Ασκήσεις

1. Να βρεθούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\text{(i)} \int \sqrt{x}(x^2+4x^3)\mathrm{d}x, \quad \text{(ii)} \int \left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x \quad \text{(iii)} \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$\text{(iv)} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(x+\frac{2}{\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x \quad \text{(v)} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x \quad \text{(vi)} \int_{-2}^{2} |2x-5|\mathrm{d}x$$

2. Να βρεθεί συνάρτηση $f(x)$ τέτοια ώστε $f'(x) = 6 - 5\sin 2x$ και $f(0) = 3$.

3. Αν $f'(x) = \sqrt{x}$ και $f(1) = 5$, να βρεθεί η συνάρτηση $f(x)$.

4. Να υπολογιστούν **γεωμετρικώς** τα εμβαδά που ορίζονται από τα πιο κάτω ολοκληρώματα:

$$\text{(i)} \int_0^5 4\mathrm{d}x \quad \text{(ii)} \int_0^5 |x-1|\mathrm{d}x \quad \text{(iii)} \int_{-3}^{0} \left(2+\sqrt{9-x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$\text{(iv)} \int_0^2 \sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x \quad \text{(v)} \int_0^{10} \sqrt{10x-x^2}\mathrm{d}x \quad \text{(vi)} \int_0^2 \sqrt{9-\frac{9}{4}x^2}\mathrm{d}x$$

$$\text{(vii)} \int_0^{15} f(x)\mathrm{d}x, \quad \text{όπου } f(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}x, & x \leq 3 \\ 4, & 3 < x < 12 \\ -\frac{4}{3}x+20, & x \geq 12 \end{cases}$$

5. Δεδομένου ότι $\frac{1}{\sqrt{x^3+1}} < x^{-3/2}$ για $4 \leq x \leq 9$ να δειχθεί ότι

$$\int_4^9 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+1}} < \frac{1}{3}.$$

6. Να δειχθεί ότι

$$\int_0^1 x^2 \sin x \mathrm{d}x \leq \frac{1}{3}.$$

7. Χρησιμοποιώντας τα κατάλληλα ορισμένα ολοκληρώματα να βρεθούν τα όρια:

$$\text{(i)} \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}{n^{3/2}} \quad \text{(ii)} \lim_{n\to+\infty} \frac{1^4+2^4+\ldots+(n-1)^4+n^4}{n^5}$$

8. Να βρεθεί η τιμή του x.

$$\text{(i)} \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = 3 \quad \text{(ii)} \int_x^0 \frac{1}{(3t+1)^2}\mathrm{d}t = -\frac{1}{6} \quad \text{(iii)} \int_2^x (4t-1)\mathrm{d}t = 9$$

9. Να βρεθεί η μέση τιμή της $f(x)$ στο διάστημα που δίνεται και να βρεθούν όλες οι τιμές του x^* όπως περιγράφεται στο θεώρημα μέσης τιμής για ολοκληρώματα.

$$\text{(i) } f(x) = 2+|x|, \ [-3,1] \quad \text{(ii) } f(x) = \sin^2 x, \ [0,\pi] \quad \text{(iii) } f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}, \ [0,4]$$

10. Να χρησιμοποιηθεί το δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού και ο κανόνας αλυσίδας για να δειχθεί ότι

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_0^{g(x)} f(t)\mathrm{d}t\right] = f\left(g(x)\right) g'(x).$$

Στη συνέχεια να αποδειχθεί ότι

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\mathrm{d}t\right] = f\left(g(x)\right) g'(x) - f\left(h(x)\right) h'(x).$$

11. Να υπολογιστούν οι πιο κάτω παράγωγοι:

$$\text{(i)}\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_{x^2}^{x^3} \sin^2 t\mathrm{d}t\right] \quad \text{(ii)}\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_{-x}^{x} \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t\right] \quad \text{(iii)}\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_{-1}^{x^2+\sqrt{x}} \left(t+\sqrt{t}\right)\mathrm{d}t\right]$$

12. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t + \int_0^{1/x} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

είναι σταθερή στο διάστημα $(0, +\infty)$.

13. Αν η $f(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση και ισχύει $x^2 \le f(x) \le 6, \quad \forall x \in [-1, 2]$, να βρεθούν οι τιμές των σταθερών Α και Β τέτοιες ώστε

$$A \le \int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x \le B.$$

14. Αν $F(x) = \int_1^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$, να βρεθούν: (i) $F(1)$ και (ii) $F'(1)$. Επίσης να δειχθεί ότι $F(4) - F(2) \le \frac{2}{5}$.

15. Να δειχθεί ότι αν η $f(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα στο $[a, b]$, τότε ισχύει

$$\int_a^b \left[f(x) - \bar{f}\right]\mathrm{d}x = 0,$$

όπου $\bar{f}$ είναι η μέση τιμή της $f(x)$ στο διάστημα $[a, b]$.

16. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση

$$y(x) = \frac{1}{a}\int_0^x f(t)\sin a(x-t)\mathrm{d}t$$

είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y'' + a^2 y = f(x), \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

17. Να βρεθεί η τιμή $f(4)$ αν

(i) $\displaystyle\int_0^x f(t) = \cos \pi x$

(ii) $\displaystyle\int_0^{x^2} f(t)\mathrm{d}t = x\cos \pi x$

(iii) $\displaystyle\int_0^{f(x)} t^2\mathrm{d}t = x\cos \pi x$

18. Οι μεταβλητές x και y σχετίζονται με την εξίσωση

$$x = \int_0^y \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+4t^2}}.$$

Να δειχθεί ότι

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = ky,$$

όπου k σταθερά προς υπολογισμό.