανομών $f(x,\theta)$

έχει την ιδιότητα του μονότονου πηλίκου πιθανοφάνειας ως προς την T, αν και μονον αν για $\theta_1<\theta_2$, $\dfrac{L(\underset{\sim}{x}/\theta_2)}{L(\underset{\sim}{x}/\theta_1)}$ είναι αύξουσα συνάρτηση του T.

Παράδειγμα:

$X_1,\ldots,X_n \sim Bernoulli(p)$

T= $\sum_{i=1}^{n} X_i$, είναι επαρκής για το p .

Έστω $\rho_1 < \rho_2$,

$$\frac{L(\rho_2 \mid \underset{\sim}{x})}{L(\rho_1 \mid \underset{\sim}{x})} = \frac{\prod_{i=1}^{n} \rho_2^{\chi_i} \quad (1-\rho_2)^{1-\chi_i}}{\prod_{i=1}^{n} \rho_1^{\chi_i} \quad (1-\rho_1)^{1-\chi_i}} = \frac{\rho_2^{T} \quad (1-\rho_2)^{n-T}}{\rho_1^{T} \quad (1-\rho_1)^{n-T}} = \left(\frac{(1-\rho_1)\rho_2}{(1-\rho_2)\rho_1}\right)^{T} \left(\frac{1-\rho_2}{1-\rho_1}\right)^{n},$$

$$\rho_1 < \rho_2 \Rightarrow \frac{\rho_1}{\rho_2} < 1 \Rightarrow \frac{1-\rho_1}{1-\rho_2} > 1 \Rightarrow \frac{(1-\rho_1)\rho_2}{(1-\rho_2)\rho_1} > 1$$

και άρα η οικογένεια $Bernoulli(p)$ έχει την ιδιότητα του μονότονου πηλίκου πιθανοφάνειας.

Θεώρημα:

$X_1,\ldots,X_n \quad \tau.\delta \sim f(\chi,\theta)$

Αν $H_0: \theta = \theta_0$ προς

$H_1: \theta > \theta_0$

Έστω ότι η f έχει την ιδιότητα του μονότονου πηλίκου πιθανοφάνειας ως προς T.
Τότε η περιοχή T>c, επιπέδου σημαντικότητας α, δίνει ομοιομόρφως ισχυρότατο έλεγχο.
Η σταθερά c δίνεται απο την $\alpha = \mathrm{P}(\mathrm{T} \le c \mid \theta = \theta_0)$.

Αν $H_0: \theta = \theta_0 \quad (\theta \ge \theta_0)$

$H_1: \theta < \theta_0$

$\Rightarrow \mathrm{T} \le c$

και $a = P(T \le c \mid \theta = \theta_0)$

Αν $H_0: \theta = \theta_0$

$H_1: \theta \ne \theta_0$

Δεν υπάρχει ομοιμόρφως ισχυρότατος έλεγχος.

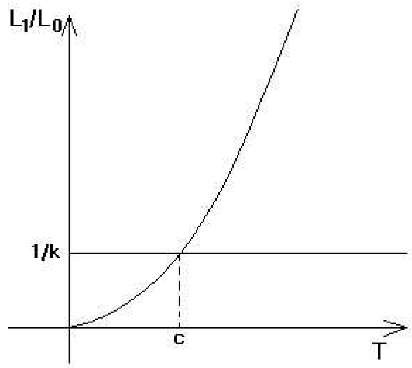
Απόδειξη:

Έστω, $H_0 \theta = \theta_0$ προς

$H_1: \theta = \theta_1 \quad (\theta_1 > \theta_0)$

Για απλοποίηση ελέγχω απλή προς απλή.
Απορρίπτω, αν

$$\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} = \frac{L_0}{L_1} \le \kappa \Leftrightarrow \frac{L_1}{L_0} \ge \frac{1}{\kappa} \Rightarrow T \ge c$$



$\alpha = \mathrm{P}\left(\mathrm{T} \geq c \mid \theta = \theta_0\right)$ το οποίο είναι ανεξάρτητο του θ_1
Η κρίσιμη περιοχή δίνεται για $T \geq c$ και δίνει ομοιομόρφως ισχυρότατο έλεγχο.

Παράδειγμα:

$X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{P}_0(\lambda)$

$\mathrm{H}_0 : \lambda \geq 1$

$\mathrm{H}_1 : \lambda < 1$

θεωρώ:

$\lambda_1 < \lambda_2, \quad T = \sum_{i=1}^{n} x_i$

$$\frac{L(\lambda_2)}{L(\lambda_1)} = \frac{\prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\lambda_2} \lambda_2^{x_i}}{x_i!}}{\prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\lambda_1} \lambda_1^{x_i}}{x_i!}} = e^{n(\lambda_1 - \lambda_2)} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{\sum_{i=1}^{n} x_i}.$$

Παρατηρούμε ότι η $\frac{L(\lambda_2)}{L(\lambda_1)}$, είναι αύξουσα ως προς $\sum_{i=1}^{n} x_i$. Άρα απορρίπτω αν $\sum_{i=1}^{n} x_i < c$.

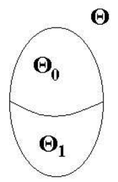
$a = P\left(\sum_{i=1}^{n} x_i < c \mid \lambda = 1\right)$.

Μέθοδος Ελεγχοσυνάρτηση Πηλίκου Πιθανοφάνειας.

$X_1,\ldots,X_n \sim f(\chi,\Theta)\quad \tau\upsilon\chi\alpha\iota o \quad \delta\varepsilon\iota\gamma\mu\alpha.$

H0: $\theta\in\Theta_0$ προς

H1 : $\theta\in\Theta_1$



$L(\theta\mid \underset{\sim}{x})=\prod_{\iota=1}^{n} f(x_i,\theta)$.

Πηλίκο πιθανοφάνειας: $\lambda=\dfrac{\sup\limits_{\theta\in\Theta_0} L(\underset{\sim}{x}\mid\theta)}{\sup\limits_{\theta\in\Theta} L(\underset{\sim}{x}\mid\theta)}$

Μικρές τιμές του $\lambda \Rightarrow$ απορρίπτουμε την H_0 .

Κρίσιμη περιοχή : $\lambda\le$c.

$\alpha=P(\lambda\le c\mid H_0\quad \alpha\lambda\eta\theta\eta\varsigma)$

Θεώρημα Wald:

Έστω r περιορισμοί που θέτει η H_0 .

Τότε $-2\log\lambda \underset{n\to\infty}{\overset{D}{\Rightarrow}} X_r^2$.

Παρατήρηση:

Αν H0 : $\theta=\theta_0$ προς

H1 : $\theta\ne\theta_0$, έχουμε ένα περιορισμό.

Μεθοδολογία:

1. Βρίσκουμε εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας $\hat{\theta}\quad \tau o\upsilon\quad \theta$.
2. Βρίσκουμε εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας $\hat{\hat{\theta}}\quad \tau o\upsilon\quad \theta$ δεδομένου ότι ισχύει η H0.
3. Υπολογίζουμε, $\lambda=\dfrac{L\left(\hat{\hat{\theta}}\mid \underset{\sim}{x}\right)}{L\left(\hat{\theta}\mid \underset{\sim}{x}\right)}$.
4. Αναζητούμε T τέτοια ώστε λ συνάρτηση του T.

<u>Παράδειγμα:</u>

$X_1,\dots,X_n \sim \mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$,

σ^2 γνωστό, α επίπεδο σημαντικότητας

$\mathrm{H}_0 : \mu = \mu_0$

$\mathrm{H}_1 : \mu \neq \mu_0$

$$L(\mu / \underset{\sim}{x}) = \prod_{\iota=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\mu)^2} = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{\iota=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

$\mathrm{H}_0 : \hat{\hat{\mu}} = \text{Ε.Μ.Π} \quad \textit{οταν} \quad \textit{ισχυει} \quad \eta \quad \mathrm{H}_0, \hat{\hat{\mu}} = \mu_0$

$\mathrm{H}_1 : \hat{\mu} = \overline{\mathrm{X}}$

$$\lambda = \frac{\sup\limits_{\mu=\mu_0} L(\mu \mid \underset{\sim}{x})}{\sup\limits_{\mu\in R} L(\mu \mid \underset{\sim}{x})} = \frac{\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{\iota=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}}{\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{\iota=1}^{n}(x_i-\overline{\mathrm{X}})^2}} = e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{\iota=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2-\sum_{\iota=1}^{n}(x_i-\overline{\mathrm{X}})^2\right]},$$

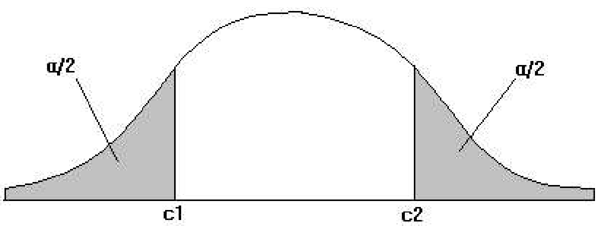
$$\sum_{\iota=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2 - \sum_{\iota=1}^{n}(x_i-\overline{\mathrm{X}})^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\mu_0\sum_{i=1}^{n} x_i + n\mu_0^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\overline{\mathrm{X}}\sum_{i=1}^{n} x_i - n\overline{\mathrm{X}}^2 = -2n\mu_0\overline{\mathrm{X}} + n\mu_0^2 + 2n\overline{\mathrm{X}}^2 - n\overline{\mathrm{X}}^2 = n\left(\overline{\mathrm{X}}-\mu_0\right)^2$$

$$\lambda = e^{-\frac{1}{2\sigma^2}n(\bar{X}-\mu_0)^2} = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2} = e^{-\frac{1}{2}z^2}.$$

Απορρίπτουμε όταν $\lambda \le c \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{2}z^2} \le c \Rightarrow z^2 \ge c^* \Rightarrow z \le c_1$ ή $z \ge c_2$

$\Rightarrow -2\log\lambda = z^2 \sim X_1^2$



<u>Παράδειγμα:</u>

$X_1,\ldots,X_n \sim \mathrm{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$, σ^2 άγνωστο, α επίπεδο σημαντικότητας

$H_0 \quad : \quad \mu=\mu_0$

$H_1 \quad : \quad \mu\neq\mu_0$

Όταν ισχύει η H_0,

$$\hat{\hat{\mu}}=\mu_0$$

$$\hat{\hat{\sigma}}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2$$

Γενικά για όλο τον παραμετρικό χώρο:

$$\hat{\mu}=\overline{\mathrm{X}}$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

$$\lambda=\frac{\left(\dfrac{1}{\hat{\hat{\sigma}}\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\hat{\hat{\sigma}}^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}}{\left(\dfrac{1}{\hat{\sigma}\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{\mathrm{X}})^2}}=\left(\frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\hat{\sigma}}^2}\right)^{n/2}\frac{e^{-n/2}}{e^{-n/2}}$$

$$\frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\hat{\sigma}}^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2}=$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0+\overline{X}-\overline{X})^2}=$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2+2\left(\overline{X}-\mu_0\right)\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})+n\left(\overline{X}-\mu_0\right)^2}=$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2+n\left(\overline{X}-\mu_0\right)^2}=\frac{1}{1+\dfrac{n\left(\overline{X}-\mu_0\right)^2}{(n-1)\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{(n-1)}}}=\frac{1}{1+\dfrac{t^2}{n-1}}$$

Θέτω,

$$t = \frac{\sqrt{n}\left(\bar{X}-\mu_0\right)}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n-1}}} = \frac{\bar{X}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

Άρα $\lambda = \left(\frac{1}{1+\frac{t^2}{n-1}}\right)^{n/2} \leq k \Rightarrow t^2 \geq c \Leftrightarrow t \geq c_1$ ή $t \leq c_1$.

Απορρίπτω αν $t \leq -t_{n-1,a/2}$ ή $t \geq t_{n-1,a/2}$ $(Gosset \quad 1904)$

Εφαρμογή:

$H_0 : \mu = 5,2$

$H_1 : \mu > 5,2$

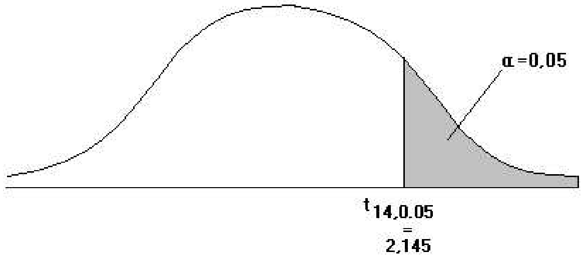
$n = 15$

$\bar{X} = 5,4$

$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 = 2,5$

$a = 0,05$

$$t = \frac{\bar{X}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{5,4-5,2}{\sqrt{\frac{2,5}{14}/15}} = 1,833$$



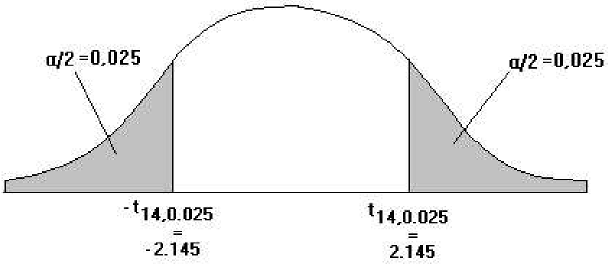
Άρα απορρίπτω την H_0 (γιατί 1,833 >1,761).

Εφαρμογη:

$H_0: \mu = 5,2$

$H_1: \mu \neq 5,2$

$t = 1,833$



Δεν απορρίπτω την H_0 (γιατί 1,833<2,145).

Μονόπλευρος Έλεγχος

$P(t_{14} \geq 1,833) = 0.044 < 0.05$ γι'αυτό απορρίπτω την H_0 στην εφαρμογή 1 και αφού απορρίπτω με 4,4% επίπεδο σημαντικότητας, απορρίπτω και με 5%.

p-value=0.044, είναι το ελάχιστο επίπεδο σημαντικότητας για το οποίο απορρίπτω την μηδενική υπόθεση.

Δίπλευρος Έλεγχος

$P(|t_{14}| \geq 1,833) = P(t_{14} \leq -1,833) + P(t_{14} \geq 1,833) = 0.044 + 0.044 = 0.088 = p - value$

το ελάχιστο επίπεδο σημαντικότητας για το οποίο θα απορρίψω την μηδενική υπόθεση είναι 8,8% , άρα για 5% δεν απορρίπτω.

Ένας έλεγχος ονομάζεται στατιστικά σημαντικός αν p-value <0.05 ή 0.01

Με επίπεδο σημαντικότητας α, αν

p-value<α $\Rightarrow$ απορρίπτω την H_0

p-value>α $\Rightarrow$ δεν απορρίπτω την H_0

Παράδειγμα:

$X_1,\ldots,X_n \quad \tau.\delta. \sim \mathrm{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$,

μ άγνωστο,

α επίπεδο σημαντικότητας

$\mathrm{H}_0 : \sigma^2 = \sigma^2{}_0$

$\mathrm{H}_1 : \sigma^2 = \sigma^2{}_1$

Όταν ισχύει η H_0,

$\hat{\mu} = \overline{\mathrm{X}}$

$\hat{\sigma}^2 = \sigma^2{}_0$

Για όλο τον παραμετρικό χώρο,

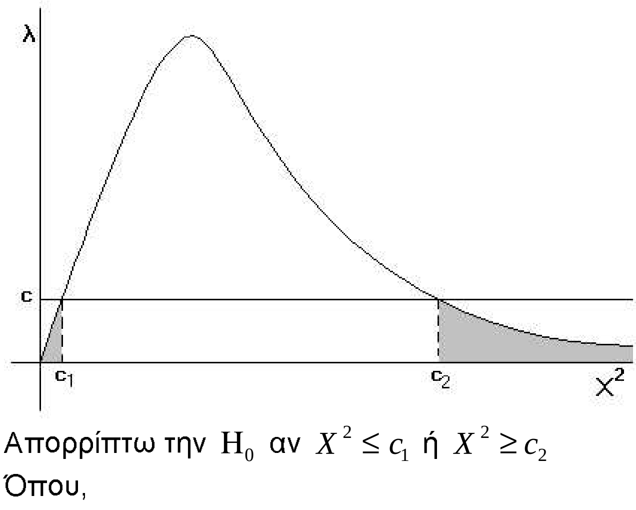
$\hat{\hat{\mu}} = \overline{\mathrm{X}}$

$\hat{\hat{\sigma}}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$

$$\lambda = \frac{\left(\dfrac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma_0{}^2}\sum_{\iota=1}^{n}\left(X_i-\overline{\mathrm{X}}\right)^2}}{\left(\dfrac{1}{\hat{\hat{\sigma}}\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\hat{\hat{\sigma}}^2}\sum_{\iota=1}^{n}\left(X_i-\overline{\mathrm{X}}\right)^2}} = \left(\frac{\hat{\hat{\sigma}}^2}{\sigma_0{}^2}\right)^{n/2} \frac{e^{-\frac{1}{2\sigma_0{}^2}\sum_{\iota=1}^{n}\left(X_i-\overline{\mathrm{X}}\right)^2}}{e^{-n/2}} = \left(\frac{1}{n}X^2\right)^{n/2} e^{-\frac{1}{2}X^2} e^{n/2}$$

όπου,

$$X^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{\sigma_0^2} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$



Απορρίπτω την H_0 αν $X^2 \le c_1$ ή $X^2 \ge c_2$

Όπου,

$c_1 = X^2{}_{n-1,1-a/2}$

$c_2 = X^2{}_{n-1,a/2}$

<u>Παράδειγμα:</u>

$X_1,\ldots,X_{n_1} \sim \mathrm{N}\left(\mu_1,\sigma^2\right)$

$Y_1,\ldots,Y_{n_2} \sim \mathrm{N}\left(\mu_2,\sigma^2\right)$

σ^2 άγνωστο.

$\mathrm{H}_0 : \mu_1 = \mu_2$

$\mathrm{H}_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

$$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{S_P\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} \sim t_{n_1+n_2-2}$$

όπου,

$$S_p^2 = \frac{\left(n_1-1\right)S_x^2 + \left(n_2-1\right)S_y^2}{n_1+n_2-2}.$$

Όταν ισχύει η H_0 ,

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{i=1}^{n} Y_i}{n_1+n_2} = \frac{n_1\overline{X} + n_2\overline{Y}}{n_1+n_2}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n_1+n_2}\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\hat{\mu})^2 + \sum_{j=1}^{n}(Y_j-\hat{\mu})^2\right]$$

Για όλο τον παραμετρικό χώρο,

$$\hat{\hat{\mu}}_1 = \overline{X}$$

$$\hat{\hat{\mu}}_2 = \overline{Y}$$

$$\hat{\hat{\sigma}}^2 = \frac{1}{n_1+n_2}\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 + \sum_{j=1}^{n}(Y_j-\overline{Y})^2\right]$$

$$\frac{1}{n_1+n_2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\hat{\mu})^2 = \frac{1}{n_1+n_2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 + \frac{n_1}{n_1+n_2}(\overline{X}-\hat{\mu})^2$$

$$\frac{1}{n_1+n_2}\sum_{j=1}^{n}(Y_j-\hat{\mu})^2 = \frac{1}{n_1+n_2}\sum_{j=1}^{n}(Y_j-\overline{Y})^2 + \frac{n_2}{n_1+n_2}(\overline{Y}-\hat{\mu})^2$$

Κρίσιμη περιοχή:

$\left|T\right| \geq t_{n_1+n_2-2,\,a/2}$

Παράδειγμα:

$$X_1,\ldots,X_{n_1} \sim \mathrm{N}\left(\mu_1,\sigma^2\right)$$

$$Y_1,\ldots,Y_{n_2} \sim \mathrm{N}\left(\mu_2,\sigma^2\right)$$

$$\mathrm{H}_0 : {\sigma_1}^2 = {\sigma_2}^2$$

$$\mathrm{H}_1 : {\sigma_1}^2 \neq {\sigma_2}^2$$

Αποδεικνύεται ότι το F-test είναι έλεγχος πηλίκου πιθανοφάνειας $F = \dfrac{{S_x}^2}{{S_y}^2}$

Κρίσιμη περιοχή:

$F \leq F_{n_1,n_2,1-a/2}$ ή $F \geq F_{n_1,n_2,a/2}$

Για τον μονόπλευρο έλεγχο, έχω μόνο το ένα μέλος.

Όταν ισχύει η H_0,

$$\hat{\hat{\mu}}_1 = \bar{X}$$

$$\hat{\hat{\mu}}_2 = \bar{Y}$$

$$\hat{\hat{\sigma}}_1^{\,2} = \hat{\hat{\sigma}}_2^{\,2} = \frac{1}{n_1+n_2}\left[\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\bar{X})^2 + \sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\bar{Y})^2\right]$$

Για όλο τον παραμετρικό χώρο,

$$\hat{\mu}_1 = \bar{X}$$

$$\hat{\mu}_2 = \bar{Y}$$

$$\hat{\sigma}_1^{\,2} = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\bar{X})^2$$

$$\hat{\sigma}_2^{\,2} = \frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\bar{Y})^2$$

Παράδειγμα:

$$\left(X_i,Y_i\right) \quad \delta\iota\delta\iota\alpha\sigma\tau\alpha\tau\eta \quad \kappa\alpha\nu o\nu\iota\kappa\eta$$

$$D_i = X_i - Y_i$$

$$\hat{\mu}_\chi - \hat{\mu_y} = \bar{D}, \quad S_D^2$$

$$\mathrm{H}_0 : \mu_D = 0$$

$$\mathrm{H}_1 : \mu_D \neq 0$$

$$t = \frac{D}{S_D/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

Απορρίπτω την H_0, όταν $\left|t\right| \geq t_{n-1,a/2}$.

Αν $\mathrm{H}_1 : \mu_D > 0$, απορρίπτω την H_0 για $t \geq t_{n-1,a}$

$X_1, \ldots, X_{n_1} \sim \mathrm{P}_0\left(\lambda_1\right)$

$Y_1, \ldots, Y_{n_2} \sim \mathrm{P}_0\left(\lambda_2\right)$

$\mathrm{X} \perp Y$

$\mathrm{H}_0 : \lambda_1 = \lambda_2$

$\mathrm{H}_0 : \lambda_1 \neq \lambda_2$

$n_1, n_2 \rightarrow +\infty$

$$\lambda = \frac{\sup\limits_{\theta \in \theta_0} L\left(\theta / \underset{\sim}{X}, \underset{\sim}{Y}\right)}{\sup\limits_{\theta \in \Theta} L\left(\theta / \underset{\sim}{X}, \underset{\sim}{Y}\right)}$$

$$L\left(\theta / \underset{\sim}{X}, \underset{\sim}{Y}\right) = L\left(\lambda_1, \lambda_2 / \underset{\sim}{X}, \underset{\sim}{Y}\right) = \prod_{i=1}^{n_1} \frac{e^{-\lambda_1} \lambda_1^{X_i}}{X_i\,!} \prod_{j=1}^{n_2} \frac{e^{-\lambda_2} \lambda_2^{Y_j}}{Y_j\,!} = \frac{e^{-n_1\lambda_1 - n_2\lambda_2} \lambda_1^{\sum_{i=1}^{n_1} X_i} \lambda_2^{\sum_{j=1}^{n_2} Y_j}}{\prod_{i=1}^{n_1} X_i\,! \prod_{j=1}^{n_2} Y_j\,!}$$

Όταν ισχύει η H_0, $\quad \hat{\hat{\lambda}}_1 = \hat{\hat{\lambda}}_2 = \lambda$

Για όλο τον παραμετρικό χώρο, $\quad \hat{\lambda}_1 = \bar{X}$, $\quad \hat{\lambda}_2 = \bar{Y}$

Θεωρώντας τη λογαριθμική συνάρτηση πιθανοφάνειας,αφού όταν ισχύει η H_0,

$$L\left(\lambda_1, \lambda_2 \mid \underset{\sim}{X}, \underset{\sim}{Y}\right) = \frac{e^{-(n_1+n_2)\lambda} \lambda^{\sum_{j=1}^{n_2} Y_j + \sum_{i=1}^{n_1} X_i}}{\prod_{i=1}^{n_1} X_i\,! \prod_{j=1}^{n_2} Y_j\,!},$$

$$\log L\left(\lambda_1, \lambda_2 \mid \underset{\sim}{X}, \underset{\sim}{Y}\right) = -\left(n_1 + n_2\right)\lambda + \left(\sum_{i=1}^{n_1} X_i + \sum_{j=1}^{n_2} Y_j\right) \log \lambda,$$

$$\frac{d \log L\left(\lambda_1, \lambda_2 \mid \underset{\sim}{X}, \underset{\sim}{Y}\right)}{d\lambda} = 0 \Rightarrow -\left(n_1 + n_2\right) + \left(\sum_{i=1}^{n_1} X_i + \sum_{j=1}^{n_2} Y_j\right)\frac{1}{\lambda} = 0 \Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} X_i + \sum_{j=1}^{n_2} Y_j}{n_1 + n_2} = \frac{n_1\bar{X} + n_2\bar{Y}}{n_1 + n_2}$$

Άρα,

$$\lambda = \frac{e^{-\left(n_1\bar{X} + n_2\bar{Y}\right)} \left(n_1\bar{X} + n_2\bar{Y}\right)^{n_1\bar{X} + n_2\bar{Y}}}{e^{-\left(n_1\bar{X} + n_2\bar{Y}\right)} \bar{X}^{n_1\bar{X}} \bar{Y}^{n_2\bar{Y}} \left(n_1 + n_2\right)^{n_1\bar{X} + n_2\bar{Y}}}$$

$$-2\log\lambda = -2\left[\left(n_1\bar{X} + n_2\bar{Y}\right)\log\left(\frac{n_1\bar{X} + n_2\bar{Y}}{n_1 + n_2}\right) - n_1\bar{X}\log\bar{X} - n_2\bar{Y}\log\bar{Y}\right] \sim X_1^2$$

Υπολογίζω από τα δεδομένα το $-2\log\lambda$.

Απορρίπτω την H_0 , αν $-2\log\lambda < X^2_{1,1-\alpha/2}$ ή $-2\log\lambda > X^2_{1,\alpha/2}$.

Για τους περιορισμούς στο θεώρημα του Wald, $r = \dim\theta - \dim\theta_0 = 2-1=1$

Ασυμπτωτικοί Ελέγχοι υποθέσεων

$X \sim Bin(n,p)$

$H_0 : p = p_0$

$H_1 : p \neq p_0$

$n \to +\infty$

$$Z = \frac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}$$

Απορρίπτω την H_0 , αν $|Z| > z_{\alpha/2}$.

Γενικά,

Έστω $X_1,\dots,X_n \sim f(x,\theta) \quad \tau\upsilon\chi\alpha\iota\o \quad \delta\epsilon\iota\gamma\mu\alpha$

$\hat{\theta} = \text{Ε.Μ.Π}$

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}-\theta\right) \underset{n\to\infty}{\overset{D}{\Rightarrow}} N\left(0,\frac{1}{I(\theta)}\right) = N\left(0,\sigma^2(\theta)\right)$$

Άρα,

$$\frac{\hat{\theta}-\theta}{\sigma(\theta)\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

Απορρίπτω, αν $|Z| > z_{\alpha/2}$

Για την διωνυμική, $\hat{p} = \frac{X}{n}$, $\qquad Z = \frac{\frac{X}{n} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}$.

<u>Σημείωση</u>:

$$\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \overset{D}{\Rightarrow} N(0,1).$$

Αν $0,25 < p < 0,75$ έχουμε καλή προσέγγιση.

Διαφορετικά θέλω n πολύ μεγάλο.

Ελέγχοι Ποσοστών για δύο δείγματα.

$$\mathrm{X} \sim Bin(n_1, p_1)$$

$$Y \sim Bin(n_2, p_2)$$

$$\mathrm{X} \perp Y$$

$$\mathrm{H}_0 : p_1 = p_2$$

$$\mathrm{H}_1 : p_1 \neq p_2$$

$$n_1, n_2 \to +\infty$$

$$\hat{p}_1 = \frac{\mathrm{X}}{n_1} \overset{\alpha\sigma\upsilon\mu\pi\tau\omega\tau\iota\kappa\alpha}{\sim} \mathrm{N}\left(p_1, \frac{p_1(1-p_1)}{n_1} \right)$$

$$\hat{p}_2 = \frac{\mathrm{X}}{n_2} \overset{\alpha\sigma\upsilon\mu\pi\tau\omega\tau\iota\kappa\alpha}{\sim} \mathrm{N}\left(p_2, \frac{p_2(1-p_2)}{n_2} \right)$$

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \sim \mathrm{N}\left(p_1 - p_2, \frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2} \right)$$

Μπορούμε να θεωρήσουμε,

$$\frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} \overset{\substack{\text{οταν ισχυει} \\ \eta \mathrm{H}_0}}{=} \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{p(1-p)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}},$$

'Οταν ισχύει η H_0 για να βρώ την Ε.Μ.Π:

$$L(p) = \binom{n_1}{X} p^X (1-p)^{n_1 - X} \binom{n_2}{Y} p^Y (1-p)^{n_2 - Y},$$

$$l(p) = (X+Y)\log p + \left(n_1 + n_2 - (X+Y)\right)\log(1-p) + k$$

$$S(p) = \frac{X+Y}{p} - \frac{\left(n_1 + n_2 - (X+Y)\right)}{1-p}$$

$$S(p) = 0 \Rightarrow \hat{p} = \frac{X+Y}{n_1 + n_2}$$

$$Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}, \quad |Z| > z_{a/2}$$

Εφαρμογή:

$$\mathrm{X}=6,\quad n_1=100,\quad Y=5,\quad n_2=80,\quad a=0,01$$

$$\mathrm{H}_0 : p_1 = p_2$$

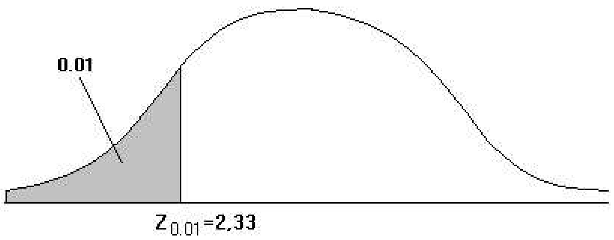
$$\mathrm{H}_1 : p_1 < p_2$$

$$\hat{p}_1=\frac{\mathrm{X}}{n_1}=\frac{6}{100}$$

$$\hat{p}_2=\frac{\mathrm{X}}{n_2}=\frac{5}{80}$$

$$\hat{p}=\frac{X+Y}{n_1+n_2}=\frac{11}{180}$$

$$Z=\frac{\frac{6}{100}-\frac{5}{80}}{\sqrt{\frac{11}{180}\left(1-\frac{11}{180}\right)\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{80}\right)}}=-0,379$$



Άρα δεν απορρίπτω την H_0 .

Ισοδυναμία μεταξύ Διαστημάτων Εμπιστοσύνης και Ελέγχου Υποθέσεων

$X_1,\ldots,X_n \sim f(x,\theta) \quad \tau\upsilon\chi\alpha\iota o \quad \delta\varepsilon\iota\gamma\mu\alpha$

Θεωρώ διάστημα εμπιστοσύνης για το θ

$\mathrm{A}(\underset{\sim}{X})$ με βαθμό εμπιστοσύνης $1-\alpha$.

Δηλ. $\mathrm{P}\big(\theta \in \mathrm{A}(\underset{\sim}{X})\big)=1-\alpha$

Έστω ϕ ελεγχοσυνάρτηση για τη μηδενική υπόθεση

$\mathrm{H}_0 : \theta = \theta_0 \quad \pi\rho o\varsigma$

$\mathrm{H}_1 : \theta \neq \theta_0$

Περιοχή απόρριψης της H_0 είναι το $\mathrm{A}^c(\underset{\sim}{X})$.

P(απορρίπτω την $\mathrm{H}_0 | \mathrm{H}_0$ αληθής)= $\mathrm{P}\big(\theta \in \mathrm{A}^c(\underset{\sim}{X}) | \theta = \theta_0\big) = \alpha$

δηλαδή η περιοχή αποδοχής μιάς ελεγχοσυνάρτησης επιπέδου σημαντικότητας α , για

$\mathrm{H}_0 : \theta = \theta_0 \quad \pi\rho o\varsigma$

$\mathrm{H}_1 : \theta \neq \theta_0$

αποτελεί διάστημα εμπιστοσύνης για το θ , με βαθμό εμπιστοσύνης $1-\alpha$.

Παράδειγμα:

$X_1,\ldots,X_n \sim \mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$, σ^2 γνωστό, α επίπεδο σημαντικότητας

$\mathrm{H}_0 : \mu = \mu_0$

$\mathrm{H}_1 : \mu \neq \mu_0$

$$Z = \frac{\sqrt{n}\left(\bar{X}-\mu_0\right)}{\sigma},$$

Απορρίπτω την H_0 αν $|Z| > z_{\alpha/2}$

Άρα η περιοχή αποδοχής είναι

$$|Z| \le z_{\alpha/2} \Rightarrow \left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \le z_{\alpha/2} \Rightarrow -z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \bar{X}-\mu \le z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \bar{X}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Δέλτα Μέθοδος

$\{X_n\}$ ακολουθία τ.μ

$X_n \xrightarrow{D} N(\mu, \sigma^2)$

g παραγωγίσιμη $\Rightarrow g(X_n) \xrightarrow{D} ?$

Από την ανάπτυξη κατα Taylor,

$$g(X_n) \approx g(\mu) + (X_n - \mu) g'(\mu) + \ldots$$

$$g(X_n) \xrightarrow{D} g(\mu) + g'(\mu) N(0, \sigma^2) = N\left(g(\mu), (g'(\mu))^2 \sigma^2\right)$$

Παράδειγμα:

$X_1, \ldots, X_n \sim f(x, \theta) = \theta e^{-\theta \chi} \quad \tau\upsilon\chi\alpha\iota o \quad \delta\epsilon\iota\gamma\mu\alpha$

$$\hat{\theta} = \frac{1}{\overline{X}}$$

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{\overline{X}} - \theta\right) \overset{D}{\Rightarrow} N(0, \theta^2)$$

$$\frac{1}{\overline{X}} \underset{\alpha\sigma\upsilon\mu\pi\tau\omega\tau\iota\kappa\alpha}{\overset{D}{\sim}} N\left(\theta, \frac{\theta^2}{n}\right)$$

$$g(X) = \frac{1}{X}, \quad g'(X) = -\frac{1}{X^2} \quad .$$

Από την δέλτα μέθοδο, $\overline{X} \underset{\alpha\sigma\upsilon\mu\pi\tau\omega\tau\iota\kappa\alpha}{\overset{D}{\sim}} N\left(\frac{1}{\theta}, \frac{\theta^2}{n} \frac{1}{\theta^4}\right), \Rightarrow \sqrt{n}\left(\overline{X} - \frac{1}{\theta}\right) \overset{D}{\Rightarrow} N\left(0, \frac{1}{\theta^2}\right).$

Μπορούμε έτσι να βρούμε ασυμπτωτικά Δ.Ε. για το $\frac{1}{\theta}$.

Από την κατανομή του $\frac{1}{\overline{X}}$ =Ε.Μ.Π, βρίσκουμε την κατανομή του $\overline{X}$

Παράδειγμα:

$$\overline{X}^3 \sim N\left(\frac{1}{\theta^3}, \frac{\theta^2}{n} \frac{9}{\theta^8}\right) = N\left(\frac{1}{\theta^3}, \frac{9}{n\theta^6}\right).$$

$$g(X) = \frac{1}{X^3}.$$

$$g(\theta) = \frac{1}{\theta^3}, \quad g'(\theta) = -\frac{3}{\theta^4}, \quad (g'(\theta))^2 = \frac{9}{\theta^8}$$