ΔΙΑΛΕΞΗ #23

P – values

Έστω ότι η κατανομή μιας στατιστικής συνάρτησης για τον έλεγχο μιας μηδενικής υπόθεσης έχει υπολογιστεί. Τότε η κρίσιμη περιοχή σε επίπεδο σημαντικότητας α, δίνεται από τον υπολογισμό μιας τιμής (π.χ $Z \le Z\alpha/2$). Το μικρότερο επίπεδο σημαντικότητας για το οποίο η H_0 απορρίπτεται ονομάζεται p-value.

Γενικά αν p-value ≤ α ⇒ απορρίπτουμε H_0 σε επίπεδο σημαντικότητας α

p-value > α ⇒ δεν απορρίπτουμε H_0 σε επίπεδο σημαντικότητας α

Θα βρούμε την p-value για το παρακάτω πρόβλημα.

Έστω $X_1,\ldots\ldots, X_{35}$ τυχαιο δειγμα απο αγνωστη κατανομη.

Υποθέτουμε ότι $\bar{x} = 31.4$ και S = 1.2

Ελέγχω την H_0: μ = 32 προς H_a: μ ≠ 32

Θεωρώ $Z = \dfrac{31.4-32}{1.2/\sqrt{35}} = -2.96$

Η p-value είναι $P(|Z| \ge 2.96) = 2\,(1 - \Phi(2.96)) = 0.003$

Άρα σε επίπεδο α = 0.01 η H_0 απορρίπτεται.

<u>Συμπερασματολογία για δύο δείγματα.</u>

Έλεγχος για την διαφορά 2 μέσων τιμών από κανονικούς πληθυσμούς όταν οι διακυμάνσεις είναι γνωστές.

Γενικά ισχύει το παρακάτω:

Έστω $X_1,\ldots\ldots, X_n \sim N(\mu_\chi, \sigma^2_\chi)$

$Y_1,\ldots\ldots, Y_m \sim N(\mu_Y, \sigma^2_Y)$

$$\Big\} \Rightarrow \bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_\chi - \mu_Y, \frac{\sigma^2_\chi}{n} + \frac{\sigma^2_v}{m}\right)$$

X και Y ανεξάρτητα

Έστω ότι ελέγχω $H_0: \mu_\chi - \mu_Y = \Delta$ προς $H_a: \mu_\chi - \mu_Y > \Delta$
σε επίπεδο σημαντικότητας α.

$$Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_\chi - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma^2_\chi}{n} + \frac{\sigma^2_\nu}{m}}} = \sim N(0,1).$$

Εναλλακτικές	**Χωρία Απόρριψης**
$H_a: \mu_\chi - \mu_Y > \Delta$	$Z \geq Z_\alpha$
$H_a: \mu_\chi - \mu_Y < \Delta$	$Z \leq Z_\alpha$
$H_a: \mu_\chi - \mu_Y \neq \Delta$	$Z \leq -Z_{\alpha/2}$ ή $Z \geq Z_{\alpha/2}$

Ένα (1 – α)% Δ.Ε για την διαφορά $\mu_\chi - \mu_Y$ δίνεται από

$$(\bar{X} - \bar{Y}) \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma^2_\chi}{n} + \frac{\sigma^2_\nu}{m}}$$

<u>Παράδειγμα:</u>

20 μετρήσεις αντοχής μέταλλου Α δίνουν $\bar{X} = 29.8$
και 25 μετρήσεις αντοχής μέταλλου Β δίνουν $\bar{Y} = 34.7$

Έστω ότι οι μετρήσεις αντοχής του Α έχουν κανονική κατανομή με $\sigma_A = 4$
και έστω ότι οι μετρήσεις αντοχής του Β έχουν κανονική κατανομή με $\sigma_B = 5$

Να ελεγχθεί η $H_0: \mu_A - \mu_B = 0$ προς $H_a: \mu_A - \mu_B \neq 0$ σε α = 0.01

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - 0}{\sqrt{\frac{\sigma^2_A}{20} + \frac{\sigma^2_B}{25}}} = \frac{29,8 - 34,7}{\sqrt{\frac{16}{20} + \frac{25}{25}}} = -3,66$$

$Z_{0,005}$ = 2.58 άρα απορρίπτω αν Z ≥ - 2.58 ή Z ≤ 2.58

Συνεπώς H_0 απορρίπτεται και άρα το δείγμα δείχνει ότι υπάρχει διαφορά μεταξύ της μέσης αντοχής του Α και Β.

Ένα 99% Δ.Ε για το $\mu_A - \mu_B$ δίνεται από

$$(\overline{X} - \overline{Y}) \pm 2{,}58 \sqrt{\frac{16}{20} + \frac{25}{25}} =$$

$$(-8{,}593 \, , \, -1{,}207)$$

Όταν έχω μεγάλα δείγματα τα οποία δεν προέρχονται από την κανονική κατανομή τότε χρησιμοποιώ την ελεγχοσυνάρτηση

$$Z = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_\chi - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{S2_\chi}{n} + \frac{S2_\nu}{m}}} \sim N(0,1) \text{ προσεγγιστικά}$$

Τα χωρία απόρριψης είναι τα ίδια όπως προηγουμένως όπως και τα διαστήματα εμπιστοσύνης.

<u>Παράδειγμα:</u>

Έστω τα παρακάτω δεδομένα :

	δείγμα	μέσοι όροι	δειγματικη τυπική απόκλιση
A	35	.497	.187
B	35	.359	.158

Θέλω ναι ελέγξω $H_0: \mu_A - \mu_B$ προς $H_a: \mu_A - \mu_B > 0$ για α = 0.01

$$Z = \frac{(.497 - .359)}{\left(\frac{(.187)^2}{35} + \frac{(.158)^2}{35}\right)^{1/2}} = 3.37$$

⇒ Άρα η H_0 απορρίπτεται

Επίσης $Z_\alpha = 2.33$

Η p-value είναι $P(Z \geq 3.37) = 1 - \Phi(3.37) = .0004$

Ένα 99% Δ.Ε για $\mu_1 - \mu_2$ δίνεται από

$$(\overline{X} - \overline{Y}) \pm \sqrt{\frac{S^2_\chi}{n} + \frac{S^2_Y}{m}}$$

$$= (.497 - .359) \pm 2.5 \sqrt{\frac{(.187)^2}{35} + \frac{(.158)^2}{35}}$$

$$= (0.0313, 0.2447).$$