

## Ασκήσεις

1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών των παρακάτω συναρτήσεων:

$$(i) f(x) = x^2 - 3x + 2 \quad (ii) f(x) = x + \cos x \quad (iii) f(x) = x^2 + 1/x$$

$$(iv) f(x) = x + 1/x \quad (v) f(x) = x^2 + \sqrt{1-x^2} \quad (vi) f(x) = |2x-4| - x$$

$$(vii) f(x) = \frac{1}{x^2-1}$$

2. Απαλείφοντας τις απόλυτες τιμές να οριστεί τμηματικά η συνάρτηση

$$f(x) = |x-5| - |x-3|$$

και να γίνει η γραφική της παράσταση.

3. Με τη χρήση της γραφικής παράστασης της  $y = |x|$ , να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων:

$$(i) y = |x-4| \quad (ii) y = |x| + 4$$

$$(iii) y = |x-4| + 4 \quad (iv) y = |x+5| - 2$$

4. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f(x) = \frac{1}{|x-3|^2 + |x-3| - 6}$ .

Να βρεθούν συναρτήσεις  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$ ,  $f_3(x)$  τέτοιες ώστε  $(f_1 \circ f_2 \circ f_3)(x) = f(x)$ .

5. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f_1(x) = 5x + 4$  και  $f_2(x) = 6x + c$ , όπου  $c$  είναι σταθερά. Να υπολογιστεί η τιμή της σταθεράς  $c$  τέτοια ώστε  $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$ .

6. Κάθε συνάρτηση  $f(x)$  μπορεί να γραφεί ως  $f(x) = g(x) + h(x)$ , όπου  $g(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$  και  $h(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$ . Να δειχθεί ότι η  $g(x)$  είναι άρτια συνάρτηση και η  $h(x)$  είναι περιττή συνάρτηση.

Να εκφραστούν οι πιο κάτω συναρτήσεις σε άθροισμα μιας άρτιας και μιας περιττής συνάρτησης:

$$(i) f(x) = e^x \quad (ii) f(x) = e^x \sin x$$

$$(iii) f(x) = 10^x + 2x \quad (iv) f(x) = \sqrt{(x-1)/(x+1)}$$

7. Αν  $f_1(x) = \sqrt{1-x^2}$  και  $f_2(x) = \sin 3x$ , να υπολογιστούν:

$$(i) (f_1 + f_2)(x), \quad (ii) (f_1 - f_2)(x), \quad (iii) (f_1 f_2)(x),$$

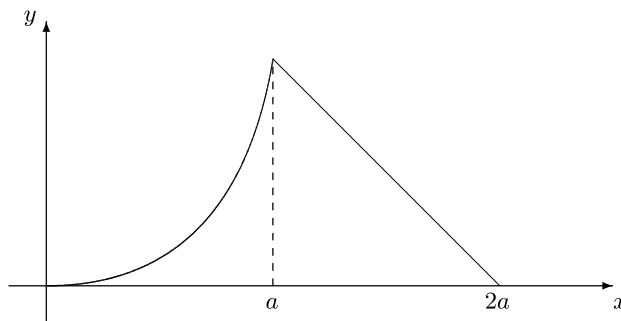
$$(iv) \left(\frac{f_1}{f_2}\right)(x), \quad (v) (f_1 \circ f_2)(x), \quad (vi) (f_2 \circ f_1)(x).$$

Σε κάθε περίπτωση να δίνεται το πεδίο ορισμού.

8. Η συνάρτηση  $[x]$ , όπου  $x \in \mathbb{R}$ , ορίζεται ως ο μεγαλύτερος ακέραιος αριθμός ο οποίος είναι  $\leq x$ . Για παράδειγμα,  $[4.2] = 4$ ,  $[-2.7] = -3$ ,  $[5] = 5$ .

Να εξεταστούν αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι περιοδικές και να γίνουν οι γραφικές τους παραστάσεις:

$$(i) f(x) = [x], \quad (ii) f(x) = x - [x], \quad (iii) f(x) = [x] - x, \quad (iv) f(x) = [\sin x].$$



9. Το σχήμα δείχνει μέρος της γραφικής παράστασης της  $y = f(x)$ , όπου  $0 \leq x \leq 2a$ . Η ευθεία  $x = 2a$  είναι άξονας συμμετρίας της γραφικής παράστασης.

Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις, σε ξεχωριστό σύστημα αξόνων, των παρακάτω συναρτήσεων (στο διάστημα που δίνεται):

(i)  $y = f(x)$ , όπου  $0 \leq x \leq 4a$       (ii)  $y = -f(2x)$ , όπου  $0 \leq x \leq a$   
 (iii)  $y = 3f(x/2)$ , όπου  $0 \leq x \leq 2a$       (iv)  $y = f(x - a)$ , όπου  $2a \leq x \leq 4a$

10. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{px+q}{x+r}$ , όπου  $p, q, r$  είναι σταθερές και  $x \neq \pm r$ . Αν η  $f$  είναι άρτια συνάρτηση να αποδειχτεί ότι

(i)  $q = rp$   
 (ii) η  $f$  είναι της μορφής  $f = \text{σταθερά}$ .

11. (α) Αν  $f(x+y) = f(x) - f(y)$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ , να δειχτεί ότι  $f(x) = 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .  
 (β) Αν  $f(-x) = -f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , να δειχτεί ότι  $f(0) = 0$ .

12. Να βρεθεί η  $f^{-1}(x)$  και το πεδίο ορισμού της όταν

(i)  $f(x) = (x+2)^4$ ,  $x \geq 0$       (ii)  $f(x) = \sqrt{x+3}$   
 (iii)  $f(x) = 3x^2 + 5x - 2$ ,  $x \geq 0$       (iv)  $f(x) = x - 5x^2$ ,  $x \geq 1$

13. Αν  $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$ , να βρεθεί η τιμή του  $x$  που ικανοποιεί την εξίσωση

$$f^{-1}(x) = 2.$$

14. Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς  $c$  τέτοια ώστε η συνάρτηση  $f(x) = \frac{2x}{x+c}$  να έχει ως αντίστροφη της τον εαυτό της.

15. Να λυθούν οι εξισώσεις

(i)  $\ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln(2x^3) = \ln 3$       (ii)  $e^{-2x} - 3e^{-x} = -2$

16. Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των πιο κάτω εξισώσεων.

(i)  $y = x^3 - 1$       (ii)  $y = (x-2)^3$       (iii)  $y = (x+1)^3 - 2$   
 (iv)  $y = -x^3$       (v)  $y = -(x-1)^3$       (vi)  $y = -(x-1)^3 + 2$

17. Να βρεθεί το πεδίο τιμών των πιο κάτω συναρτήσεων.

$$(i) f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \quad (ii) f(x) = 5 - x^2 \quad (iii) f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (iv) f(x) = x - |x|$$

18. Να βρεθεί το πεδίο τιμών των πιο κάτω συναρτήσεων.

$$(i) f(x) = \frac{1}{(x-2)(x-3)} \quad (ii) f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (iii) f(x) = \begin{cases} x-1, & 0 \leq x \leq 3 \\ x-2, & 3 < x < 4 \end{cases}$$

19. Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = |x| + |x-1|$ .

20. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών της συνάρτησης  $f(x) = \sqrt{5-4x-x^2}$ .

21. Δίνεται ότι

$$\ln \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \ln(x+1) - \frac{1}{2} \ln(x-1) + 3x + \ln x + c,$$

όπου  $c$  είναι αυθαίρετη σταθερά. Να εκφραστεί το  $y$  συναρτήσει του  $x$ .

22. Για τις πιο κάτω συναρτήσεις,

$$(i) f(x) = (x-2)(x+1) \quad (ii) f(x) = x^2 \quad (iii) f(x) = 4 - x^2$$

να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις:

$$(\alpha) y = f(x)$$

$$(\beta) y = |f(x)|$$

$$(\gamma) y = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}|f(x)|$$