

Απαντήσεις

Κεφάλαιο 1

- 1** (i) σφαίρα με κέντρο $(1, 3, 4)$, ακτίνα 5
 (ii) σφαίρα με κέντρο $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{5}{4})$, ακτίνα $\frac{3}{4}\sqrt{6}$
 (iii) το σημείο $(-1, 1, -1)$
 (iv) Δεν έχει γραφική παράσταση
- 2** (i) $c_1 = 2, c_2 = -1, c_3 = 3$ (ii) Δεν υπάρχουν
- 3** (i) σφαίρα με κέντρο $(0, 0, 0)$ και ακτίνα 2 (ii) σφαίρα με κέντρο (x_0, y_0, z_0) και ακτίνα 3
 (iii) Όλα τα σημεία πάνω ή μέσα στη σφαίρα με κέντρο (x_0, y_0, z_0) και ακτίνα 1
- 4** (i) $14\mathbf{i} - 12\mathbf{k}$ (ii) $6\mathbf{i} - 8\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
- 6** (i) $4/\sqrt{29}$ (ii) $\sqrt{564/29}$
- 7** $c_1 = \frac{3}{7}, c_2 = -\frac{1}{3}, c_3 = \frac{1}{21}$
- 8** $E = \frac{\sqrt{26}}{2}, h = \frac{\sqrt{26}}{3}$
- 9** (i) $(8, \frac{\pi}{6}, -4)$ (ii) $2\sqrt{3}, 2, 3$ (iii) $(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4})$ (iv) $(\frac{5\sqrt{6}}{4}, \frac{5\sqrt{2}}{5}, \frac{5\sqrt{2}}{2})$ (v) $(2\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$ (vi) $(\frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{\pi}{4}, -\frac{5}{2})$
- 11** $(\frac{1}{2}(a_1 + b_1), \frac{1}{2}(a_2 + b_2), \frac{1}{2}(a_3 + b_3)), \frac{1}{2}\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}$
- 13** $\theta = \frac{\pi}{3}$
- 14** (i) 2 (ii) -2 (iii) -2 (iv) 0

Κεφάλαιο 2

- 1** (i) $(\frac{5}{2}, 0, \frac{3}{2})$ (ii) $(\frac{3}{4}, \frac{5}{2}, -\frac{9}{4})$
- 2** (i) $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ (ii) $-\mathbf{i} + e^{-\pi}\mathbf{j} + \sqrt{\pi}\mathbf{k}$ (iii) $\frac{\pi}{2}\mathbf{i} + \mathbf{k}$ (iv) $3\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} + \sin 2\mathbf{k}$
- 3** (i) $\cos \theta = \frac{6}{\sqrt{258}} \Rightarrow \theta \simeq 68^\circ$ (ii) $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{14}} \Rightarrow \theta \simeq 74^\circ$
- 4** (i) $4\mathbf{i} + 8(4u + 1)\mathbf{j}$ (ii) $-3\pi \sin \pi u \mathbf{i} + 3\pi \cos \pi u \mathbf{j}$
- 6** (i) έλλειψη (ii) 2 ($t = \frac{\pi}{2}$), 3 ($t = 0$)
- 7** (i) $\frac{t^3}{3}\mathbf{i} - t^2\mathbf{j} + \ln |t|\mathbf{k} + \mathbf{c}$ (ii) $-e^{-t}\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + t^3\mathbf{k} + \mathbf{c}$ (iii) $\frac{1}{2}(e^2 - 1)\mathbf{i} + (1 - e^{-1})\mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}$
 (iv) $\frac{72\sqrt{6}}{5}\mathbf{i} + \frac{72\sqrt{6}}{5}\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$
- 8** (i) $\mathbf{r}(t) = (\frac{1}{2}t^2 + 2)\mathbf{i} + (e^t - 1)\mathbf{j}$
 (ii) $\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})\mathbf{i} + (3 + \sin t)\mathbf{j} + (2 - t)\mathbf{k}$
 (iii) $\mathbf{r}(t) = 2(t - 1)\mathbf{i} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{t^2 + 1}{2} \right) \mathbf{j} + \frac{1}{2}(t^2 - 1)\mathbf{k}$
 (iv) $\mathbf{r}(t) = (2 + 2t - \sin 2t)\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + (2t - 1 + e^{-t})\mathbf{k}$
- 9** (i) $2\pi\sqrt{10}$ (ii) $\frac{3}{2}$ (iii) $e - e^{-1}$ (iv) $\sqrt{3}$
- 10** (i) $\sqrt{5}(1 + 5t^2)^{-\frac{5}{2}}$ (ii) $\sqrt{17}(1 + 17t^2)^{-\frac{5}{2}}$ (iii) $\frac{3}{25}$ (iv) $\frac{\sqrt{5}}{9}e^{-2t}$
- 11** (i) $\frac{9}{2}$ (ii) $9 - 2\sqrt{6}$
- 12** (i) $\mathbf{T}(\frac{\pi}{2}) = -\frac{3}{\sqrt{10}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{10}}\mathbf{k}, \mathbf{N}(\frac{\pi}{2}) = -\mathbf{j}$
 (ii) $\mathbf{T}(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}), \mathbf{N}(0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} - \mathbf{j})$
 (iii) $\mathbf{T}(1) = \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{j} + \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{k}, \mathbf{N}(1) = -\frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{k}$
 (iv) $\mathbf{T}(\ln 2) = \frac{3}{5\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} + \frac{4}{5\sqrt{2}}\mathbf{k}, \mathbf{N}(\ln 2) = \frac{4}{5}\mathbf{i} - \frac{3}{5}\mathbf{j}$
- 13** (i) $\mathbf{N}(\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$ (ii) $\mathbf{N}(1) = \frac{1}{\sqrt{30}}(-5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k})$

- (iii) $\mathbf{N}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} - \mathbf{j})$ (iv) $\mathbf{N}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{k})$
- 14** (i) $\mathbf{T}(0) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\mathbf{i} - 2\mathbf{j})$, $\mathbf{N}(0) = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\mathbf{i} + \mathbf{j})$, $a_T = \frac{7}{\sqrt{5}}$, $a_N = \frac{6}{\sqrt{5}}$
(ii) $\mathbf{T}(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k})$, $\mathbf{N}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$, $a_T = 0$, $a_N = \sqrt{2}$
(iii) $\mathbf{T}(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\mathbf{i} + \mathbf{j})$, $\mathbf{N}(\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$, $a_T = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{2}}$, $a_N = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{2}}$
(iv) $\mathbf{T}(\pi) = -\mathbf{j}$, $\mathbf{N}(\pi) = \mathbf{i}$, $a_T = 0$, $a_N = 36$
- 15** (i) $\rho_{min} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\rho_{max} = 2$ (ii) $\rho_{min} = 2\sqrt{2}$
- 16** (i) $2t + \frac{1}{t}$ (ii) $2t + \frac{1}{t}$ (iii) $8 + \ln 3$
- 17** (i) $\|\mathbf{v}\|_{min} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\mathbf{r} = \frac{3}{16}\mathbf{i} - \frac{1}{16}\mathbf{j}$
(ii) $\|\mathbf{v}\|_{min} = 3$, $\|\mathbf{v}\|_{max} = 6$
(iii) $\|\mathbf{v}\|_{min} = 2\sqrt{5}$, $\|\mathbf{v}\|_{max} = 2\sqrt{13}$
- 18** $\mathbf{r} = -\frac{19}{16}\mathbf{i} + \frac{3}{2}\mathbf{j} + \frac{3}{16}\mathbf{k}$
- 19** (i) $a_N = \frac{18}{(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}}$ (ii) $a_N = \frac{4e^x}{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}}$

Κεφάλαιο 3

- 1** (i) Όλα τα σημεία που βρίσκονται μεταξύ των παράλληλων ευθειών $y = 1 - x$ και $y = -1 - x$.
(ii) Όλα τα σημεία που βρίσκονται μεταξύ των παράλληλων ευθειών $x = \pm 2$.
(iii) Όλα τα σημεία που βρίσκονται πάνω και μέσα στη σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.
(iv) Όλα τα σημεία που βρίσκονται μέσα στο κύλινδρο $x^2 + y^2 = 1$.
- 2** (i) 0
(ii) $+\infty$ (Δεν υπάρχει)
(iii) 1
(iv) Δεν υπάρχει
(v) $+\infty$ (Δεν υπάρχει)
(vi) 0
- 3** (i) 0 (ii) $\frac{\pi}{2}$
- 4** (i) όλα τα σημεία στον \mathbb{R}^3 .
(ii) όλα τα σημεία μέσα στην σφαίρα με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ίση με 2.
(iii) όλα τα σημεία στον \mathbb{R}^3 , εκτός αυτά που βρίσκονται πάνω στον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 1$.
(iv) όλα τα σημεία στον \mathbb{R}^3 .
- 5** (i) $\frac{\pi}{2}$ (ii) $-\frac{\pi}{2}$
- 7** (i) $f_x(x, y) = \frac{y^{-\frac{1}{2}}}{y^2+x^2}$, $f_y(x, y) = -\frac{xy^{-\frac{3}{2}}}{y^2+x^2} - \frac{3}{2}y^{-\frac{5}{2}} \tan^{-1}(\frac{x}{y})$
(ii) $f_x(x, y) = 3x^2e^{-y} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^3 \sec \sqrt{x} \tan \sqrt{x}$, $f_y(x, y) = -x^3e^{-y} + 3y^2 \sec \sqrt{x}$
(iii) $f_x(x, y) = -\frac{4}{3}y^2 \sec^2 x (y^2 \tan x)^{-\frac{7}{3}}$, $f_y(x, y) = \frac{8}{3}y \tan x (y^2 \tan x)^{-\frac{7}{3}}$
(iv) $f_x(x, y) = 2y^2 \cosh \sqrt{x} \sinh(xy^2) \cosh(xy^2) + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \sinh \sqrt{x} \sinh^2(xy^2)$,
 $f_y(x, y) = 4xy \cosh \sqrt{x} \sinh(xy^2) \cosh(xy^2)$
- 8** (i) $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$
(ii) $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x+yz^2 \cos(xyz)}{xyz \cos(xyz) + \sin(xyz)}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xz^2 \cos(xyz)}{xyz \cos(xyz) + \sin(xyz)}$
- 10** (i) 8 (ii) -2
- 12** (i) $42t^{13}$

- (ii) $\frac{2(3+t^{-\frac{1}{3}})}{3(2t+t^{\frac{2}{3}})}$
 (iii) $3t^{-2} \sin(\frac{1}{t})$
 (iv) $\frac{1-2t^4-8t^4 \ln t}{2t\sqrt{1+\ln t}-2t^4 \ln t}$
- 13** (i) $\frac{\partial z}{\partial u} = 3 + 3\frac{v}{u} - 4u$, $\frac{\partial z}{\partial v} = 2 + 3 \ln u + 2 \ln v$
 (ii) $\frac{\partial z}{\partial y} = e^u$, $\frac{\partial z}{\partial v} = 0$
 (iii) $\frac{\partial z}{\partial u} = -\sin(u-v) \sin(u^2+v^2) + 2u \cos(u-v) \cos(u^2+v^2)$,
 $\frac{\partial z}{\partial v} = \sin(u-v) \sin(u^2+v^2) + 2v \cos(u-v) \cos(u^2+v^2)$
 (iv) $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2e^{2u}}{1+e^{4u}}$, $\frac{\partial z}{\partial v} = 0$
- 15** (i) $df = 0.03$ (ii) $df = -0.09$
- 16** (i) 0.5 (ii) 0 (iii) 1.1084 (iv) -0.0301
- 17** $|d\theta| \leq 0.004$
- 18** (i) 6 (ii) 0 (iii) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (iv) $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$
- 19** (i) $-8\sqrt{2}$ (ii) $\frac{7}{\sqrt{58}}$ (iii) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (iv) $\frac{7}{\sqrt{29}}$
- 20** (i) $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{10}}(\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$, $\|\nabla f(-1, -3)\| = -2\sqrt{10}$
 (ii) $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{13}}(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$, $\|\nabla f(2, 3)\| = -\sqrt{13}e^6$
 (iii) $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{10}}(-3\mathbf{i} + \mathbf{j})$, $\|\nabla f(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})\| = -\sqrt{5}$
 (iv) $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{10}}(\mathbf{i} - 3\mathbf{j})$, $\|\nabla f(3, 1)\| = -\frac{\sqrt{5}}{8}$
- 21** $\mathbf{u} = \pm \frac{1}{\sqrt{13}}(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$
- 22** (i) $f_x(1, 2) = 5$, $f_y(1, 2) = 10$ (ii) $D_{\mathbf{u}}f = -5\sqrt{5}$
- 23** (i) $DT = \frac{1}{9\sqrt{5}}$ (ii) $\mathbf{u} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$
- 24** (i) Σταγματικό σημείο: $(0, 0)$, σχετικά ελάχιστα: $(-1, -1)$, $(1, 1)$
 (ii) Σταγματικό σημείο: $(0, 0)$
 (iii) Σταγματικά σημεία: $(0, 0)$, $(0, -2)$, $(4, 0)$, σχετικό ελάχιστο: $(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$
 (iv) Σταγματικά σημεία: $(n\pi, 0)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
- 25** (i) Σχετικό ελάχιστο: $(0, 0)$
 (ii) Σχετικό ελάχιστο: $(0, 0)$
 (iii) Δεν υπάρχουν κρίσιμα σημεία.
 (iv) Σταγματικό σημείο: $(0, 0)$, σχετικά ελάχιστα: $(\pm \frac{\sqrt{6}}{2}, 0)$, σχετικά μέγιστα $(0, \pm \frac{\sqrt{2}}{2})$
- 26** (i) Απόλυτο μέγιστο = 0, απόλυτο ελάχιστο = -12
 (ii) Απόλυτο μέγιστο = 3, απόλυτο ελάχιστο = -1
 (iii) Απόλυτο μέγιστο = $\frac{33}{4}$, απόλυτο ελάχιστο = $-\frac{1}{4}$
- 27** (i) $(1, 2, 2)$ (ii) $(\pm\sqrt{5}, 0, 0)$

Κεφάλαιο 4

- 1** (i) $9 \ln 2$, (ii) $\frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{\pi}{12}$ (iii) $\frac{1}{2}e^{-6} + \frac{5}{2}$, (iv) $6 \ln 6 - 5 \ln 5 - 4 \ln 4 + 3 \ln 3$
- 2** (i) $\frac{2}{3}$, (ii) 16 (iii) 4, (iv) $\pi \ln 3$
- 3** (i) 8, (ii) $\frac{166}{27}$, (iii) $2\pi + 2e - \frac{2}{e}$, (iv) 2
- 4** (i) $\frac{1}{3\pi}$, (ii) $\frac{1}{10} \ln 2$
- 5** (i) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$, (ii) $\frac{1}{4} \ln 2$, (iii) 8, (iv) $\frac{81}{5}\pi$
- 6** (i) 27π , (ii) $\frac{\pi}{2}$, (iii) $\frac{31}{8}$, (iv) $\frac{128}{15}$

7 (i) $\frac{1}{8}(1 - e^{-16})$, (ii) $\sin 1$ (iii) $\frac{1}{2}(1 - e)$, (iv) $\frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1)$

8 (i) $\frac{26}{9}$, (ii) $\ln 5$, (iii) $\frac{1}{2}(1 - \cos 1)$, (iv) $\sin 4 - 4 \cos 4$

9 (i) $\frac{\pi}{4} \sin 1$, (ii) $\frac{\pi}{2}(1 - \frac{1}{\sqrt{1+a^2}})$, (iii) $\frac{\pi}{4}(\sqrt{5} - 1)$

10 (i) $\frac{4}{3}\pi + 2\sqrt{3}$, (ii) $2 - \frac{\pi}{4}$

11 (i) $\frac{16}{3}$, (ii) $\pi(1 - e^{-\frac{25}{2}})$, (iii) $\frac{3\pi^2}{64}$, (iv) $\frac{81\pi}{8}$

12 (i) $\frac{4\sqrt{2}\pi}{3}$ (ii) $\frac{625}{16}$

13 (i) $12 \sin^{-1} \frac{2}{3}$ (ii) $\frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5})$ (iii) 4π

14 $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Κεφάλαιο 5

1 (i) $f = xy$ (ii) $f = x^3y^2$ (iii) $f = -\frac{1}{x^2+y^2}$

2 (i) $f = \frac{1}{2}x^2y^2z^2$, (ii) $f = xy^2z^3$, (iii) $f = \frac{xz}{y}$, (iv) $f = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + z$

3 (i) $\operatorname{div} \mathbf{F} = 2x + 4y$, (ii) $\operatorname{div} \mathbf{F} = (x + 1)e^x + (y + 1)e^y$, (iii) $\operatorname{div} \mathbf{F} = \cos x - \sin y + 2z$,
(iv) $\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{2x}{x^2+y^2} + \frac{2z}{y^2+z^2} + x$

4 (i) $\operatorname{curl} \mathbf{F} = (xz - xy)\mathbf{i} - (yz - xy)\mathbf{j} + (yz - xz)\mathbf{k}$, $\operatorname{curl} \mathbf{F}(2, 1, 3) = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$,

(ii) $\operatorname{curl} \mathbf{F} = (z + 2x)\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}$, $\operatorname{curl} \mathbf{F}(2, -1, 3) = 7\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$,

(iii) $\operatorname{curl} \mathbf{F} = -2e^x \cos y\mathbf{k}$, $\operatorname{curl} \mathbf{F}(0, 0, 1) = -2\mathbf{k}$,

(iv) $\operatorname{curl} \mathbf{F} = (xy - xz)e^{-xyz}\mathbf{i} + (yz - zy)e^{-xyz}\mathbf{j} + (xz - yz)e^{-xyz}\mathbf{k}$, $\operatorname{curl} \mathbf{F}(3, 2, 0) = 6\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$

5 (i) 20 (ii) $\frac{5}{2}\pi$

6 (i) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (ii) 4π

7 (i) $-\frac{40}{3}$ (ii) 0 (iii) $\frac{\pi^6}{24} - \frac{16}{3}$

8 (i) $\frac{63}{2}$ (ii) $\frac{47}{2}$ (iii) $\frac{592}{5}$

9 (i) (a) $\frac{896}{3}$, (b) $-\frac{8}{3}$ (ii) (a) 32, (b) 32 (iii) (a) $\frac{2}{3}$, (b) $\frac{17}{6}$ (iv) (a) $-\pi$, (b) $-\frac{\pi^3}{2}$

10 (i) 25 (ii) -1 (iii) $\frac{\pi}{12}$ (iv) 0

11 (i) 2 (ii) 2 (iii) 2

12 (i) $\frac{9}{2}$ (ii) $\frac{22}{105}$

13 (i) $30(1 - \cos 2)$ (ii) $\frac{1}{3}$ (iii) -24π (iv) $\frac{195}{2}\pi$

14 (i) $-\frac{16}{3}$ (ii) $\frac{\pi}{2}$ (iii) -4π (iv) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$

15 (i) $171\sqrt{14}$ (ii) 4 (iii) $\frac{2}{105}(9\sqrt{3} + 4\sqrt{2} - 2)$ (iv) $\frac{364\sqrt{2}}{3}\pi$