(iii) Αρχίζουμε από το δεξιό μέλος και χρησιμοποιούμε τον ορισμό των ακολουθιών b_n και a_n,

$$1+\frac{1}{b_{n-1}}=1+\frac{1}{\frac{a_n}{a_{n-1}}}=1+\frac{a_{n-1}}{a_n}=\frac{a_n+a_{n-1}}{a_n}=\frac{a_{n+1}}{a_n}=b_n.$$

(iv) Αν $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\rho$, τότε $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{b_{n-1}}\right)=\rho$. Επειδή $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_{n-1}$, έχουμε

$$1+\frac{1}{\rho}=\rho \Leftrightarrow \rho^2-\rho-1=0.$$

Λύνοντας αυτή την εξίσωση και χρησιμοποιώντας ότι $b_n>0 \Rightarrow \rho>0$, βρίσκουμε

$$\rho=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.618.$$

◄

Ασκήσεις

1. Να βρεθούν οι πρώτοι πέντε όροι των πιο κάτω ακολουθιών. Στη συνέχεια να εξεταστεί η σύγκλιση των ακολουθιών και να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα όριά τους.

   (i) $\{1+(-1)^n\}$ (ii) $\left\{(-1)^n\frac{2n^3}{n^3+1}\right\}$ (iii) $\left\{\cos\left(\frac{3}{n}\right)\right\}$

   (iv) $\left\{n^2 \mathrm{e}^{-n}\right\}$ (v) $\left\{\sqrt{n^2+3n}-n\right\}$ (vi) $\left\{\left(1-\frac{2}{n}\right)^n\right\}$

2. Έστω ότι a_1 και k είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί και η $\{a_n\}$ είναι μια ακολουθία για την οποία ισχύει η αναδρομική σχέση

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{k}{a_n}\right) \quad \text{για} \quad n\geq 1.$$

   Αν η ακολουθία συγκλίνει να βρεθεί το όριό της L.

3. Να δειχθεί ότι ένα πολύγωνο με n πλευρές εγγεγραμμένες σε κύκλο ακτίνας r έχει περίμετρο ίση με

$$P_n=2rn\sin\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

   Στη συνέχεια να αποδειχθεί ο τύπος που δίνει την περιφέρεια του κύκλου υπολογίζοντας το όριο της ακολουθίας $\{P_n\}$.

4. Να εξεταστούν ως προς την μονοτονία οι πιο κάτω ακολουθίες

   (i) $\{n-2^n\}$ (ii) $\left\{\frac{2^n}{n!}\right\}$ (iii) $\left\{\frac{10^n}{(2n)!}\right\}$

   (iv) $\left\{\frac{n^n}{n!}\right\}$ (v) $\left\{\frac{1}{n\ln n}\right\}$ (vi) $\left\{\tan^{-1} n\right\}$

5. Δίνεται ότι η ακολουθία $\{a_n\}$ παράγεται από την αναδρομική σχέση

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \quad n \geq 1 \text{ με } a_1 = \sqrt{2}.$$

(i) Να βρεθούν οι πρώτοι τρεις όροι της ακολουθίας.
(ii) Να δειχθεί ότι $a_n < 2$ για $n \geq 1$.
(iii) Να δειχθεί ότι

$$a_{n+1}^2 - a_n^2 = (2 - a_n)(1 + a_n) \text{ για } n \geq 1.$$

(iv) Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα από τα (ii) και (iii), να δειχθεί ότι η $\{a_n\}$ είναι γνησίως αύξουσα ακολουθία.
(v) Να δειχθεί ότι η ακολουθία $\{a_n\}$ συγκλίνει και να βρεθεί το όριό της L.

6. Να εξεταστεί αν οι πιο κάτω ακολουθίες είναι φραγμένες, αύξουσες και συγκλίνουσες.

$$(a)\ \left\{n + \frac{2}{n}\right\} \qquad (b)\ \left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\} \qquad (c)\ \left\{\sin\frac{n\pi}{4}\right\} \qquad (d)\ \left\{\frac{\ln n}{n}\right\}$$

7. Να εξεταστεί αν η ακολουθία με γενικό όρο

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{1}{n^p}}$$

συγκλίνει.