

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟΥ #2

1. Μια εταιρεία υπολογιστών προσπαθεί να αναλάβει 3 έργα. Έστω $A_i = \{\text{ανάληψη έργου } i\}$ για $i=1,2,3$ και έστω $P(A_1)=0.22$, $P(A_2)=0.25$, $P(A_3)=0.28$
 $P(A_1 \cap A_2)=0.11$, $P(A_1 \cap A_3)=0.05$, $P(A_2 \cap A_3)=0.07$ και $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)=0.01$.
Διατυπώστε τα παρακάτω ενδεχόμενα και υπολογίστε τις πιθανότητες τους.
- α) $A_1 \cup A_2$
 - β) $\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2$ (υπόδειξη $\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 = \overline{(A_1 \cup A_2)}$)
 - γ) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$
 - δ) $\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3$
 - ε) $\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3$

ΛΥΣΗ

- α) Ανάληψη έργου τουλάχιστον ενός A_1 και A_2
 $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = 0.22 + 0.25 - 0.11 = 0.36$
- β) Να μην αναλάβει το A_1 και να μην αναλάβει το A_2
 $P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) = P(\overline{A_1 \cup A_2}) = 1 - P(A_1 \cup A_2) = 1 - 0.36 = 0.64$
- γ) Να αναλάβει τουλάχιστον ένα από τα τρία.
 $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P[(A_1 \cup A_2) \cap A_3] = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0.53$
- δ) Να μην αναλάβει κάποιο έργο
 $P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) = P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}) = 1 - P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - 0.53 = 0.47$
- ε) Να αναλάβει μόνο το A_3
 $P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) - P(A_1 \cup A_2) = 0.53 - 0.36 = 0.17$

2. Μια εταιρεία κατασκευών δουλεύει σε 2 έργα. Έστω A το ενδεχόμενο ότι το 1^ο έργο θα ολοκληρωθεί την προκαθορισμένη ημερομηνία και B το ανάλογο ενδεχόμενο για το 2^ο έργο. Αν $P(A \cup B) = 0.9$ και $P(A \cap B) = 0.5$ ποια η πιθανότητα ότι ακριβώς ένα έργο θα ολοκληρωθεί την προκαθορισμένη ημερομηνία.

ΛΥΣΗ

$$P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0.9 - 0.5 = 0.4$$

3. Μια βιβλιοθήκη έχει 5 αντίγραφα ενός βιβλίου, έτσι ώστε τα αντίγραφα 1 και 2 να ανήκουν στην πρώτη έκδοση ενώ τα αντίγραφα 3, 4 και 5 ανήκουν στην δεύτερη έκδοση. Δύο αντίγραφα μπαίνουν σε λίστα κρατήσεων.
- α) Ποια είναι η πιθανότητα ότι και τα δύο αντίγραφα ανήκουν στην πρώτη έκδοση;
 - β) Ποια είναι η πιθανότητα ότι και τα δύο αντίγραφα ανήκουν στην δεύτερη έκδοση;
 - γ) Ποια είναι η πιθανότητα ότι τουλάχιστον ένα αντίγραφο ανήκει στην πρώτη έκδοση;
 - δ) Ποια είναι η πιθανότητα ότι τα δύο αντίγραφα είναι διαφορετικών εκδόσεων;

ΛΥΣΗ

Το πρόβλημα αυτό να λυθεί πρώτα με απαρίθμηση όλου του δειγματικού χώρου που αποτελείται από 10 σημεία και μετά να αναφερθεί ότι το 10 είναι ίσο με τον αριθμό συνδυασμών των 5 ανά 2.

- α) Έστω $A = \{ \text{και τα δύο αντίγραφα ανήκουν στην πρώτη έκδοση} \}$
 $P(A) = 1/10$
- β) Έστω $B = \{ \text{τα δύο αντίγραφα ανήκουν στην δεύτερη έκδοση} \}$
 $P(B) = 3/10$
- γ) Έστω $\Gamma = \{ \text{ότι τουλάχιστον ένα αντίγραφο ανήκει στην πρώτη έκδοση} \}$
 $P(\Gamma) = 7/10$
- δ) Έστω $\Delta = \{ \text{τα δύο αντίγραφα είναι διαφορετικών εκδόσεων} \}$
 $P(\Delta) = 6/10$

4. Σε μια τράπουλα 52 χαρτιών διαλέγουμε μια κάρτα και υποθέτουμε ότι και τα 52 αποτελέσματα είναι ισοπίθανα. Έστω $A = \{ \text{κούπα} \}$, $B = \{ \text{μαύρο χρώμα} \}$
 $\Gamma = \{ \text{βαλές, ντάμα, ρήγας} \}$ και $\Delta = \{ \text{αριθμός μικρότερος ή ίσος του 5} \}$. Να υπολογίστούν οι παρακάτω πιθανότητες:
- α) $P(A)$, $P(B)$, $P(\Gamma)$ και $P(\Delta)$
 - β) $P(A \cup B)$ και $P(\Gamma \cup \Delta)$
 - γ) $P(A \cup \Gamma)$ και $P(B \cup \Delta)$

ΛΥΣΗ

- α) $P(A) = 13/52$, $P(B) = 26/52$, $P(\Gamma) = 12/52$, $P(\Delta) = 20/52$
 - β) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 3/4$ (αφού $P(A \cap B) = \emptyset$)
 $P(\Gamma \cup \Delta) = P(\Gamma) + P(\Delta) - P(\Gamma \cap \Delta) = 32/52$ (αφού $P(\Gamma \cap \Delta) = \emptyset$)
 - γ) $P(A \cup \Gamma) = P(A) + P(\Gamma) - P(A \cap \Gamma) = 1/4 + 12/52 - 3/52 = 22/52$
 $P(B \cup \Delta) = P(B) + P(\Gamma) - P(B \cap \Gamma) = 1/2 + 20/52 + 10/52 = 35/52$
5. Ο Μπετόβεν έγραψε 9 συμφωνίες και ο Μότσαρτ 27 πιάνο κονσέρτο.
- α) Αν ένας ραδιοφωνικός σταθμός θέλει να εκπέμψει πρώτα Μπετόβεν και μετά Μοτσαρτ με πόσους τρόπους μπορεί να το κάνει;
 - β) Ο διευθυντής του σταθμού αποφασίζει ότι κάθε βράδυ (7 μέρες την εβδομάδα), ο σταθμός θα εκπέμπει μια του Μπετόβεν, ένα πιάνο κονσέρτο του Μότσαρτ και ένα κουαρτέτο του Σούμπερτ (από τα οποία υπάρχουν 15). Για πόσα χρόνια θα ακολουθείται αυτή η πολιτική μέχρι να εξαντληθούν όλες οι δυνατές πιθανότητες;

ΛΥΣΗ

- α) $9 \cdot 27 = 243$ τρόποι
- β) $(9 \cdot 27 \cdot 15) / 365 = 20$ χρόνια