

## Φροντιστήριο Νο. 7:

### Άσκηση 1:

Έστω  $x$  συνεχής τυχαία μεταβλητή με αθροιστική συνάρτηση κατανομής

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x^2}{4} & 0 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

Να υπολογιστούν:

α)  $P(x \leq 1)$

β)  $P\left(\frac{1}{2} \leq x \leq 1\right)$

γ)  $P\left(x > \frac{1}{2}\right)$

δ) Η διάμεσος

ε) Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

### Λύση:

α)  $P(x \leq 1) = F(1) = \frac{1}{4}$

β)  $P\left(\frac{1}{2} \leq x \leq 1\right) = F(1) - F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$

γ)  $P\left(x > \frac{1}{2}\right) = 1 - P\left(x \leq \frac{1}{2}\right) = 1 - F\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$

δ)  $F(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x^2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$

ε)  $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & 0 \leq x < 2 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$

### Άσκηση 2:

Για την πιο πάνω άσκηση να υπολογίσετε:

α)  $E(x)$

β)  $\text{Var } x$  και  $\sigma(x)$

**Λύση:**

$$a) E(x) = \int_0^2 xf(x)dx = \int_0^2 x \cdot \frac{x}{2} dx = \int_0^2 \frac{x^2}{2} dx = \frac{4}{3}$$

$$\beta) E^2 x = \int_0^2 x^2 \frac{x}{2} dx = \int_0^2 \frac{x^3}{2} dx = \frac{x^4}{8} \Big|_0^2 = \frac{16}{8} = 2$$

$$Varx = Ex^2 - (Ex)^2 = 2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9}$$

$$\sigma(x) = \sqrt{Varx} = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

**Άσκηση 3:**

Δίνεται η παρακάτω συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{25}\psi & 0 \leq \psi < 5 \\ \frac{2}{5} - \frac{1}{25}\psi & 5 \leq \psi \leq 10 \\ 0 & \psi < 0 \text{ ή } \psi \geq 10 \end{cases}$$

α) Να βρείτε το 75° ποσοστημόριο.

β) Βρείτε τη διάμεσο.

**Λύση:**

α) Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής για  $0 < x \leq 5$  δίνεται από

$$F(x) = \int_{-\infty}^0 0d\psi + \int_0^x \frac{1}{25}\psi d\psi = \frac{x^2}{50}$$

ενώ για  $5 < x \leq 10$

$$F(x) = \int_{-\infty}^0 0d\psi + \int_0^5 \frac{1}{25}\psi d\psi + \int_5^x \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{25}\psi\right) d\psi$$
$$= \frac{2x}{5} - \frac{x^2}{50} - 1$$

Συνεπώς

$$F[n(0.75)] = P[x \leq n(0.75)] = 0.75$$

$$\frac{2}{5}n - \frac{n^2}{50} - 1 = \frac{3}{4} \Rightarrow 2n^2 - 40n + 175 = 0$$

$$n = 13.5 \rightarrow \alpha \text{ πορρ ίπτεται}$$

$$n = 6.46 \rightarrow \delta \epsilon \kappa \tau \acute{\eta}$$

$$\beta) x = 5$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x^2}{50} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 5$$

#### **Άσκηση 4:**

Έστω  $x$  ακολουθεί την  $U(0,25)$

Να υπολογιστούν :

$$\alpha) P(10 \leq x \leq 20)$$

$$\beta) P(x \geq 10)$$

$$\gamma) E_x, \sigma(x)$$

$\delta)$  Ποιά είναι η διάμεσος;

#### **Λύση:**

$$\alpha) P(10 \leq x \leq 20) = F(20) - F(10) = \frac{20-0}{25-0} - \frac{10}{25} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$$

$$\beta) P(x \geq 10) = 1 - P(x \leq 10) = 1 - F(10) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

$$\gamma) E_x = \frac{25+0}{2} = \frac{25}{2}$$

$$\sigma(x) = \sqrt{Varx} = \sqrt{\frac{25^2}{12}} = \frac{25}{2\sqrt{3}}$$

$$\delta) F(x) = 0.5 \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{x-0}{25-0} \Leftrightarrow x = \frac{25}{2}$$

#### **Άσκηση 5:**

Έστω  $x$  συνέχης τυχαία μεταβλητή με  $Exp(\lambda = \frac{1}{2})$

Να υπολογιστούν:

$$\alpha) P(x \geq 5)$$

$$\beta) P(1 \leq x \leq 7)$$

$\gamma)$  Το 30° ποσοστημόριο.

#### **Λύση:**

Είναι

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}\psi} d\psi = 1 - e^{-\frac{x}{2}}, \chi > 0$$

$$a) P(x \geq 5) = 1 - P(x \leq 5) = 1 - F(5) = 1 - 1 + e^{-\frac{5}{2}} = e^{-\frac{5}{2}}$$

$$\beta) P(1 \leq x \leq 7) = F(7) - F(1) = 1 - e^{-\frac{7}{2}} - 1 + e^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{7}{2}}$$

$$\gamma) F(x) = 0.3 \Rightarrow 1 - e^{-\frac{x}{2}} = 0.3 \Rightarrow e^{-\frac{x}{2}} = 0.7 \Rightarrow \frac{-x}{2} = \log 0.7 \Rightarrow x = 0.71$$