<u>Ασκήσεις Επανάληψης ΜΑΣ 061</u>

1. Το δοχείο Ι περιέχει 7 μαύρα και 3 λευκά σφαιρίδια, το δοχείο ΙΙ περιέχει 4 μαύρα και 2 λευκά σφαιρίδια. Παίρνουμε τυχαία ένα σφαιρίδιο από το Ι και το τοποθετούμε στο ΙΙ, μετά παίρνουμε τυχαία ένα σφαιρίδιο από το ΙΙ. Ποια η πιθανότητα:

α) Το πρώτο σφαιρίδιο να είναι λευκό.

β) Το πρώτο σφαιρίδιο να είναι λευκό και το δεύτερο να είναι μαύρο.

γ) Το δεύτερο σφαιρίδιο να είναι μαύρο.

δ) Το δεύτερο σφαιρίδιο να είναι μαύρο, όταν το πρώτα ήταν λευκό

ε) Το πρώτο σφαιρίδιο να ήταν λευκό όταν το δεύτερο είναι μαύρο.

Λύση:

Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

Α={Το πρώτο σφαιρίδιο είναι λευκό}, Β={Το δεύτερο σφαιρίδιο είναι μαύρο}, τότε:

α) $P(A) = \frac{3}{10}$, β) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A) = \frac{3 \cdot 4}{10 \cdot 7} = \frac{12}{70}$, γ) $P(B) =$

$$P(A \cap B) + P(A' \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A) + P(A') \cdot P(B \mid A') = \frac{3}{10}\frac{4}{7} + \frac{7 \cdot 5}{10 \cdot 7} = \frac{47}{70}$$

δ) $P(B \mid A) = \frac{4}{7}$, ε) $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{12/70}{47/70} = \frac{12}{47}$.

2. Στην Κύπρο το 80% των μαθητών φοιτούν σε δημόσια σχολεία και το 20% σε ιδιωτικά σχολεία. Από τα παιδιά που φοιτούν σε δημόσια σχολεία το 55% συνεχίζει τις σπουδές του σε κολέγιο ή στο Πανεπιστήμιο στην Κύπρο, το 25% συνεχίζει σπουδές στο εξωτερικό και το 20% δεν συνεχίζει τις σπουδές του. Από τα παιδιά που φοιτούν σε ιδιωτικά σχολεία, το 25% συνεχίζει τις σπουδές του στην Κύπρο, το 60% συνεχίζει σπουδές στο εξωτερικό και το 15% δεν συνεχίζει τις

σπουδές του.

i) Ποιο ποσοστό των μαθητών στην Κύπρο συνεχίζει τις σπουδές του σε ιδρύματα της Κύπρου; Ποιο ποσοστό δεν συνεχίζει τις σπουδές του;
ii) Από τους Κύπριους φοιτητές/σπουδαστές σε ιδρύματα της Κύπρου, ποιο ποσοστό προέρχεται από δημόσια σχολεία;

Λύση:

Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:
Α={Ο μαθητής φοιτά σε δημόσιο σχολείο},
Β={Ο μαθητής συνεχίζει τις σπουδές του στην Κύπρο},
Γ={Ο μαθητής συνεχίζει τις σπουδές του στο εξωτερικό},
Δ={Ο μαθητής δεν συνεχίζει τις σπουδές του}.

Δίνονται: $P(A) = 0.80 \Rightarrow P(A') = 0.20,\ P(B \mid A) = 0.55,\ P(\Gamma \mid A) = 0.25,$

$P(\Delta \mid A) = 0.20,\ P(B \mid A') = 0.25,\ P(\Gamma \mid A') = 0.60,\ P(\Delta \mid A') = 0.15.$

i) $P(B) = P(A) \cdot P(B \mid A) + P(A') \cdot P(B \mid A') = 0.80 \cdot (0.55) + (0.20) \cdot (0.25) = 0.49$

Δηλαδή το 49% των μαθητών στην Κύπρο, συνεχίζουν τις σπουδές τους σε ιδρύματα της Κύπρου. Επίσης:

$P(\Delta) = P(A) \cdot P(\Delta \mid A) + P(A') \cdot P(\Delta \mid A') = 0.80 \cdot (0.20) + (0.20) \cdot (0.15) = 0.19$

ii) $P(A \mid B) = \dfrac{P(A) \cdot P(B \mid A)}{P(B)} = \dfrac{(0.80) \cdot (0.55)}{0.49} = 0.898$ ή το 89.8% των Κυπρίων μαθητών/τριών, σε ιδρύματα της Κύπρου, προέρχονται από δημόσια σχολεία.

3. Ένα κτήριο έχει το ισόγειο και 3 ακόμη ορόφους και στον ανελκυστήρα (elevator) βρίσκονται 6 άτομα. Αν τα άτομα κατεβαίνουν τυχαία σε κάθε όροφο, ποια η πιθανότητα:

i) Να κατέβουν όλοι σε έναν όροφο;

ii) Να κατέβουν όλοι στο δεύτερο ή στον τρίτο όροφο;

iii) Να κατέβουν δύο άτομα σε κάθε όροφο;

Λύση:

Κάθε άτομο μπορεί να κατέβει σε έναν από τους 3 ορόφους, οπότε υπάρχουν $N = 3^6 = 729$ δυνατότητες ή ο δειγματοχώρος S έχει 729 σημεία.

i) Αν A_1 ={Όλοι κατεβαίνουν στον πρώτο όροφο}, τότε $N(A_1) = 1$ και

$P(A_1) = 1/729$

Ορίζουμε τα A_2, A_3 αντίστοιχα με το A_1 και A={Όλοι κατεβαίνουν στον β ή γ όροφο}, τότε

$P(A) = P(A_1) + P(A_1) + P(A_2) = 3/729 = 0.004$.

ii) Αν B={Όλοι κατεβαίνουν στον β ή γ όροφο}, τότε $N(B) = 2^6 = 64$ και

$P(B) = 64/729 = 0.088$.

iii) Αν Γ={Δύο άτομα κατεβαίνουν στον α όροφο, 2 στον β όροφο και 3 κατεβαίνουν στον γ όροφο}, τότε $N(\Gamma) = \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2} = 15 \cdot 6 = 90$ και

$P(\Gamma) = 90/729 = 0.123$.

4. Σε ένα δοχείο είναι 5 μαύρα και 4 λευκά σφαιρίδια, παίρνουμε 3 σφαιρίδια από το δοχείο.

Να βρεθεί η πιθανότητα, P(X=x)=f(x), να πάρουμε x μαύρα σφαιρίδια, με: i) x=0 , ii) x=1, iii) x=2, iv) x=3, όταν παίρνουμε:

α) Ένα-ένα με επανάθεση, β) Τρία σφαιρίδια μαζί

Λύση:

α) Έχουμε τη διωνυμική κατανομή B(3, 5/9) που σημαίνει ν=3 ανεξάρτητες προσπάθειες με πιθανότητα επιτυχίας, σε κάθε προσπάθεια, p=5/9.

i) $f(0) = \binom{3}{0} \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^0 \left(\frac{4}{9}\right)^3 = \left(\frac{4}{9}\right)^3 = 0.088$,

ii) $f(1) = \binom{3}{1} \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^1 \left(\frac{4}{9}\right)^2 = \left(\frac{3 \cdot 5 \cdot 4^2}{9^3}\right) = 0.329$

iii) $f(2) = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^2 \left(\frac{4}{9}\right)^3 = \left(\frac{3 \cdot 5^2 \cdot 4}{9^3}\right) = 0.412$,

iv) $f(3) = \binom{3}{3} \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^3 \left(\frac{4}{9}\right)^0 = \left(\frac{5^3}{9^3}\right) = 0.171$

β) Εδώ έχουμε υπεργεωμετρική κατανομή με:

ι) $f(0) = \frac{\binom{5}{0} \cdot \binom{4}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{4}{84} = 0.048$, ιι) $f(1) = \frac{\binom{5}{1} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{9}{3}} = \frac{5 \cdot 6}{84} = 0.357$,

ιιι) $f(2) = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{4}{1}}{\binom{9}{3}} = \frac{10 \cdot 4}{84} = 0.476$, $f(3) = \frac{\binom{5}{3} \cdot \binom{4}{0}}{\binom{9}{3}} = \frac{10 \cdot 1}{84} = 0.119$

5. Σε ένα δοχείο είναι 9 κλήροι από τους οποίους οι 3 έχουν κόκκινο χρώμα, οι 4 έχουν μαύρο χρώμα και οι 2 έχουν λευκό χρώμα. Παίζουμε το παρακάτω παιχνίδι:

Παίρνουμε έναν κλήρο και αν είναι κόκκινος τότε κερδίζουμε 2 λίρες, αν είναι μαύρος κερδίζουμε 1 λίρα και εν είναι λευκός χάνουμε 5 λίρες.. Ποιο είναι το αναμενόμενο κέρδος και ποια είναι η τυπική απόκλιση.

Λύση:

α) Αν X είναι το κέρδος σε ένα παιχνίδι, τότε

$P(X=2)=\frac{3}{9},\ P(X=1)=\frac{4}{9},\ P(X=-5)=\frac{2}{9}$, οπότε η αναμενόμενη ή μέση τιμή είναι:

$\mu = E(X) = 2\cdot\frac{3}{9}+1\cdot\frac{4}{9}+(-5)\cdot\frac{2}{9}=0$, η διασπορά και η τυπική απόκλιση είναι:

$$\sigma^2 = Var(X) = 2^2\cdot\frac{3}{9}+1^2\cdot\frac{4}{9}+(-5)^2\cdot\frac{2}{9}-\mu^2=\frac{66}{9},\ \sigma=\sqrt{\frac{66}{9}}=2.71$$

6. Αν Z~N(0, 1) , να υπολογιστούν:

ι) P(-1≤ Z ≤1), ii) P(Z ≥-1), iii) P(0.75 ≥ Z≥ 0.25), iv) P(Z≤-1.5),
v) P(0.38 ≤ Z≤1.42)

Λύση:

ι) $P(-1\le Z\le 1)\approx \Phi(1)-\Phi(-1)=\Phi(1)-(1-\Phi(1))=2\cdot 0.84134-1=0.68268$

ιι) $P(Z\ge -1)\approx 1-\Phi(-1))=\Phi(1)=0.84134$

ιιι) $P(0.25\le Z\le 0.75)\approx \Phi)0.75)-\Phi(0.25)=0.77337-0.59871=0.17466$

iv) $P(Z\le -1.5)\approx 1-\Phi(1.5)=1-0.93319=0.06681$

v) $P(0.38\le Z\le 1.42)=\Phi(1.42)-\Phi(1.38)=0.27417$

7. Αν Z~N(0, 1) να υπολογιστεί η τιμή του c ώστε:

ι) P(Z ≤ c) = 0.9554, ii) P(Z ≤ c)=0.3085, iii) P(Z≥ c) =0.321,

iv) P(1 ≤ Z ≤ c)=0.019

Λύση:

i) $P(Z \le c) = 0.9554 \Rightarrow c = 1.7$

ii) $P(Z \le c) = 0.3085 \Rightarrow c < 0 \Rightarrow P(Z \le -c) = 1 - 0.3085 = 0.6915$
$\Rightarrow -c = 0.5 \Rightarrow c = -0.5$

iii) $P(Z \ge c) = 0.321 \Rightarrow P(Z \le c) = 1 - 0.321 == 0.679 \Rightarrow c = 0.465$

iv) $P(1 \le Z \le c) = 0.019 \Rightarrow \Phi(c) - \Phi(1) = 0.019 \Rightarrow$
$\Phi(c) = 0.84134 + 0.019 = 0.86034 \Rightarrow c = 1.88$

8. Ο μηνιαίος μισθός X σε Ευρώ των υπαλλήλων μιας επιχείρησης ακολουθεί την κανονική κατανομή X~N(1200, 90000). Ποιο ποσοστό των υπαλλήλων της επιχείρησης παίρνει μισθό X ≥1600 Ευρώ.

Λύση:

$P(X \ge 1600) = P(Z \ge \frac{1600 - 1200}{\sqrt{90000}} = 1.33) = 1 - \Phi(1.33) = .09176$ ή 9.176%..

9. Δίνεται η τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) Χ και η συνάρτηση πιθανότητας f(x) στον πίνακα:

X	-15	-2	4	8	14
f(x)	0.30	0.25	0.15	0.10	0.20

ι) Να γίνει η γραφική παράσταση (x, f(x)).

ιι) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή μ και τη διασπορά σ^2 της τ.μ. Χ

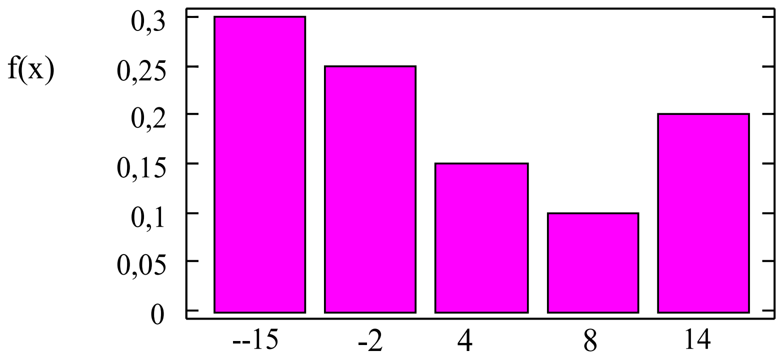
ιιι) Να βρεθεί η P$(X \le 8 \mid X \ge -2)$

ιv) Παίρνουμε 5 ανεξάρτητες παρατηρήσεις από την τ.μ. Χ, ποια είναι η πιθανότητα να είναι 3 στο διάστημα [2, 8], δηλαδή να είναι $(-2 \le X \le 8)$

v) Να βρεθεί η αθροιστική συνάρτηση κατανομής F(x) της τ.μ. Χ.

Λύση:

Γραφική παράσταση της κατανομής



ii) $\mu = E(X) = (-15)\cdot(0.30) + (-2)\cdot(0.25) + 4\cdot(0.15) + 8\cdot(0.10) + 14\cdot(0.20) = -0.8$.

Η διακύμανση υπολογίζεται ανάλογα και είναι ίση με 115.86.

iii) $P(X \le 8 \mid X \ge -2) = \dfrac{P(-2 \le X \le 8)}{P(X \ge -2)} = \dfrac{0.50}{0.70} = 0.71$

iv) $P(-2 \leq X \leq 8) = 0.50 = p$, Θέλουμε 3 επιτυχίες σε 5 προσπάθειες. Εδώ θεωρούμε επιτυχία αν είναι $-2 \leq X \leq 8$. Αν Y είναι το πλήθος των επιτυχιών σε 5 προσπάθειες, τότε

$Y \approx B(5,0.5)$ δηλαδή έχει τη διωνυμική κατανομή, τότε

$$P(Y = 3) = f(3) = \binom{5}{3} \cdot (0.5)^3 \cdot (0.5)^2 = 0.3125$$

v) $$F(x) = \begin{cases} 0 & \alpha\nu \quad x < -15 \\ 0.30 & \alpha\nu \quad -15 \leq x < -2 \\ 0.55 & \alpha\nu \quad -2 \leq x < 4 \\ 0.70 & \alpha\nu \quad 4 \leq x < 8 \\ 0.80 & \alpha\nu \quad 8 \leq x < 14 \\ 1.0 & \alpha\nu \quad 14 \leq x \end{cases}$$

10. Σε μια αίθουσα είναι 8 άτομα 4 άνδρες και 4 γυναίκες. Παίρνουμε τυχαία 3 άτομα και μας ενδιαφέρει το πλήθος Χ των ανδρών που πήραμε.

ι) Να βρεθεί η κατανομή της τ.μ. Χ, η μέση τιμή μ και η διασπορά της σ^2.

ιι) Αν επαναλάβουμε το ίδιο το πείραμα 6 φορές, παίρνοντας κάθε φορά 3 άτομα από τα 8, ποια η πιθανότητα να υπάρχει μια τουλάχιστον γυναίκα στις 2 από τις 6 φορές;

Λύση:

ι) $P(X = x) = f(x) = \dfrac{\binom{4}{x} \cdot \binom{4}{3-x}}{\binom{8}{3}}$ $x = 0.,1, 2, 3$, τότε

$$f(0)=\frac{4}{56},\ f(1)=\frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{4}{2}}{56}=\frac{24}{56},\ f(2)=\frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{1}}{56}=\frac{24}{56},\ f(3)=\frac{4}{56}$$

$\mu=E(X)=0\cdot\frac{4}{56}+1\cdot\frac{24}{56}+2\cdot\frac{4}{56}=\frac{84}{56}=1.5$ ή για την υπεργεωμετρική ισχύει:

$\mu=E(X)=\nu\cdot\frac{M}{N}=\frac{12}{8}=1.5$. Επίσης για τη διασπορά της υπεργεωμετρικής ισχύει:

$\sigma^2=\nu\cdot\frac{M}{N}\cdot\frac{N-M}{N}\cdot\frac{N-\nu}{N-1}=3\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{8-3}{7}=\frac{30}{56}=0.536$.

11. Τα έξοδα ενός φοιτητή/τριας την εβδομάδα είναι ένα ποσό X, σε Λ.Κ, που ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή μ=48 και τυπική απόκλιση σ=5, $X\approx N(48,25)$, να υπολογιστούν:

ι) $P(42\le X\le 56)$, $P(52\le X)$,.

ιι) Τι ποσό πρέπει να έχει μια εβδομάδα αν θέλει να μη το ξεπεράσει με πιθανότητα 0.90;

ιιι) Η πιθανότητα να ξοδέψει τουλάχιστον από 52 Λ.Κ. σε 2 από τις 4 εβδομάδες του μήνα;

Λύση:

i) $P(42\le X\le 56)=P(\frac{42-48}{\sqrt{25}}\le Z\le\frac{56-48}{\sqrt{25}})=P(-1.20\le Z\le 1.60)=$,

$\Phi(1.60)-\Phi(-1.20)=\Phi(1.60)+\Phi(1.20)-1=0.83013$

$P(X\ge 52)=P(Z\ge\frac{52-48}{25}=0.80)=1-\Phi(0.80)=0.21186$.

ii) Αν c είναι το ποσό που στέλνουν οι γονείς την εβδομάδα, τότε:

$P(X \leq c) = 0.90 \Rightarrow P(Z \leq \frac{c-48}{\sqrt{25}}) = 0.90 \Rightarrow \frac{c-48}{5} = 1.29 \Rightarrow c = 54.45$ Λ.Κ.

ιιι) Θεωρούμε επιτυχία αν σε μια εβδομάδα ο φοιτητής/τρια ξοδέψει τουλάχιστον 52 Λ.Κ. και βρήκαμε στο (ι) ότι $p = P(X \geq 52) = 0.21186$. Αν Y είναι το πλήθος των επιτυχιών σε 4 εβδομάδες, τότε $Y \sim B(4, 0.21186)$ και ζητάμε να έχουμε 2 επιτυχίες, τότε:

$P(Y = 2) = \binom{4}{2} \cdot (0.21186)^2 \cdot (0.78814)^2 = 0.167$.