<u>**Διωνυμική Τυχαία Μεταβλητή**</u>

Έστω τυχάιο πείραμα για το οποίο ισχύουν τα παρακάτω:

1. Το πείραμα αποτελείται από ακολουθία **η** δοκιμών, όπου **η** κάποιος συγκεγκριμένος ακέραιος.
2. Η κάθε δοκιμή είναι η ίδια με **2** δυνατά αποτελέσματα.

   Συμβολισμός: (Α).(Ε) → Επιτυχία

   ↓

   Αποτυχία
3. Οι δοκιμές είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.
4. Η πιθανότητα επιτυχίας είναι <u>σταθερή</u> για κάθε δοκιμή.

   Συμβολισμός: $P=P(E)$

<u>**Ορισμός:**</u> Ένα τυχαίο πείραμα που ικανοποιεί 1-4 ονομάζεται διωνυμικό.

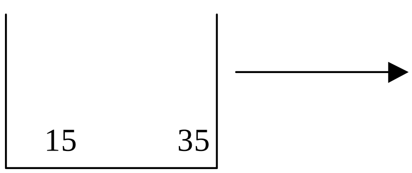
<u>Παραδείγματα:</u>

1. Ρίψη νομίσματος , η=10 φορές

$$P(K)=P(\Gamma)=\frac{1}{2}$$

Αν Κ = "επιτυχία" τότε αυτό είναι διωνυμικό πείραμα με η=10 και P=1/2.

2. Έστω μια πόλη έχει 50 εστιατόρια, εκ των οποίων τα 15 έχουν πρόβλημα υγιεινής. Πέντε επιθεωρητές διαλέγουν τυχαία ένα εστιατόριο για επίσκεψη με τον παρακάτω τρόπο.



Παίρνουμε 1 χωρίς επανατοποθέτηση

Ονομάζουμε την **i** δοκιμασία (για i = 1,2,3,4,5) <u>επιτυχία</u> αν το εστιατόριο δεν έχει πρόβλημα.

α)Οι δοκιμές δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους (δεν ισχύει το 3).

β) $P(E_1)$ = P(Ε στην 1η δοκιμασία) = 35/50 =0.7

$$P(E2)=P(E1\cap E2)+P(A1\cap E2)=P\left(E2/_{E1}\right)P(E1)+P\left(E2/_{A1}\right)P(A1)=\frac{34}{49}\cdot\frac{35}{50}+\frac{35}{49}\cdot\frac{15}{50}=0.7$$

Μπορούμε να δούμε ότι η P(Ε στην 3η δοκιμή) = 0.70 <u>αλλά</u> P(Ε στην 4η δοκιμή) = 0.67 και η P(Ε στην 5η δοκιμή) = 0.76

΄Αρα αυτό δεν ειναι <u>διωνυμικό</u> πείραμα.

<u>Ορισμος:</u> Έστω διωνυμικό πείραμα με **η** δοκιμές. Διωνυμική Τυχαία Μεταβλητή X είναι εκείνη η τυχάια μεταβλητή η οποία <u>μετρά</u> τον αριθμό επιτυχιών σε **η** προσπάθειες.

΄Αρα X= # E στις **η** δοκιμές.
Συμβολισμός: X~ Bin (η, ρ)

<u>Συνάρτηση μάζας πιθανότητας:</u>

Θέλω να βρώ την $P(X=\chi) = \big(\underbrace{E\ldots E}_{\chi \text{ φορές}} \quad \underbrace{A\ldots A}_{\eta-\chi \text{ φορές}} \big)$

<u>Παράδειγμα:</u> Ρίψη νομίσματος , η=3 φορές , E = “κορώνα”, εξαιτίας του ότι το νόμισμα έχει πρόβλημα και δείχνει περισσότερες κορώνες η P(E) = 2/3 = ρ
X= # κ σε 3 δοκιμασίες , X=0,1,2,3

$$P(X=0) = P(\Gamma\Gamma\Gamma) = P(\Gamma)P(\Gamma)P(\Gamma) = \binom{3}{0}\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^3$$

0 επιτυχίες, όλες αποτυχίες

$$P(X=1) = P\begin{pmatrix} KKK \\ \Gamma K\Gamma \\ \Gamma\Gamma K \end{pmatrix} = \binom{3}{1}\binom{2}{3}\binom{1}{3}^2$$

$$P(X=2) = P\begin{pmatrix} KK\Gamma \\ \Gamma KK \\ K\Gamma K \end{pmatrix} = \binom{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^1$$

$$P(X=3) = P(KKK) = \binom{3}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^0$$

Γενικά η συνάρτηση μάζας πιθανότητας της X

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=\chi)=\binom{\eta}{\chi}\rho^{\chi}(1-\rho)^{\eta-\chi}$$

Το ενδεχόμενο $\{X=\chi\}=\{\underbrace{E\ldots E}_{\chi \text{ φορές}} \quad \underbrace{A\ldots A}_{\eta-\chi \text{ φορές}}\}$

<u>Παράδειγμα:</u>

X= # K σε η=6 ρίψεις , P(K) = 1/2 =ρ

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=3)=\binom{6}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}=0.313$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}\geq 3)=\mathrm{P}(\mathrm{X}=3)+\mathrm{P}(\mathrm{X}=4)+\mathrm{P}(\mathrm{X}=5)+\mathrm{P}(\mathrm{X}=6)=\binom{6}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}+\ldots+\binom{6}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{0}=0.656$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}\leq 1)=\mathrm{P}(\mathrm{X}=0)+\mathrm{P}(\mathrm{X}=1)=\binom{6}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{6}+\binom{6}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{5}$$

Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής δίνεται από :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}\leq \chi)=\sum_{\psi=0}^{\chi}\binom{\eta}{\psi}\rho^{\psi}(1-\rho)^{\eta-\psi}$$

X=0,1,2,….,η

Παράδειγμα:

1. 20% από τα αντίγραφα ενός βιβλίου δεν δένονται επιτυχώς. Έστω Χ=# ανάμεσα σε 15 βιβλία που δεν δένονται επιτυχώς.

$$\mathrm{P} = \frac{20}{100}, \eta = 15$$

P(το πολύ 8) = P(X≤8) =0.999

P(ακριβώς 8) = P(X=8) = P(X ≤ 8) - P(X ≤ 7) =0.999 – 0.996 = 0.003

P(τουλάχιστον 8) = P(X ≥ 8) = 1- P(X ≤ 7) =1 – 0.996 = 0.004

P(μεταξύ 4 και 7) = P(4 ≤ X ≤ 7)= P(X ≤ 7) - P(X ≤ 3) = 0.996 – 0.648 = 0.348

Η μέση τιμή της X ~Bin (η,ρ) είναι Ε(χ) =η.ρ και η διακύμανση είναι Var(x) =η.ρ.(1-ρ)

Από προηγούμενο παράδειγμα:

$$\left.\begin{array}{l} \eta = 15 \\ \rho = \frac{1}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{E}(\chi) = 15.\left(\frac{1}{5}\right) = 3$$

$$Var(X) = (15).\left(\frac{1}{5}\right).\left(\frac{4}{5}\right) = 2,4$$

$$\sigma = \sqrt{Var(\mathrm{X})} = \sqrt{2.4} = 1.549$$