

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ - 1

1. Να βρεθεί η καρτεσιανή εξίσωση που αντιστοιχεί στις παραμετρικές εξισώσεις:

(i)  $x = 3 + 2 \cos t, y = 2 + 4 \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$

(ii)  $x = \sec t, y = \tan t, \pi \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$

(iii)  $x = 2 \sin^2 t, y = 3 \cos^2 t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

(iv)  $x = \sec^2 t, y = \tan^2 t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

2. Να οριστούν παραμετρικά οι πιο κάτω καμπύλες.

(i) Το κομμάτι του κύκλου  $x^2 + y^2 = 1$  που βρίσκεται στο τρίτο τεταρτημόριο.

(ii) Η έλλειψη  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ .

(iii) Το κομμάτι της παραβολής  $x = y^2$  από το σημείο  $(1, -1)$  στο σημείο  $(1, 1)$ .

(iv) Ο κύκλος με ακτίνα ίση με 4 και κέντρο  $(1, -3)$ .

3. Να δειχθεί ότι η καμπύλη  $x = \cos t, y = \sin t \cos t$  έχει δύο εφαπτόμενες στο σημείο  $(0, 0)$  και να βρεθούν οι εξισώσεις τους.

4. Έστω οι καμπύλες οι οποίες ορίζονται παραμετρικά, από τις εξισώσεις:

(i)  $x = t^3 - 3t, y = t^3 - 3t^2, \quad$  (ii)  $x = \cos \theta, y = \cos 3\theta, \quad$  (iii)  $x = e^{\sin \theta}, y = e^{\cos \theta}.$

Να βρεθούν τα σημεία της καμπύλης, στα οποία η εφαπτομένη είναι οριζόντια και τα σημεία στα οποία είναι κατακόρυφη.

5. Να βρεθεί το εμβαδόν της περιοχής  $R$  που περιγράφεται από τις πιο κάτω παραμετρικές εξισώσεις.

(i)  $R$  περικλείεται από  $x = t^3 - 4t, y = t^2, -2 \leq t \leq 2.$

(ii)  $R$  περικλείεται από  $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, 0 \leq t \leq 2\pi.$

(iii)  $R$  περικλείεται από  $x = \cos t \sin t, y = \sin^2 t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$  και τον άξονα των  $y$ .

(iv)  $R$  περικλείεται από  $x = (2 + \sin t) \cos t, y = (2 + \sin t) \sin t.$

6. Να βρεθεί η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος των συναρτήσεων οι οποίες ορίζονται παραμετρικά:

(i)  $x = 2 \sin t, y = \cos 2t \quad$  (ii)  $x = \cos^3 \theta, y = \sin^3 \theta.$

7. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης και της κάθετης των πιο κάτω καμπυλών, στο σημείο που δίνεται:

(i)  $x = 3e^t, y = 5e^{-t}, t = 0 \quad$  (ii)  $x = a \cos^4 \theta, y = a \sin^4 \theta, \theta = \frac{\pi}{4}.$

8. Να υπολογιστεί το μήκος τόξου των καμπυλών:

(i)  $x = \ln \sqrt{1+t^2}$ ,  $y = \tan^{-1} t$ , από  $t = 0$  ως  $t = 1$

(ii)  $x = 2 \cos \theta + \cos 2\theta + 1$ ,  $y = 2 \sin \theta + \sin 2\theta$ , από  $\theta = 0$  ως  $\theta = 2\pi$ .

9. Να υπολογιστεί το εμβαδόν της επιφάνειας που παράγεται από την πλήρη περιστροφή, γύρω από τον άξονα των  $x$ , του τόξου της καμπύλης:

$$x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t, \quad \text{από } t = 0 \text{ ως } t = \frac{\pi}{2}.$$

10. Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που προκύπτει από την πλήρη περιστροφή, του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη

$$x = 2 \cos \theta - \cos 2\theta - 1, \quad y = 2 \sin \theta - \sin 2\theta,$$

γύρω από τον άξονα των  $x$ .