ΑΣΚΗΣΕΙΣ 5

5.1 Να μετασχηματιστεί η Volterra ολοκληρωτική εξίσωση 1ου είδους

$$x = \int_0^x (e^x + e^s)\phi(s)\mathrm{d}s$$

σε volterra 2ου είδους. Να δειχθεί ότι η λύση φ ικανοποιεί διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης και να βρεθεί η λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης.

5.2 Να λυθούν οι πιο κάτω Fredholm ολοκληρωτικές εξισώσεις 2ου είδους. Για κάθε εξίσωση να βρεθεί η χαρακτηριστική τιμή της αντίστοιχης ομογενούς ολοκληρωτικής εξίσωσης.

(α) $\phi(x) = x + \lambda \int_0^1 \phi(s)\mathrm{d}s$

(β) $\phi(x) = 1 + \lambda \int_0^1 x^n s^m \phi(s)\mathrm{d}s$

5.3 Να βρεθούν οι χαρακτηριστικές τιμές και λύσεις των πιο κάτω ολοκληρωτικών εξισώσεων

(α) $\phi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (x-s)^2 \phi(s)\mathrm{d}s$

(β) $\phi(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x+s)\phi(s)\mathrm{d}s$

5.4 Να λυθούν οι ολοκληρωτικές εξισώσεις βρίσκοντας τις λύσεις των ισοδύναμων διαφορικών εξισώσεων

(α) $\phi(x) = 1 + \int_0^x \phi(s)\mathrm{d}s$

(β) $\phi(x) = 1 + 2\int_0^x s\phi(s)\mathrm{d}s$

(γ) $x\phi(x) = x^n + \int_0^x \phi(s)\mathrm{d}s$

(δ) $\phi(x) = e^{-x} + 2\int_0^x \sin(x-s)\phi(s)\mathrm{d}s$

5.5 Να δειχθεί ότι το πρόβλημα

$$y'' + Ay' + By = 0, \quad y(0) = y(1) = 0,$$

όπου A, B είναι σταθερές, είναι ισοδύναμο με την ολοκληρωτική εξίσωση

$$y(x) = \int_0^1 k(x,s)y(s)\mathrm{d}s,$$

όπου

$$k(x,s) = \begin{cases} Bs(1-x) + Ax - A, & S < x \\ Bx(1-s) + Ax, & S > x \end{cases}$$

5.6 Να μετασχηματιστεί το πρόβλημα

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{dx^2} + xy = 1, \quad y(0) = y(1) = 0$$

στην ολοκληρωτική εξίσωση

$$y(x) = -\frac{1}{2}x(1-x) + \int_0^1 G(x,s)sy(s)\mathrm{d}s$$

όπου

$$G(x,s) = \begin{cases} s(1-x), & s < x \\ x(1-s), & s > x \end{cases}$$

5.7 Να μετασχηματιστούν τα πιο κάτω προβλήματα σε Fredholm ολοκληρωτικές εξισώσεις

(α) $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + y = x, \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = 0$

(β) $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + y = x, \quad y(0) = 1, \quad y'(1) = 0$

5.8 Να δειχθεί ότι η συνάρτηση Green του τελεστή του Bessel τάξης n

$$Ly = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) - \frac{n^2}{x}y$$

σχετικός με τις συνθήκες $y(0) = y(1) = 0$, είναι της μορφής

$$G(x,s) = \begin{cases} \frac{1}{2n}\left(\frac{s}{x}\right)^n(1-x^{2n}), & s < x, \\ \frac{1}{2n}\left(\frac{x}{s}\right)^n(1-s^{2n}), & s > x, \quad n \neq 0 \end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας το πιο πάνω αποτέλεσμα να μετασχηματιστεί το πρόβλημα

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + (\lambda x^2 - n^2)y = 0, \quad y(0) = y(1) = 0$$

σε ολοκληρωτική εξίσωση, όταν $n \neq 0$.

5.9 Να δειχθεί ότι το πρόβλημα

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2} + \omega^2\phi = F[x, \phi(x)], \quad \phi(0) = \phi(l) = 0$$

μετασχηματίζεται στην ολοκληρωτική εξίσωση

$$\phi(x) = \int_0^l G(x,s)F(s,\phi(s))\mathrm{d}s$$

όπου

$$G(x,s) = \begin{cases} -\frac{\sin\omega x\sin\omega(l-s)}{\omega\sin\omega l}, & x < s \\ -\frac{\sin\omega s\sin\omega(l-x)}{\omega\sin\omega l}, & x > s \end{cases}$$

είναι η συνάρτηση Green του διαφορικού τελεστή $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \omega^2$.

5.10 Με τη χρήση της μετασχηματισμένης Laplace να λυθούν οι ολοκληρωτικές εξισώσεις

(α) $\phi(x) = x - \int_0^x (x-s)\phi(s)\mathrm{d}s$

(β) $\phi(x) = xe^x + \int_0^x s\phi(x-s)\mathrm{d}s$

(γ) $\phi(x) + \int_0^x \phi(s)\mathrm{d}s = 1$

(δ) $\phi(x) = 1 + x - \frac{8}{3}\int_0^x (s-x)^3\phi(s)\mathrm{d}s$

5.11 Να λυθεί η ολοκληρωτική εξίσωση

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x \sin(x-s)\phi(s)\mathrm{d}s$$

όταν (α) $f(x) = x$ και $\lambda = 1$, (β) $f(x) = e^{-x}$ και $\lambda = 2$.

5.12 Αν $F(u)$ είναι η μετασχηματισμένη Fourier της $f(x)$, τότε η μετασχηματισμένη της $f''(x)$ είναι $-u^2F(u)$ με την προϋπόθεση ότι $f, f' \to 0$ όταν $x \to \pm\infty$. Να δειχθεί ότι η λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-s|}\phi(s)\mathrm{d}s$$

είναι

$$\phi(x) = \frac{1}{2}\left[f(x) - f''(x)\right].$$

5.13 Αν $F(u)$ είναι η μετασχηματισμένη Laplace της $f(x)$, τότε η μετασχηματισμένη της $f'(x)$ είναι $uF(u) - f(0)$. Να βρεθεί η λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης

$$f(x) = \int_0^x e^{x-s}\phi(s)\mathrm{d}s.$$

5.14 Να λυθεί η ολοκληρωτική εξίσωση

$$\phi(x) = f(x) + \lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} \cos(xs)\phi(s)\mathrm{d}s$$

χρησιμοποιώντας τη μετασχηματισμένη Mellin.

5.15 Να δειχθεί ότι η ολοκληρωτική εξίσωση του Abel

$$f(x) = \int_0^x (x-s)^{-n}\phi(s)\mathrm{d}s$$

έχει λύση

$$\phi(x) = \frac{\sin \pi n}{\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_0^x (x-s)^{n-1}f(s)\; dds\right]$$

[Υπόδειξη $\mathcal{L}\{x^{-n}\} = \Gamma(1-n)u^{n-1}$, $\Gamma(n)\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin \pi n}$]