

Εργαστήριο #8

Άσκηση 1:

Έστω z τυπική κανονική. Να υπολογιστούν οι παρακάτω πιθανότητες:

$$\alpha) P(0 \leq z \leq 2.17)$$

$$\beta) P(-2.50 \leq z \leq 0)$$

$$\gamma) P(-2.50 \leq z \leq 2.50)$$

$$\delta) P(z \leq 1.37)$$

$$\epsilon) P(z \geq 1.50)$$

$$\zeta) P(|z| \leq 2.50)$$

Λύση:

$$\alpha) P(0 \leq z \leq 2.17) = \Phi(2.17) - \Phi(0) = 0.9850 - 0.5 = 0.4585$$

$$\beta) P(-2.5 \leq z \leq 0) = \Phi(0) - \Phi(-2.5) = 0.494$$

$$\gamma) P(-2.5 \leq z \leq 2.5) = \Phi(2.5) - \Phi(-2.5) = 0.9876$$

$$\delta) P(z \leq 1.37) = \Phi(1.37) = 0.9147$$

$$\epsilon) P(z \geq 1.5) = \Phi(-1.5) = 1 - \Phi(1.5) = 0.0668$$

$$\zeta) P(|z| \leq 2.5) = P(-2.5 \leq z \leq 2.5) = 0.987$$

Άσκηση 2:

Για κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις να βρεθεί η σταθερά c

$$\alpha) \Phi(c) = 0.9838$$

$$\beta) P(0 \leq z \leq c) = 0.291$$

$$\gamma) P(z \geq c) = 0.121$$

$$\delta) P(-c \leq z \leq c) = 0.668$$

$$\epsilon) P(|z| \geq c) = 0.016$$

Λύση:

$$\alpha) \Phi(c) = 0.9838 \rightarrow c = 2.14$$

$$\beta) P(0 \leq z \leq c) = 0.291 \Rightarrow \Phi(c) - \Phi(0) = 0.291$$

$$\Phi(c) = 0.791 \Rightarrow c = 0.81$$

$$\gamma) P(z \geq c) = 0.121 \Rightarrow 1 - P(z \leq c) = 0.121 \\ \Rightarrow P(z \leq c) = 0.879 \Rightarrow c = 1.17$$

$$\delta) P(-c \leq Z \leq c) = 0.668 \Rightarrow \Phi(c) - \Phi(-c) = 0.668 \Rightarrow 2\Phi(c) = 1 + 0.668 \Rightarrow c = 0.97$$

$$\varepsilon) P(z \leq -c) + P(z > c) = 0.016 \Rightarrow 1 - P(z \leq c) + 1 - P(z \leq c) = 0.016 \Rightarrow$$

$$2 - 2P(z \leq c) = 0.016 \Rightarrow 2\Phi(c) = 1.984 \Rightarrow \Phi(c) = 0.992 \Rightarrow c = 2.41$$

Άσκηση 3:

Έστω x κανονική τυχαία μεταβλητή με $\mu=80$ και $\sigma=10$. Να υπολογιστούν οι παρακάτω πιθανότητες.

$$a) P(x \leq 100)$$

$$\beta) P(x \leq 80)$$

$$\gamma) P(65 \leq x \leq 100)$$

$$\delta) P(x \geq 70)$$

$$\varepsilon) P(|x - 80| \leq 10)$$

Λύση:

$$x \sim N(80, 100) \Rightarrow z = \frac{x - 80}{10} \sim N(0, 1)$$

$$a) P(x \leq 100) = P\left(\frac{x - 80}{10} \leq \frac{100 - 80}{10}\right) = P(z \leq 2) = 0.9772$$

$$\beta) P(x \leq 80) = P\left(\frac{x - 80}{10} \leq \frac{80 - 80}{10}\right) = P(z \leq 0) = 0.5$$

$$\gamma) P(65 \leq x \leq 100) = P\left(\frac{65 - 80}{10} \leq z \leq 2\right) = P(-1.5 \leq z \leq 2) = \Phi(2) - \Phi(-1.5) = 0.9104$$

$$\delta) P(x \geq 70) = P\left(\frac{x - 80}{10} \geq \frac{70 - 80}{10}\right) = P(z \geq -1) = 1 - \Phi(-1) = 1 - 1 + \Phi(1) = 0.8413$$

$$\varepsilon) P(|x - 80| \leq 10) = P(-10 \leq x - 80 \leq 10) = P(-1 \leq z \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 0.6826$$

Άσκηση 4:

Έστω x κανονική τυχαία μεταβλητή με $\mu=25$ και $\sigma=5$

α) Να βρεθεί το 91ο ποσοστημόριο της x .

β) Να βρεθεί το 6ο ποσοστημόριο της x .

Λύση:

$$z = \frac{x - 25}{5} \sim N(0, 1)$$

$$a) \Phi(c) = P(z \leq c) = 0.91 \Rightarrow c = 1.34$$

$$x_{91} = 5(1.34) + 25 = 31.7$$

Για τον υπολογισμό του 6^{ου} ποσοστημορίου

$$P(z \geq -c) = 0.06 \Rightarrow 1 - P(z \leq -c) = 0.06 \Rightarrow P(z \leq -c) = 0.94 \Rightarrow -c = 1.56 \Rightarrow c = -1.56$$

(ποσοστημόριο x) = σ (ποσοστημόριο z) + μ

Άσκηση 5:

Η πίεση σε ένα τυχαία διαλεγμένο τροχό ακολουθεί την κανονική κατανομή με $\mu=31$ και $\sigma=2$.

α) Ποιά η πιθανότητα η πίεση να είναι λιγότερη του 30.4;

β) Ένας τροχός χαρακτηρίζεται ελαττωματικός αν η πίεση είναι μικρότερη του 30.4. Ποιά η πιθανότητα τουλάχιστον ένας τροχός να είναι ελαττωματικός για κάποιο αμάξι;

Λύση:

$$a) P(x \leq 30.4) = P\left(\frac{x - 31}{2} \leq \frac{30.4 - 31}{2}\right) = P\left(z \leq \frac{-0.6}{2}\right) = \Phi(-0.3) = 0.382$$

β) $\psi = \#$ ελαττωματικών τροχών

$$\psi \sim \text{Bin}[n = 4, p = P(x \leq 30.4) = 0.382]$$

$$P(\psi \geq 1) = 1 - P(\psi \leq 1) = 1 - P(\psi = 0) = 1 - \binom{4}{0} (0.382)^0 (1 - 0.382)^4 = 0.855$$