

όπου χρησιμοποιήσαμε συμμετρία (η συνάρτηση προς ολοκλήρωση είναι άρτια). ◀

Ασκήσεις

1. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες:

(i) $y = \frac{1}{x^2}$, $y = x$, $y = 4$

(ii) $y = x^2 + 4$, $x + y = 6$

(iii) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$, $x = 2\pi$

(iv) $y = 2 + |x - 1|$, $y = -\frac{1}{5}x + 7$

2. Να βρεθεί ευθεία $x = k$ τέτοια ώστε να χωρίζει το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $x = \sqrt{y}$, $x = 2$ και $y = 0$ σε δύο ίσα μέρη.

3. Να δειχθεί ότι το εμβαδό της έλλειψης

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > 0, \quad b > 0$$

είναι ίσο με πab .

4. Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή του χωρίου που περικλείεται από τις παρακάτω καμπύλες γύρω από τον άξονα των x .

(i) $y = \sqrt{\cos x}$, $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$

(ii) $y = x^2$, $y = 4x$

(iii) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$

(iv) $y = \sqrt{x}$, $y = x$

(v) $y = x^2 - 2x$, $y = 0$

(vi) $y = -3x - x^2$, $y = 0$

5. Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή του χωρίου που περικλείεται από τις παρακάτω καμπύλες γύρω από τον άξονα των y .

(i) $y = 2x - x^2$, $y = 0$

(ii) $x = y^2$, $y = x^2$

(iii) $y = x^2 + 1$, $y = x + 3$, $x = 0$

(iv) $y = x^4$, $x = 1$, $y = 0$

6. Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = x^2$ και την ευθεία $y = 4$

(i) γύρω από τον άξονα των x (ii) γύρω από την ευθεία $y = 4$

(iii) γύρω από τον άξονα των y (iv) γύρω από την ευθεία $y = -1$

(v) γύρω από την ευθεία $x = 2$

7. Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $y = \frac{1}{x^3}$, $x = 1$, $x = 2$ και $y = 0$ γύρω από την ευθεία $x = -1$.

8. Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $y = x^3$, $y = 1$ και $x = 0$ γύρω από την ευθεία $y = 1$.
9. Να βρεθεί το μήκος τόξου της καμπύλης
- $y = \frac{1}{3}(x^2 + 2)^{3/2}$ από $x = 0$ ως $x = 3$
 - $9x^2 = 4y^3$ από $(0, 0)$ ως $(2\sqrt{3}, 3)$
 - $y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}$ από $x = 1$ ως $x = 3$
 - $(y + 1)^2 = 4x^3$ από $x = 0$ ως $x = 1$
10. Να βρεθεί το εμβαδόν της επιφάνειας που παράγεται από την πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των x των τόξων των παρακάτω καμπυλών:
- $y = \sqrt{x}$ από $x = 1$ ως $x = 4$
 - $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4x}$ από $x = 1$ ως $x = 2$
 - $y = x^3$ από $x = 0$ ως $x = 1$
 - $y = \sqrt{2x - x^2}$ από $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ως $(1, 1)$
11. Να βρεθεί το εμβαδόν της επιφάνειας που παράγεται από την πλήρη στροφή του τόξου της καμπύλης
- $y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}$ από $x = 1$ ως $x = 3$ γύρω από την ευθεία $y = -1$.
 - $y = \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{2}x^{1/2}$ από $(0, 0)$ ως $(9, \frac{33}{2})$ γύρω από την ευθεία $x = 9$.
12. Η παραβολή $y^2 = 4x$ και η ευθεία $y = 2x$ τέμνονται στα σημεία Ο και Α. Να υπολογιστεί η περίμετρος του μικτογράμμου χωρίου που ορίζεται από τη χορδή ΟΑ και το τόξο ΟΑ. Στη συνέχεια να υπολογιστεί το εμβαδόν της επιφάνειας που παράγει το μικτόγραμμο χωρίο όταν περιστραφεί πλήρως γύρω από τον άξονα των x .
13. Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον άξονα των x του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες
- $y = \cosh 2x$, $y = \sinh 2x$, $x = 0$, $x = 5$
 - $y = \operatorname{sech} x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \ln 2$
 - $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$
14. Να βρεθεί ο όγκος $V(b)$ του στερεού που παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον άξονα των y του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $y = \frac{1}{1+x^4}$, $y = 0$, $x = 1$ και $x = b$ ($b > 1$). Στη συνέχεια να βρεθεί το όριο $\lim_{b \rightarrow \infty} V(b)$.
15. Να βρεθεί το μήκος τόξου της καμπύλης $y = 2 \sec x$, όπου $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, από το σημείο $x = 0$ ως το $x = \frac{\pi}{4}$.
16. Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον άξονα των x του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη

$$y = \frac{2}{\cos 2x - \sin 2x},$$

τον άξονα των x και τις ευθείες $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{5\pi}{12}$. (Δεν χρειάζεται να γίνει σχήμα.)

17. Ένα σωματίδιο κινείται σε οριζόντια ευθεία με συνάρτηση θέσης $s(t) = t^4 - 6t^3 + 12t^2 - 10t + 3$. Να περιγραφεί η κίνηση.
18. Ένα σωματίδιο κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω με συνάρτηση θέσης $s(t) = 19, 6t - 4, 9t^2$. Να βρεθεί η απόσταση που θα διανύσει έτσι ώστε η ταχύτητα να είναι η μισή της αρχικής.

19. Να βρεθεί το εμβαδόν που περικλείεται από τις πιο κάτω καμπύλες.

$$(i) y = 2 - x^2, y = -x \quad (ii) y = 25 - x^2, 256x = 3y^2, 16y = 9x^2$$

20. Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή του χωρίου που περικλείεται από τις παρακάτω καμπύλες γύρω από τον άξονα των x .

$$(i) y = 4x^2, x = 0, y = 16 \quad (ii) y = x^2, y = 4x - x^2$$

21. Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή του χωρίου που περικλείεται από τις παρακάτω καμπύλες γύρω από τον άξονα των y .

$$(i) x^2 - y^2 = 16, y = 0, x = 8 \quad (ii) y = e^{-x^2}, y = 0, x = 0, x = 1$$

22. Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη

$$x = 2 \cos \theta - \cos 2\theta - 1, y = 2 \sin \theta - \sin 2\theta$$

γύρω από τον άξονα των x .

23. Να βρεθεί το μήκος τόξου της καμπύλης

$$(i) 6xy = x^4 + 3 \text{ από } x = 1 \text{ ως } x = 2$$

$$(ii) 27y^2 = 4(x - 2)^3 \text{ από } (2, 0) \text{ ως } (11, 6\sqrt{3})$$

$$(iii) y = \ln(1 - x^2) \text{ από } x = \frac{1}{4} \text{ ως } x = \frac{3}{4}$$

$$(iv) y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4} \ln x \text{ από } x = 1 \text{ ως } x = e$$

24. Να βρεθεί το μήκος τόξου της καμπύλης

$$(i) x = \ln \sqrt{1 + t^2}, y = \tan^{-1} t \text{ από } t = 0 \text{ ως } t = 1$$

$$(ii) x = 2 \cos \theta + \cos 2\theta + 1, y = 2 \sin \theta + \sin 2\theta \text{ από } \theta = 0 \text{ ως } \theta = 2\pi$$

25. Ένα σωματίδιο κινείται πάνω σε καμπύλη με εξίσωση

$$x = \frac{1}{2}t^2, y = \frac{1}{9}(6t + 9)^{\frac{3}{2}}.$$

Να βρεθεί η απόσταση που θα καλύψει από $t = 0$ ως $t = 4$.

26. Να βρεθεί το εμβαδόν της επιφάνειας που παράγεται από την πλήρη στροφή του τόξου της καμπύλης

$$x = e^t \cos t, y = e^t \sin t$$

από $t = 0$ ως $t = \frac{\pi}{2}$ γύρω από τον άξονα των x .

27. Να βρεθεί το μήκος της καμπύλης $y = \ln(\cos x)$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$.