Το $(1,6)$ είναι σημείο καμπής και επομένως

$$y''(1) = 0 \Rightarrow 6 + 2a = 0 \Rightarrow a = -3.$$

(Παρατηρούμε ότι για $a = -3$ η $y'' = 6(x-1)$ αλλάζει πρόσημο στο $x = 1$. Δηλαδή, πράγματι στο $x = 1$ έχουμε σημείο καμπής.) Τώρα, το $(1,6)$ είναι σημείο της καμπύλης. Άρα

$$y(1) = 6 \Rightarrow 6 = 1 + a + b + 1 \Rightarrow b = 7.$$ ◀

Παράδειγμα: Να βρεθούν τα τοπικά και απόλυτα ακρότατα της $f(x) = \frac{x}{x^2+x+1}$ στο διάστημα $[-2,0]$.

Λύση: Έχουμε

$$f(x) = \frac{x}{x^2+x+1}, \quad f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+x+1)^2}.$$

Τώρα, $f'(x) = 0$ δίνει $x = -1$ και $x = 1$. Όμως το σημείο $x = 1$ είναι εκτός του διαστήματος $[-2,0]$. Παρατηρούμε ότι $f'(x) < 0$ στο διάστημα $(-2,-1)$ και $f'(x) > 0$ στο $(-1,0)$. Άρα το $x = -1$ είναι τοπικό ελάχιστο και επειδή η $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[-2,0]$, είναι και απόλυτο ελάχιστο. Επιπρόσθετα η $f(x)$ έχει απόλυτο ελάχιστο που συμβαίνει σε ένα από τα άκρα του διαστήματος. Βρίσκουμε $f(-2) = -\frac{2}{3}$ και $f(0) = 0$. Άρα $f(0) = 0$ είναι απόλυτο μέγιστο. ◀

Ασκήσεις

1. Ένα σωματίδιο κινείται κατά μήκος της καμπύλης η οποία έχει εξίσωση

   $$\frac{xy^3}{1+y^2} = \frac{8}{5}.$$

   Υποθέτουμε ότι το x αυξάνεται με ρυθμό 6 μονάδες/σες όταν το σωματίδιο βρίσκεται στο σημείο (1,2). Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του y σε αυτή τη χρονική στιγμή.

2. Ένα σωματίδιο κινείται κατά μήκος της $y = \sqrt{x^3+17}$. Όταν $x = 2$, το y αυξάνεται με ρυθμό 2 μονάδες/sec. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του x.

3. Να δειχθεί ότι $x < \tan x$ όταν $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

4. Έστω ότι η f είναι συνεχής συνάρτηση. Να γίνει η γραφική παράσταση της f για τις πιο κάτω περιπτώσεις:

   (i) $f(2) = 4,\ f'(2) = 0,\ f''(x) < 0,\ \ \forall x \in \mathbb{R}$

   (ii) $f(2) = 4,\ f^{(}2) = 0,\ f''(x) < 0$ όταν $x < 2$ και $f''(x) > 0$ όταν $x > 2$

   (iii) $f(2) = 4,\ f'' > 0$ όταν $x \neq 2$ και

   $$\lim_{x\to 2^+} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 2^-} f'(x) = +\infty.$$

5. Το σημείο $(-\frac{1}{2}, 4)$ είναι τοπικό ακρότατο της $f(x) = x^2 + \frac{1}{x} + ax + b$. Να βρεθούν οι τιμές των σταθερών a και b.

6. Να εξεταστούν ως προς τη μονοτονία οι συναρτήσεις

$$\text{(i) } f(x) = x^4 - 8x^2 + 17, \quad \text{(ii) } f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2, \quad \text{(iii) } f(x) = \sin x - x$$

7. Να παρασταθούν γραφικά οι συναρτήσεις

$$\text{(i) } y = \frac{(x-2)^3}{x^2}, \quad \text{(ii) } y = \frac{2(x+6)(x-4)}{(x-6)(x+4)}, \quad \text{(iii) } y = \frac{2x - x^2}{x^2 - 2x - 3}$$

8. Να παρασταθούν γραφικά οι συναρτήσεις

$$\text{(i) } f(x) = 1 - x^{2/3}, \quad \text{(ii) } f(x) = x - \cos x$$

9. Να βρεθεί το σημείο της καμπύλης $2y^2 = 5(x+1)$ το οποίο είναι το πλησιέστερο στην αρχή των αξόνων.

10. Να βρεθούν τα απόλυτα ακρότατα των πιο κάτω συναρτήσεων στα διαστήματα που δίνονται:

$$\text{(i) } f(x) = 2\sec x - \tan x \quad - \quad [0, \frac{\pi}{4}], \qquad \text{(ii) } f(x) = |6 - 4x| \quad - \quad [-3, 3]$$

$$\text{(iii) } f(x) = \sin(\cos x) \quad - \quad [0, 2\pi], \qquad \text{(iv) } f(x) = 1 + \frac{1}{x} \quad - \quad (0, +\infty)$$

11. Να βρεθούν τα απόλυτα ακρότατα της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 2, & x < 1 \\ (x-2)(x-3), & x \geq 1 \end{cases}$$

στο διάστημα $[\frac{1}{2}, \frac{7}{2}]$.

12. Να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος του Newton για να βρεθούν: (i) η $\sqrt{6}$ και (ii) η $\sqrt[3]{6}$.

13. Να αποδειχθεί ότι για τη συνάρτηση $f(x) = x^3 + x^2 - 4x + 1$ εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle στο διάστημα $[-1, 2]$ και να βρεθεί $c \in (-1, 2)$, τέτοιο ώστε $f'(c) = 0$.

14. Να χρησιμοποιηθεί το θεώρημα του Rolle προκειμένου να δειχθεί ότι η εξίσωση $6x^5 - 4x + 1$ έχει τουλάχιστο μια ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

15. Να χρησιμοποιηθεί το θεώρημα της μέσης τιμής προκειμένου να αποδειχθεί ότι

    (i) $|\tan x + \tan y| \geq |x + y|, \quad \forall x, y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

    (ii) Αν $f(1) = 0$ και $f'(x) = 1/x, \quad \forall x \in (0, +\infty)$ τότε $f(x) \leq x - 1 \quad \forall x \in (0, +\infty)$.

    (iii) Αν $0 < x < y$, τότε $1 - \frac{x}{y} < \ln \frac{y}{x} < \frac{y}{x} - 1$.

16. Αν $f(x)$ και $g(x)$ είναι συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει $f'(x) = g(x)$ και $g'(x) = -f(x)$ $\forall x$, τότε να δειχθεί ότι η $f^2(x) + g^2(x)$ είναι σταθερά συνάρτηση.

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}$. Να δειχθεί ότι η $f(x)$ είναι πάντοτε μη αρνητική. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες και τα τοπικά ακρότατα της καμπύλης $y = f(x)$ και στη συνέχεια να γίνει η γραφική παράσταση της καμπύλης.
    Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα απόλυτα ακρότατα της $f(x)$.

18. Η καμπύλη με εξίσωση $y = \frac{ax+b}{x^2-x-2}$, όπου a και b είναι σταθερές, έχει στάσιμο σημείο το $(1,1)$. Να βρεθούν οι τιμές των σταθερών a και b και στη συνέχεια να γίνει η γραφική παράσταση της καμπύλης.

19. Να βρεθούν δύο μη-αρνητικοί αριθμοί που έχουν άθροισμα ίσο με 20 και είναι τέτοιοι ώστε:
    (i) το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι μέγιστο

    (ii) το γινόμενο του τετραγώνου του ενός επί τον κύβο του άλλου είναι μέγιστο.

20. Να βρεθούν τα σημεία πάνω στην καμπύλη $x^2 - y^2 = 1$ τα οποία είναι πλησιέστερα στο σημείο $(0,2)$.

21. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ δεν έχει σχετικά ακρότατα.

22. Να εξεταστεί αν η συνάρτηση $y = x^3 - 3px + q$ έχει σχετικά ακρότατα.

23. Να εξεταστεί αν η συνάρτηση $2x^2 - 4xy + 3y^2 - 8x + 8y - 1 = 0$ έχει σχετικά ακρότατα.

24. Να βρεθεί η ελάχιστη απόσταση του σημείου $(4,2)$ από την παραβολή $y^2 = 8x$.

25. Να παρασταθούν γραφικά οι συναρτήσεις

$$\text{(i) } f(x) = x^4 - 2x^2 + 1 \qquad \text{(ii) } f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-9}} \qquad \text{(iii) } f(x) = x\sqrt{1-x}$$

26. Να δειχθεί ότι $\frac{2x}{\pi} < \sin x < x$ όταν $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

27. Να βρεθούν τα σημεία πάνω στην καμπύλη $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 4$ τα οποία είναι πλησιέστερα στην αρχή των αξόνων.

28. Να βρεθούν τα σημεία πάνω στην καμπύλη $x^2 - y^2 = 1$ τα οποία είναι πλησιέστερα στο σημείο $(c,0)$ στην περίπτωση όπου (i) $c = 4$, (ii) $c = 2$, (iii) $c = \sqrt{2}$.

29. Να δειχθεί ότι για κάθε x ισχύει

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Έστω η συνάρτηση f η οποία έχει παράγωγο ίση με

$$f'(x) = \frac{x}{1+x^2}.$$

Να δειχθεί ότι

$$|f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{2}|b-a|$$

για κάθε a και b με $a \neq b$.