ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΒΑΣΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ
(ΜΑΣ 132)

Ενδιάμεση εξέταση
Τετάρτη 30 Μαρτίου, 2022

---

1. (α) Χρησιμοποιώντας διανύσματα, να περιγραφεί το σύνολο των σημείων $P(x, y, z)$ που είναι τέτοια ώστε η απόσταση τους από το σημείο $A(0, -1, 1)$ να είναι διπλάσια από αυτήν από το σημείο $B(1, 2, 0)$.

(β) Έστω A, B και P σημεία στον $\mathbb{R}^3$ και L η ευθεία γραμμή που διέρχεται από A και B. Να δειχθεί ότι η απόσταση του σημείου P από την ευθεία γραμμή L είναι ίση με

$$d = \frac{\|\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}.$$

(γ) Αν $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι διανύσματα στον $\mathbb{R}^3$, να δειχθεί ότι

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2.$$

2. (i) Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου Π_1 που διέρχεται από τα σημεία $A(0, -6, -1)$, $B(2, -4, 0)$ και $C(1, 2, -1)$.

(ii) Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου Π_2 που περιέχει το σημείο $(4, 1, 0)$ και την ευθεία $x = t,\ y = 3 - 3t,\ z = -4$.

(iii) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας L_1 που διέρχεται από τα σημεία $D(1, -4, 0)$ και $E(6, -8, 3)$.

(iv) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας L_2 που είναι η τομή των επιπέδων Π_1 και Π_2.

(v) Να εξεταστεί αν οι ευθείες L_1 και L_2 είναι παράλληλες ή τέμνονται. Αν τέμνονται να βρεθεί το σημείο τομής.

3. (α) Αν $\mathbf{r}(t)$ είναι μια ομαλή διανυσματική συνάρτηση στον $\mathbb{R}^3$, τότε για κάθε τιμή της παραμέτρου t, για την οποία $\mathbf{T}'(t)$ υπάρχει, τότε να δειχθεί ότι η καμπυλότητα κ είναι ίση με

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|}.$$

Έστω

$$\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + (\sin t - t\cos t)\mathbf{j} + (\cos t + t\sin t)\mathbf{k}, \quad t > 0.$$

Να βρεθούν τα μοναδιαία διανύσματα $\mathbf{T}(t),\ \mathbf{N}(t)$ και η καμπυλότητα $\kappa(t)$.

(β) Να βρεθεί το μήκος της καμπύλης

$$\mathbf{r}(t) = 12t\mathbf{i} + 8t^{\frac{3}{2}}\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 1.$$

4. Έστω ότι σωματίδιο κινείται πάνω σε ομαλή καμπύλη C στον $\mathbb{R}^3$ και έστω ότι σε κάθε σημείο της C έχει ταχύτητα $\mathbf{v}$ και επιτάχυνση $\mathbf{a}$. Αν a_T είναι το μέτρο της εφαπτομενικής επιτάχυνσης, a_N είναι το μέτρο της κάθετης επιτάχυνσης και κ είναι η καμπυλότητα, να δειχθεί ότι

$$a_T = \frac{|\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}|}{\|\mathbf{v}\|}, \quad a_N = \frac{\|\mathbf{v}\times\mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|}, \quad \kappa = \frac{\|\mathbf{v}\times\mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|^3}.$$

Ένα σωματίδιο κινείται πάνω σε μια καμπύλη και το διάνυσμα θέσης τη χρονική στιγμή t είναι ίσο με

$$\mathbf{r}(t) = 3\sin t\mathbf{i} + 2\cos t\mathbf{j} - \sin(2t)\mathbf{k}.$$

Να βρεθούν:

(i) το μέτρο της εφαπτομενικής και της κάθετης επιτάχυνσης τη χρονική στιγμή $t = \frac{\pi}{2}$,

(ii) η εφαπτομενική και η κάθετη επιτάχυνση τη χρονική στιγμή $t = \frac{\pi}{2}$,

(iii) η καμπυλότητα στο σημείο στο οποίο βρίσκεται το σωματίδιο τη χρονική στιγμή $t = \frac{\pi}{2}$.

5. (α) Δίνεται ότι $w = f(u^3 + v^2)$ και ότι $f'(x) = \mathrm{e}^x$. Να βρεθούν $\dfrac{\partial w}{\partial u}$ και $\dfrac{\partial w}{\partial v}$.

(β) Να δειχθεί ότι η συνάρτηση

$$u(x,y,t) = \frac{1}{4\pi t}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4t}\right)$$

είναι λύση της εξίσωσης

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

(γ) Να βρεθεί η σχέση μεταξύ των σταθερών a και b έτσι ώστε η συνάρτηση $u(x,t) = \sin(ax)\mathrm{e}^{-bt}$ να είναι λύση της εξίσωσης της θερμότητας

$$u_t = u_{xx}.$$