Εργαστήριο #5

Άσκηση 1:

Δίνεται η παρακάτω αθροιστική συνάρτηση κατανομής για μια τυχαία μεταβλητή x

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0{,}06 & 0 \le x < 1 \\ 0{,}19 & 1 \le x < 2 \\ 0{,}39 & 2 \le x < 3 \\ 0{,}67 & 3 \le x < 4 \\ 0{,}92 & 4 \le x < 5 \\ 0{,}97 & 5 \le x < 6 \\ 1 & x \ge 6 \end{cases}$$

Να υπολογιστούν οι παρακάτω πιθανότητες.

$a)P(x = 2)$

$\beta)P(x > 3)$

$\gamma)P(2 \le x \le 5$

$\delta)P(2 < x < 5)$

$\varepsilon)$ Να βρεθεί η συνάρτηση μάζας πιθανότητας της x .

Λύση:

$$a)P(x = 2) = P(x \le 2) - P(x \le 1) = F(2) - F(1) = 0.39 - 0.19 = 0.2$$

$$\beta)P(x > 3) = 1 - P(x \le 3) = 1 - F(3) = 1 - 0.67 = 0.33$$

$$\gamma)P(2 \le x \le 5) = P(x \le 5) - P(x \le 1) = F(5) - F(1) = 0.97 - 0.19 = 0.78$$

$$\delta)P(2 < x < 5) = P(x = 3) + P(x = 4) = P(x \le 3) - P(x \le 2) + P(x \le 4) - P(x \le 3) =$$
$$P(x \le 4) - P(x \le 2) = F(4) - F(2) = 0.92 - 0.39 = 0.53$$

$$\varepsilon)P(x = 0) = P(x \le 0) = 0.06$$
$$P(x = 1) = P(x \le 1) - P(x \le 0) = 0.13$$
$$P(x = 2) = P(x \le 2) - P(x \le 1) = 0.2$$
$$P(x = 3) = P(x \le 3) - P(x \le 2) = 0.67 - 0.39 = 0.28$$
$$P(x = 4) = P(x \le 4) - P(x \le 3) = 0.92 - 0.67 = 0.25$$
$$P(x = 5) = P(x \le 5) - P(x \le 4) = 0.97 - 0.92 = 0.05$$
$$P(x = 6) = P(x \le 6) - P(x \le 5) = 1 - 0.97 = 0.03$$

Άσκηση 2:

Μια εταιρεία έχει 6 τηλεφωνικές γραμμές και έστω x ο αριθμός των γραμμών που χρησιμοποιούνται κάποια χρονική στιγμή. Έστω ότι η x έχει συνάρτηση μάζας πιθανότητας

x	0	1	2	3	4	5	6
P(x)	0.1	0.15	0.20	0.25	0.20	0.06	0.04

Να υπολογιστεί η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της x και να δωθεί το γράφημά της.

<u>Λύση:</u>

x	0	1	2	3	4	5	6
p(x)	0.1	0.15	0.20	0.25	0.20	0.06	0.04

$$Fx(0) = P(x \leq 0) = 0.1$$

$$Fx(1) = P(x \leq 1) = P(x = 0) + P(x = 1) = 0.1 + 0.15 = 0.25$$

$$Fx(2) = P(x \leq 2) = P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2) = 0.1 + 0.15 + 0.2 = 0.45$$

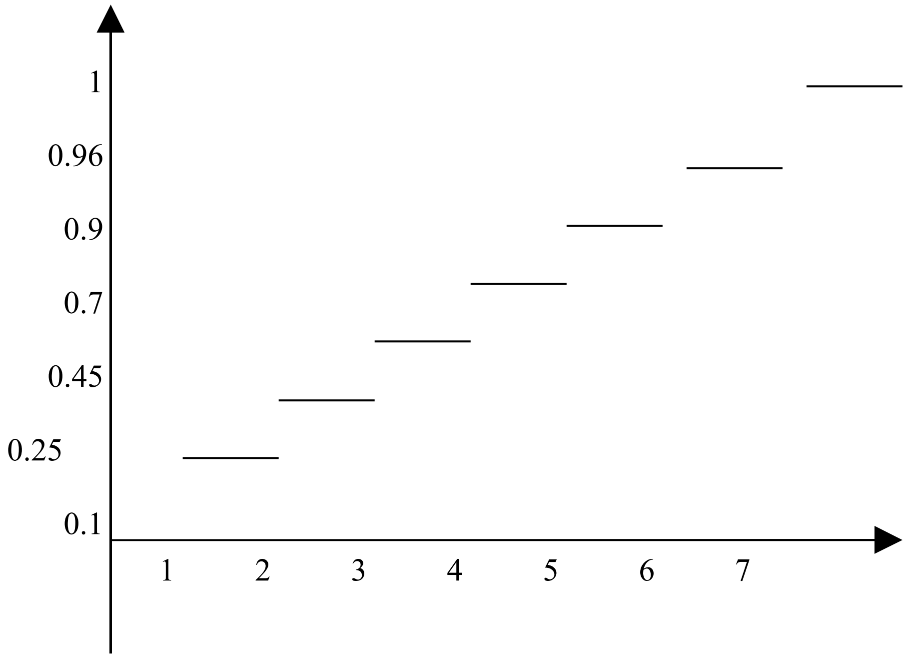
$$Fx(3) = P(x \leq 3) = \sum_{x=0}^{3} p(x) = 0.7$$

$$Fx(4) = P(x \leq 4) = \sum_{x=0}^{4} p(x) = 0.9$$

$$Fx(5) = P(x \leq 5) = \sum_{x=0}^{5} p(x) = 0.96$$

$$Fx(6) = P(x \leq 6) = \sum_{x=0}^{6} p(x) = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.1, & 0 \leq x < 1 \\ 0.25, & 1 \leq x < 2 \\ 0.45, & 2 \leq x < 3 \\ 0.7, & 3 \leq x < 4 \\ 0.9, & 4 \leq x < 5 \\ 0.96, & 5 \leq x < 6 \\ 1, & x \leq 6 \end{cases}$$


1
0.96
0.9
0.7
0.45
0.25
0.1
1
2
3
4
5
6
7

Άσκηση 3:

Έστω x = αριθμός ελαττωματικών μονάδων κάποιας μάρκας ψυγείων με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

x	0	1	2	3	4
p(x)	0.08	0.15	0.45	0.27	0.05

Να υπολογιστούν:

$\alpha\,)E(x)$

$\beta\,)Var(x)$

$\gamma\,)$ τυπική απόκλιση

Λύση:

$$\alpha\,)E(x) = 0(0.08) + 1(0.15) + 2(0.45) + 3(0.27) + 4(0.05) = 2.06$$

$$\beta\,)Var(x) = E(x-\mu)^2 = \sum_{x=0}^{4}(x-2.06)^2 p(x) = 0.934$$

2ος τρόπος

$$E(x^2) = \sum_{x=0}^{4} x^2 p(x) = 0^2 p(0) + 1^2 p(1) + 2^2 p(2) + 3^2 p(3) + 4^2 p(4) = 5.18$$

$$E^2(x) = (2.06)^2 = 4.2436$$

$$Varx = E(x^2) - E(x)^2 = 5.18 - 4.2436 = 0.934$$

$$\gamma\,)\sigma = \sqrt{Varx} = \sqrt{0.934} = 0.966$$

Άσκηση 4:

Έστω x Bernoulli τυχαία μεταβλητή. Να δειχτεί ότι $Var(x) = p(1-p)$. Επίσης να υπολογιστούν οι $Ex^2, E(x^{79})$

Λύση:

$$Varx = (1-p)^2 p + p^2(1-p) = p(1-p)$$

$$\rho\,(x) = \begin{cases} 1-\rho & x = 0 \\ \rho & x = 1 \end{cases}$$

$$E(x^2) = \sum_{x=0}^{1} x^2 p(x) = 0^2(1-p) + 1^2 p = p$$

$$E(x^{79}) = \sum_{x=0}^{1} x^{79} p(x) = 0^{79}(1-p) + 1^{79} p = p$$

<u>Άσκηση 5:</u>

Έστω 20% των οδηγών σταματά σε διάβαση πεζών όταν αναβοσβήνει το φανάρι. Για τους επόμενους 20 τυχαία διαλεγμένους οδηγούς ποιά είναι η πιθανότητα:
α) Το πολύ 5 να σταματήσουν.
β) Ακριβώς 5 να σταματήσουν.
γ) Τουλάχιστον 5 να σταματήσουν.
δ) Πόσοι απο τους 20 οδηγούς αναμένεται να σταματήσουν;

<u>Λύση:</u>

x ~ Bin (n,p)
x~ Bin$\left(n = 20, p = \dfrac{20}{100}\right)$

$$a)P(x \le 5) = \sum_{x=0}^{5} \binom{20}{x} (0.2)^x (1-0.2)^{20-x} = 0.804$$

$$\beta)P(x = 5) = P(x \le 5) - P(x \le 4) = 0.804 - 0.630 = 0.174$$

$$\gamma)P(x \ge 5) = 1 - P(x < 5) = 1 - P(x \le 4) = 1 - 0.630 = 0.37$$

$$\delta)E(x) = n \cdot p = 20(0.2) = 4$$

<u>Άσκηση 6:</u>

Οι πελάτες ενός σταθμού βενζίνης επιλέγουν κανονική (Α), αμόλυβδη (Β) βενζίνη ή πετρέλαιο (Γ). Ας υποθέσουμε ότι οι πελάτες έρχονται ανεξάρτητα και P(A) = 0.3, P(B) = 0.2, P(Γ) = 0.5
α) Για τους επόμενους 100 πελάτες, να βρεθεί η μέση τιμή και η διακύμανση γι'αυτους που διαλέγουν αμόλυβδη.
β) Το ίδιο με το (α) αλλα τώρα για τους πελάτες που δεν διαλέγουν πετρέλαιο.

<u>Λύση:</u>

α) x ~ Bin (n , p)
x ~ Bin(n=100,p=0.2)

$E(x) = n \cdot p = 100 \cdot 0.2 = 20$

$Varx = n \cdot p(1 - p) = 20(1 - 0.2) = 16$

$\beta\,) p = 1 - p(\Gamma) = 0.5$

x ~ Bin (n=100,p= 0.5)

$E(x) = 100 \cdot 0.5 = 50$

$Var(x) = 50(1 - 0.5) = 25$