Εργαστήριο # 12

Πρόβλημα # 1

Για ένα δείγμα η=8 παρατηρήσεων που προέρχεται από την κανονική έχω $\overline{X} = 3.72$ και S=1.25.
(α) Να ελεγχθεί η H_0: μ=3.5 προς H_α :μ>3.5 σε α=5%.
(β) Να δοθεί ένα 95% Δ.Ε. για το μ.

Λύση:

$$\alpha)\ t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{\eta}} = \frac{3.72 - 3.5}{1.25/\sqrt{8}} = 0.4978$$

Απορρίπτω την H_0 όταν το $t > t_{0.05;7} = 1.895$. Άρα η μηδενική υπόθεση γίνεται δεκτή.

β) 95% Δ.Ε. για το μ

$$\bar{X} \pm t_{0.025;7} \cdot \frac{S}{\sqrt{\eta}} \rightarrow (2.674, 4.765)$$

Πρόβλημα # 2

Μια τηλεφωνική εταιρεία, στην προσπάθεια να βρεί κατά πόσο πρέπει να τοποθετήσει το δίκτυο της υπόγεια , ισχυρίζεται ότι θα το πράξει αν περισσότερο από το 60% απαντήσει θετικά. Σε μια δημοσκόπηση 116 από 160 ερωτηθέντες πελάτες απάντησαν θετικά.
Τί πρέπει να κάνει η εταιρεία; Να ελεγχθεί η αντίστοιχη υπόθεση σε α=5% καθώς και να δοθεί ένα διάστημα εμπιστοσύνης επιπέδου 95% για το ποσοστό των πελατών που υποστηρίζουν υπόγεια εγκατάσταση.

Λύση:

$$\rho = \frac{6}{10}$$

$$\eta = 160$$

$$\hat{P} = \frac{116}{160}$$

H_0: p=6/10 προς H_α:ρ>6/10

$$Z = \frac{\hat{P} - P_0}{\sqrt{P_0(1-P_0)/\eta}} = \frac{0.725-0.6}{0.03873} = 3.2275$$

Απορρίπτω H0 όταν $Z > -Z_\alpha = 1{,}65$ $\Rightarrow$ H0 απορρίπτεται.
95% Δ.Ε. για το ρ

$$\hat{P} \pm Z_{\frac{a}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P}\left(1-\hat{P}\right)}{\eta}} \rightarrow (0.656, 0.794)$$

Πρόβλημα # 3

Έστω κανονικός πληθυσμός με διακύμανση γνωστή. Να βρεθεί η p-value για κάθε ένα από τα παρακάτω αποτελέσματα Z έλεγχο συναρτήσεων για H_0 : μ=30 προς H_α : μ ≠30.
(α) 2.10 (β) –1.75 (γ) 1.41

Λύση:

$$P(|Z| \geq 2.10) = 2(1 - \Phi(2.1)) = 0.0358$$

$$P(|Z| \geq -1.75) = 0.0802$$

$$P(|Z| \geq 1.41) = 0.1586$$

Πρόβλημα # 4

Έστω μ_1 και μ_2 οι μέσοι χρόνοι επιβίωσης για δύο είδη τροχών.
Να ελεγχθεί H_0 : $\mu_1-\mu_2=0$ προς H_α : $\mu_1-\mu_2 \neq 0$ σε επίπεδο σημαντικότητας α= 0.05 όταν $\bar{X} = 36500, S_X = 2200, n = 40$ και $\bar{Y} = 36500, S_Y = 2200, m = 40 \cdot$
Επιπλέον να δοθεί ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για την διαφορά $\mu_1-\mu_2$.

Λύση:

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{S_\chi^2}{\eta} + \frac{S_\psi^2}{m}}} = \frac{3.100}{\sqrt{211.25}} = 6.74$$

Απορρίπτω όταν Z>1,96 ή Z<-1,96. Άρα υπάρχει διαφορά ανάμεσα στον χρόνο επιβίωσης μεταξύ των δύο είδη τροχών.
95% Δ.Ε. για Δ

$$\bar{X} - \bar{Y} \pm (1.96)\sqrt{\frac{S_{\chi}^{2}}{\eta} + \frac{S_{\psi}^{2}}{m}} \rightarrow (2199,4001)$$

Πρόβλημα # 5

Έστω:

$$X_1,\ldots,X_{10} \sim N(\mu_{\chi}, \sigma_x = 0.2), \bar{X} = 6.1$$

$$Y_1,\ldots,Y_{10} \sim N(\mu_{Y}, \sigma_y = 0.4), \bar{Y} = 7.5$$

X και Y ανεξάρτητα.
(α) Να ελεγχθεί $H_0: \mu_1-\mu_2= -1$ προς $H_\alpha: \mu_1-\mu_2< -1$ σε επίπεδο σημαντικότητας α=0.01.
(β) Να βρεθεί η p-value.
(γ) Να υπολογιστεί το σφάλμα τύπου II όταν $\mu_1-\mu_2= -1.2$

Λύση:

α)

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{\Psi} - \Delta}{\sqrt{\frac{\sigma_{\chi}^{2}}{\eta} + \frac{\sigma_{\psi}^{2}}{m}}} = \frac{6.1 - 7.5 + 1}{\sqrt{\frac{(0.2)^2}{10} + \frac{(0.4)^2}{10}}} = \frac{-0.4}{0.144} = -2.828$$

Απορρίπτω την H_0 αν

$$Z \leq Z_a = -2.33$$

Άρα H_0 απορρίπτεται.

β) $P(Z \le -2.828) = 0.002$

γ) P(απορρίψω Ηα / Ηα αληθής)

$$P\left(\bar{X} - \bar{\Psi} - \Delta > -Z_{\alpha} \sqrt{\frac{\sigma_{\chi}^{2}}{\eta} + \frac{\sigma_{\psi}^{2}}{m}} \Big/ \mu_1 - \mu_2 = -1.2 \right)$$

$$P\left(\bar{X} - \bar{\Psi} > \Delta - Z_{a} \sqrt{\frac{\sigma_{\chi}^{2}}{\eta} + \frac{\sigma_{\psi}^{2}}{m}} \Big/ \mu_1 - \mu_2 = -1.2 \right)$$

$$P\left(\frac{\bar{X} - \bar{\Psi} - (-1.2)}{\sqrt{\frac{\sigma_{\chi}^{2}}{\eta} + \frac{\sigma_{\psi}^{2}}{m}}} > \frac{\Delta - (-1.2) Z_{\alpha} \sqrt{\frac{\sigma_{\chi}^{2}}{\eta} + \frac{\sigma_{\psi}^{2}}{m}}}{\sqrt{\frac{\sigma_{\chi}^{2}}{\eta} + \frac{\sigma_{\psi}^{2}}{m}}} \right)$$

$$P\left(Z > \frac{0.2}{\sqrt{\frac{\sigma_{\chi}^{2}}{\eta} + \frac{\sigma_{\psi}^{2}}{m}}} - Z_{\alpha} \right) = 1 - \Phi\left(\frac{0.2}{\sqrt{\frac{\sigma_{\chi}^{2}}{\eta} + \frac{\sigma_{\psi}^{2}}{m}}} - 2.33 \right) = 1 - \Phi(-0.91) = 0.818$$