

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - 5

1. (i) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου στο οποίο η ευθεία $\mathbf{r} = (2 + t)\mathbf{i} + (1 - 2t)\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$ τέμνει το επίπεδο xz .

(ii) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου στο οποίο η ευθεία $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + (1 + 2t)\mathbf{j} - 3t\mathbf{k}$ τέμνει το επίπεδο $3x - y - z = 2$.

2. Να υπολογιστούν τα όρια

(i) $\lim_{t \rightarrow 2} (t\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + t^2\mathbf{k})$

(ii) $\lim_{t \rightarrow \pi} (\cos 3t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j} + \sqrt{t}\mathbf{k})$

(iii) $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\tan^{-1} t\mathbf{i} + \frac{t}{t^2 + 3}\mathbf{j} + \cos \frac{2}{t}\mathbf{k} \right)$

(iv) $\lim_{t \rightarrow 1} \left(\frac{3}{t^2}\mathbf{i} + \frac{\ln t}{t^2 - 1}\mathbf{j} + \sin 2t\mathbf{k} \right)$

3. (i) Να δειχθεί ότι οι γραφικές παραστάσεις των $\mathbf{r}_1(t) = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + 3t^3\mathbf{k}$ και $\mathbf{r}_2(t) = (t - 1)\mathbf{i} + \frac{1}{4}t^2\mathbf{j} + (5 - t)\mathbf{k}$ τέμνονται στο σημείο $P(1, 1, 3)$. Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζουν οι εφαπτομένες των \mathbf{r}_1 και \mathbf{r}_2 στο σημείο P .

(ii) Να δειχθεί ότι οι γραφικές παραστάσεις των $\mathbf{r}_1(t) = 2e^{-t}\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} + (t^2 + 3)\mathbf{k}$ και $\mathbf{r}_2(t) = (1 - t)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + (t^3 + 4)\mathbf{k}$ τέμνονται στο σημείο $P(2, 1, 3)$. Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζουν οι εφαπτομένες των \mathbf{r}_1 και \mathbf{r}_2 στο σημείο P .

4. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας να βρεθεί η $\frac{d\mathbf{r}}{du}$:

(i) $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}, \quad t = 4u + 1$

(ii) $\mathbf{r} = 3 \cos t\mathbf{i} + 3 \sin t\mathbf{j}, \quad t = \pi u$

5. Έστω $\mathbf{r}(t) = (a \cos t)\mathbf{i} + (a \sin t)\mathbf{j}, \quad a > 0$. Να δειχθεί ότι $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$. Να δοθεί η γεωμετρική ερμηνεία αυτού του αποτελέσματος.

6. Να αποδειχθεί ότι

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} \right] = \frac{1}{\|\mathbf{r}\|} \mathbf{r}' - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r}.$$

7. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

(i) $\int \left(t^2\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + \frac{1}{t}\mathbf{k} \right) dt$

(ii) $\int (e^{-t}\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}) dt$

(iii) $\int_0^1 (e^{2t}\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j} + t\mathbf{k}) dt$

(iv) $\int_{-3}^3 ((3 - t)^{3/2}\mathbf{i} + (3 + t)^{3/2}\mathbf{j} + \mathbf{k}) dt$

8. (i) Δίνεται ότι $\mathbf{r}''(t) = \mathbf{i} + e^t \mathbf{j}$, $\mathbf{r}(0) = 2\mathbf{i}$, $\mathbf{r}'(0) = \mathbf{j}$. Να βρεθεί το $\mathbf{r}(t)$.
- (ii) Δίνεται ότι $\mathbf{r}'(t) = e^{-2t} \mathbf{i} + (\cos t) \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{r}(0) = 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Να βρεθεί το $\mathbf{r}(t)$.
- (iii) Δίνεται ότι $\mathbf{r}'(t) = 2\mathbf{i} + \frac{t}{t^2+1} \mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $\mathbf{r}(1) = \mathbf{0}$. Να βρεθεί το $\mathbf{r}(t)$.
- (iv) Δίνεται ότι $\mathbf{r}''(t) = (4 \sin 2t) \mathbf{i} + 6t \mathbf{j} + e^{-t} \mathbf{k}$, $\mathbf{r}(0) = 2\mathbf{i}$, $\mathbf{r}'(0) = \mathbf{k}$. Να βρεθεί το $\mathbf{r}(t)$.

9. Να βρεθεί το μήκος τόξου των πιο κάτω καμπυλών στο διάστημα που δίνεται:

- (i) $\mathbf{r}(t) = 3 \cos t \mathbf{i} + 3 \sin t \mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 2\pi$
- (ii) $\mathbf{r}(t) = \cos^3 t \mathbf{i} + \sin^3 t \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$
- (iii) $\mathbf{r}(t) = e^t \mathbf{i} + e^{-t} \mathbf{j} + \sqrt{2}t\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 1$
- (iv) $\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}t\mathbf{i} + \frac{1}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}}\mathbf{j} + \frac{1}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}\mathbf{k}$, $-1 \leq t \leq 1$

10. Να βρεθούν οι παραμετρικές εξισώσεις των πιο κάτω καμπυλών συναρτήσει της παραμέτρου s (μήκος τόξου). Να χρησιμοποιηθεί ως σημείο αναφοράς το σημείο της καμπύλης όπου $t = 0$.

- (i) $\mathbf{r}(t) = (1+t)^2 \mathbf{i} + (1+t)^3 \mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 1$
- (ii) $\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t) \mathbf{i} + (e^t \sin t) \mathbf{j}$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$
- (iii) $\mathbf{r}(t) = \sin(e^t) \mathbf{i} + \cos(e^t) \mathbf{j} + \sqrt{3}e^t \mathbf{k}$, $t \geq 0$
- (iv) $\mathbf{r}(t) = (t \cos t) \mathbf{i} + (t \sin t) \mathbf{j} + \frac{2}{3} \sqrt{2} t^{\frac{3}{2}} \mathbf{k}$, $t \geq 0$

11. Να δειχθεί ότι σε κυλινδρικές συντεταγμένες μια καμπύλη η οποία ορίζεται παραμετρικά, $r = r(t)$, $\theta = \theta(t)$, $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$, έχει μήκος τόξου

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt.$$

Χρησιμοποιώντας τον πιο πάνω τύπο να βρεθεί το μήκος τόξου των πιο κάτω καμπυλών στο διάστημα που δίνεται:

- (i) $r = e^{2t}$, $\theta = t$, $z = e^{2t}$, $0 \leq t \leq \ln 2$
- (ii) $r = t^2$, $\theta = \ln t$, $z = \frac{1}{3}t^3$, $1 \leq t \leq 2$

12. Να βρεθεί το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα \mathbf{T} και μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα \mathbf{N} για τις πιο κάτω καμπύλες στο σημείο που δίνεται:

- (i) $\mathbf{r}(t) = 3 \cos t \mathbf{i} + 4 \sin t \mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $t = \frac{\pi}{2}$
- (ii) $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = e^t$, $t = 0$
- (iii) $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$, $t = 1$
- (iv) $x = \cosh t$, $y = \sinh t$, $z = t$, $t = \ln 2$

13. Έχουμε δει ότι το διάνυσμα \mathbf{N} έχει την κατεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{T}' = \frac{d}{dt} \left[\frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|} \right]$. Χρησιμοποιώντας την άσκηση 2.6, να δειχθεί ότι διάνυσμα \mathbf{N} έχει επίσης την κατεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{u} = \|\mathbf{r}'\|^2 \mathbf{r}'' - (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'') \mathbf{r}'$ και επομένως το μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{N} μπορεί να υπολογιστεί από τον τύπο $\mathbf{N} = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}$.

Χρησιμοποιώντας τον πιο πάνω τύπο να βρεθεί μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα \mathbf{N} για τις πιο κάτω καμπύλες στο σημείο που δίνεται:

- (i) $x = e^t, y = e^{-t}, z = t, t = 0$
(ii) $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{j} + \frac{1}{3}t^3\mathbf{k}, t = 0$
(iii) $x = \sin t, y = \cos t, z = \frac{1}{2}t^2, t = 0$

14. (i) Να δειχθεί ότι για την καμπύλη $y = f(x)$, η καμπυλότητα $\kappa(x)$ δίνεται από τον τύπο

$$\kappa(x) = \frac{\left| \frac{d^2y}{dx^2} \right|}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

- (ii) Να δειχθεί ότι για την καμπύλη $\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, η καμπυλότητα δίνεται από τον τύπο

$$\kappa = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

- (iii) Να δειχθεί ότι μια καμπύλη σε πολικές συντεταγμένες η οποία περιγράφεται από την εξίσωση $r = f(\theta)$ έχει καμπυλότητα ίση με

$$\kappa = \frac{\left| r^2 + 2 \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 - r \frac{d^2r}{d\theta^2} \right|}{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

15. Χρησιμοποιώντας τον κατάλληλο τύπο, να βρεθεί η καμπυλότητα των πιο κάτω καμπύλων στο δοσμένο σημείο:

- (i) $y = \frac{1}{3}x^3, x = 0$
(ii) $y = e^{-x}, x = 1$
(iii) $y^2 - 4x^2 = 9, (2, 5)$

16. Χρησιμοποιώντας τον κατάλληλο τύπο, να βρεθεί η καμπυλότητα των πιο κάτω καμπύλων στο δοσμένο σημείο:

- (i) $\mathbf{r}(t) = (4 \cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}, t = \frac{\pi}{2}$
(ii) $x = 1 - t^3, y = 1 - t^2, t = 1$
(iii) $x = 2abt, y = b^2t^2, t = 1, (a > 0, b > 0)$

17. Χρησιμοποιώντας τον κατάλληλο τύπο, να βρεθεί η καμπυλότητα των πιο κάτω καμπύλων στο δοσμένο σημείο:

(i) $r = \theta, \quad \theta = 1$

(ii) $r = a(1 + \cos \theta), \quad \theta = \frac{\pi}{2}$

(iii) $r = e^{2\theta}, \quad \theta = 1$

18. (i) Να βρεθεί η ελάχιστη και μέγιστη τιμή της ακτίνας καμπυλότητας της καμπύλης $x = \cos t, y = \sin t, z = \cos t$.

(ii) Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της ακτίνας καμπυλότητας της καμπύλης $x = e^t, y = e^{-t}, z = \sqrt{2}t$.

19. Έστω $\mathbf{r}(t) = (\ln t)\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$. Να βρεθούν:

(i) $\|\mathbf{r}'(t)\|$ (ii) $\frac{ds}{dt}$ (iii) $\int_1^3 \|\mathbf{r}'(t)\| dt$

20. Έστω η καμπύλη C η οποία ορίζεται παραμετρικά συναρτήσει της παραμέτρου μήκους τόξου,

$$x = \frac{3}{5}s + 1, \quad y = \frac{4}{5}s - 2, \quad 0 \leq s \leq 10$$

(i) Να βρεθεί το $\mathbf{T}(s)$.

(ii) Να γίνει η γραφική παράσταση της καμπύλης και του διανύσματος $\mathbf{T}(5)$.

21. (i) Η κίνηση ενός σωματιδίου περιγράφεται από τη διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{r} = (t - t^2)\mathbf{i} - t^2\mathbf{j}$. Να βρεθεί η ελάχιστη ταχύτητα του σωματιδίου και η θέση του όταν έχει αυτή τη ταχύτητα.

(ii) Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη ταχύτητα του σωματιδίου του οποίου η κίνηση περιγράφεται από τη διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{r} = \sin 3t\mathbf{i} - 2 \cos 3t\mathbf{j}$.

(iii) Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη ταχύτητα του σωματιδίου του οποίου η κίνηση περιγράφεται από τη διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{r} = 3 \cos 2t\mathbf{i} + \sin 2t\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}$.

22. Να βρεθεί το σημείο πάνω στη τροχιά

$$\mathbf{r} = (t^2 - 5t)\mathbf{i} + (2t + 1)\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$$

στο οποίο η ταχύτητα τέμνει κάθετα την επιτάχυνση.

23. (i) Ένα σωματίδιο κινείται κατά μήκος της παραβολής $y = x^2$ με σταθερή ταχύτητα 3 μονάδες/sec. Να βρεθεί η κάθετη συνιστώσα της επιτάχυνσης ως συνάρτηση του x .

(ii) Ένα σωματίδιο κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = e^x$ με σταθερή ταχύτητα 2 μονάδες/sec. Να βρεθεί η κάθετη συνιστώσα της επιτάχυνσης ως συνάρτηση του x .

24. Ένα σωματίδιο εκτοξεύεται από το έδαφος με ταχύτητα 980 m/sec που σχηματίζει γωνία 45° με την οριζόντια. Να βρεθούν:
- (i) οι παραμετρικές εξισώσεις της τροχιάς του σωματιδίου,
 - (ii) το μέγιστο ύψος που θα φθάσει το σωματίδιο,
 - (iii) η οριζόντια απόσταση που θα καλύψει το σωματίδιο,
 - (iv) η ταχύτητα του σωματιδίου όταν θα επιστρέψει στο έδαφος.
25. Ένα σωματίδιο εκτοξεύεται από κτίριο που έχει ύψος 168 m με ταχύτητα 80 m/sec που σχηματίζει γωνία 60° με την οριζόντια. Να βρεθεί η απόσταση του σημείου στο έδαφος όπου θα κτυπήσει το σωματίδιο, από το κτίριο.
26. Ένα σωματίδιο πέφτει από τραπέζι ύψους 4 m ενώ βρισκόταν σε κίνηση με σταθερή ταχύτητα 5 m/sec .
- (i) Να βρεθεί ο χρόνος που χρειάστηκε το σωματίδιο από τη στιγμή που έπεσε από το τραπέζι μέχρι να φθάσει στο έδαφος.
 - (ii) Να βρεθεί η ταχύτητα του σωματιδίου όταν θα κτυπήσει στο έδαφος.
 - (iii) Αν τη ίδια χρονική στιγμή όπου το σωματίδιο έπεφτε από το τραπέζι, ένα δεύτερο σωματίδιο αφήνεται να πέσει (δηλαδή, η αρχική ταχύτητα είναι μηδέν) από το ύψος του τραπεζιού. Να βρεθεί ποιο σωματίδιο θα κτυπήσει πρώτο το έδαφος.