

Παράδειγμα: Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς a έτσι ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - a^2, & x < 4 \\ ax + 20, & x \geq 4 \end{cases}$$

να είναι συνεχής στο $(-\infty, +\infty)$.

Λύση: Οι συναρτήσεις $x^2 - a^2$ και $ax + 20$ είναι συνεχείς στο διάστημα $(-\infty, 4) \cup (4, \infty)$ για κάθε τιμή της σταθεράς a . Το μόνο πιθανό σημείο που μπορεί να έχει ασυνέχεια είναι το $x = 4$. Για να είναι η $f(x)$ συνεχής στο $x = 4$ πρέπει να ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = f(4) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x).$$

Βρίσκουμε

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (x^2 - a^2) = 16 - a^2, \quad \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} (ax + 20) = 4a + 20$$

και $f(4) = 4a + 20$. Άρα για να είναι η $f(x)$ συνεχής στο $(-\infty, +\infty)$ πρέπει να ισχύει

$$16 - a^2 = 4a + 20 \Leftrightarrow a^2 + 2a + 4 = 0 \Leftrightarrow (a + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow a = -2. \quad \blacktriangleleft$$

Ασκήσεις

1. Να βρεθούν τα όρια :

$$(i) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2} \quad (ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{5x^2 - 2}}{x + 3} \quad (iii) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4 - x}{2 - \sqrt{x}} \quad (iv) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|}$$

$$(v) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} \quad (vi) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1 - \sqrt{x-2}}{x-3} \quad (vii) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3} - x)$$

$$(viii) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x) \quad (ix) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x^2 - 2x}$$

2. Να βρεθούν τα όρια :

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(kx)}{x^2}, \quad k \neq 0 \quad (ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \sin(kx)}{x}, \quad k \neq 0 \quad (iii) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

$$(iv) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad [t = 1/x] \quad (v) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\pi - x}{\sin x}, \quad (vi) \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\tan x - 1}{x - \pi/4}$$

3. Να μελετηθούν ως προς τη συνέχεια οι πιο κάτω συναρτήσεις :

$$(i) f(x) = \begin{cases} 3 + x, & x \leq 1 \\ 3 - x, & x > 1 \end{cases} \quad (ii) f(x) = \frac{|x^2 - 4|}{x + 2}$$

$$(iii) f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & -1 \leq x < 4 \\ \frac{x+1}{x-1}, & x \geq 4 \end{cases} \quad (iv) f(x) = \begin{cases} 1 + x, & x < -1 \\ 2x, & -1 \leq x \leq 1 \\ 3x - 1, & x > 1 \end{cases}$$

4. Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς k τέτοια ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 3x}{x}, & x \neq 0 \\ k, & x = 0 \end{cases}$$

να είναι συνεχής στο σημείο $x = 0$.

5. Να προσδιοριστούν οι σταθερές a και b τέτοιες ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -2 \sin x, & x \leq -\pi/2 \\ a \sin x + b, & -\pi/2 < x < \pi/2 \\ \cos x, & x \geq \pi/2 \end{cases}$$

να είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

6. Να δειχτεί ότι οι πιο κάτω εξισώσεις έχουν μια τουλάχιστον λύση στα αντίστοιχα διαστήματα που δίνονται:

$$(i) x - \cos x = 0, \quad [0, \frac{\pi}{2}] \quad (ii) x + \sin x - 1 = 0, \quad [0, \frac{\pi}{6}]$$

7. Να βρεθούν τα όρια:

$$(i) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad (ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + e^x}{1 + 3e^x} \quad (iii) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{(-e^x)}$$

$$(iv) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{x} \quad (v) \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x - e^a}{x - a} \quad (vi) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right)$$

8. Να βρεθούν οι τιμές των σταθερών a και b τέτοιες ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, & x \leq 1 \\ ax + b + \ln x, & 1 < x < 2 \\ \ln x, & x \geq 2 \end{cases}$$

να είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

9. Να προσδιοριστεί η τιμή του λ έτσι ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \cos x + \lambda \sin x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \\ (2\lambda + 1) \tan x, & \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

να είναι συνεχής στο διάστημα $[0, \frac{\pi}{2})$.

10. Έστω ότι f και g είναι συναρτήσεις ορισμένες και συνεχείς στο διάστημα $[0, 1]$ τέτοιες ώστε $f(0) = g(1)$, $f(1) = g(0)$ και $g(0) \neq g(1)$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $c \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε $f(c) = g(c)$.

11. Να μελετηθεί ως προς τη συνέχεια η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{|x|}{x} (x^2 - 1)$$

και να γίνει η γραφική της παράσταση.

12. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ ρητός} \\ 0, & x \text{ άρρητος} \end{cases}$$

Να χρησιμοποιηθεί το θεώρημα sandwich για να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} xf(x) = 0.$$

13. Να υπολογισθούν τα όρια

$$(i) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2} \quad (ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}} \quad (iii) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}$$

14. Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των πιο κάτω συναρτήσεων. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) σημεία ασυνέχειας και να εξεταστεί αν είναι διορθώσιμα σημεία.

$$(i) f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} \quad (ii) f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 17x + 15}{x^2 + 2x - 15}$$

15. Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς k τέτοια ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{7x+2} - \sqrt{6x+4}}{x-2}, & x \geq -\frac{2}{7}, x \neq 2 \\ k, & x = 2 \end{cases}$$

να είναι συνεχής.

16. Να υπολογισθούν τα όρια

$$(i) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \sin x}{x + \sin x} \quad (ii) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x-3)(\sqrt{x}-1)}{2x^2+x-3} \quad (iii) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2x}}{x^2-x}$$