ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3

3.1 Να δειχθεί ότι το σύνολο $\{1, \cos\frac{n\pi}{p}x, \sin\frac{m\pi}{p}x\},\ n=1,2,3,...,\ m=1,2,3,...$ είναι ορθογώνιο στο διάστημα $[-p,p]$.

3.2 Να δειχθεί ότι οι συναρτήσεις $H_0(x)=1,\ H_1(x)=2x,\ H_2(x)=4x^2-2$, είναι ορθογώνιες ως προς τη συνάρτηση βάρους $w(x)=e^{-x^2}$ στο διάστημα $(-\infty,\infty)$.

3.3 Έστω ότι το σύνολο $\{\Phi_n(x)\}$ είναι ορθογώνιο στο διάστημα $[a,b]$. Να δειχθεί ότι $\| \Phi_m(x)+\Phi_n(x) \|^2 = \| \Phi_m(x) \|^2 + \| \Phi_n(x) \|^2,\ \ m\neq n.$

3.4 Να βρεθούν σταθερές $c_1,\ c_2,\ c_3$ τέτοιες ώστε το

$$\int_{-\pi}^{\pi}[x-(c_1\mathrm{sin}x+c_2\mathrm{sin}2x+c_3\mathrm{sin}3x)]^2dx$$

να είναι ελάχιστο.

Να βρεθεί το μέσο τετραγωνικό σφάλμα E της προσέγγισης της $f(x)=x$ από την $c_1\sin x+c_2\sin 2x+c_3\sin 3x$.

3.5 Να βρεθεί η σειρά Fourier της f στο διάστημα που δίνεται.

(α) $f(x)=x+\pi,\ -\pi<x<\pi$

(β) $f(x)=e^x,\ -\pi<x<\pi$

(γ) $f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi<x<0 \\ \sin x, & 0\le x<\pi \end{cases}$

(δ) $f(x)=\begin{cases} 0, & -2<x<-1 \\ -2, & -1\le x<0 \\ 1, & 0\le x<1 \\ 0, & 1\le x<2 \end{cases}$

(ε) $f(x)=\begin{cases} 1, & -5<x<0 \\ 1+x, & 0\le x<5 \end{cases}$

(ζ) $f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi<x<0 \\ e^x-1, & 0\le x<\pi \end{cases}$

3.6 (α) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του 3.5(α) να δειχθεί ότι

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...$$

(β) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του 3.5(γ) να δειχθεί ότι

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{1.3}-\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}-\frac{1}{7.9}+...$$

3.7 Χρησιμοποιώντας την μιγαδική εκθετική μορφή του ημιτόνου και συνημιτόνου:

$$\cos\frac{n\pi}{p}x=\frac{e^{\frac{in\pi x}{p}}+e^{\frac{-in\pi x}{p}}}{2},\ \ \sin\frac{n\pi}{p}x=\frac{e^{\frac{in\pi x}{p}}-e^{\frac{-in\pi x}{p}}}{2i}$$

Να δειχθεί η μιγαδική μορφή της σειράς Fourier:

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{\frac{in\pi x}{p}},$$

όπου $c_0=\dfrac{a_0}{2},\ c_n=\dfrac{a_n-ib_n}{2}$ και $c_{-n}=\dfrac{a_n+ib_n}{2},\ n=1,2,3,...$

Στη συνέχεια να δειχθεί ότι οι σταθερές $c_0,\ c_n$ μπορούν να οριστούν με ένα ολοκλήρωμα,

$$c_n = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(x)e^{\frac{-in\pi x}{p}}dx.$$

3.8 Να δειχθεί ότι για $0 \leq x \leq \pi$

(α) $x(\pi - x) = \dfrac{\pi^2}{6} - (\dfrac{\cos 2x}{1^2} + \dfrac{\cos 4x}{2^2} + \dfrac{\cos 6x}{3^2} + ...)$

(β) $x(\pi - x) = \dfrac{8}{\pi}(\dfrac{\sin x}{1^3} + \dfrac{\sin 3x}{3^3} + \dfrac{\sin 5x}{5^3} + ...)$

3.9 Χρησιμοποιώντας την άσκηση 3.8 να δειχθεί ότι

(α) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

(β) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$

(γ) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$

3.10 Να γραφούν οι πιο κάτω συναρτήσεις στη κατάλληλη ημιτονική ή συνημιτονική σειρά.

(α) $f(x) = |x|,\ \ -\pi < x < \pi$ (β) $f(x) = \begin{cases} x-1, & -\pi < x < 0 \\ x+1, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$

(γ) $f(x) = |\sin x|,\ \ -\pi < x < \pi$ (δ) $f(x) = \begin{cases} 1, -2 < x < -1 \\ -x, -1 \leq x < 0 \\ x, 0 \leq x < 1 \\ 1, 1 \leq x < 2 \end{cases}$

3.11 Να αναπτυχθούν οι πιο κάτω συναρτήσεις σε (α) σειρές ημιτόνων και (β) σειρές συνημιτόνων:

(α) $f(x) = \cos x,\ \ 0 < x < \frac{\pi}{2}$ (β) $f(x) = x^2 + x,\ \ 0 < x < 1$

(γ) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases}$ (δ) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 1, & 1 \leq x < 2 \end{cases}$

3.12 Να αναπτυχθούν οι πιο κάτω συναρτήσεις σε σειρές Fourier

(α) $f(x) = x^2,\ \ 0 < x < 2\pi$ (β) $f(x) = x + 1,\ \ 0 < x < 1$

3.13 Να βρεθεί η διπλή σειρά συνημιτόνων της συνάρτησης

$f(x, y) = xy,\ \ 0 \leq x \leq 1,\ \ 0 \leq y \leq 1$

3.14 Αν η σειρά Fourier της $f(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο διάστημα $(-p, p)$, να δειχθεί η ταυτότητα του Parseval,

$$\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}[f(x)]^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2),$$

με την προϋπόθεση ότι το ολοκλήρωμα υπάρχει.

3.15 Χρησιμοποιώντας την άσκηση 3.8 και την ταυτότητα του Parseval να δειχθεί ότι

(α) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ (β) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$

3.16 Να δειχθεί ότι

(α) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$ (β) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$

3.17 (α) Να δειχθεί ότι για $-\pi < x < \pi$,

$$x = 2(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - ...)$$

(β) Ολοκληρώνοντας την πιο πάνω σχέση να δειχθεί ότι για $-\pi \leq x \leq \pi$,

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - ...)$$

(γ) Ολοκληρώνοντας την πιο πάνω σχέση να δειχθεί ότι για $-\pi \leq x \leq \pi$,

$$x(\pi - x)(\pi + x) = 12(\frac{\sin x}{1^3} - \frac{\sin 2x}{2^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} - ...)$$

(δ) Να δειχθεί ότι οι σειρές στο (β) και στο (γ) συγκλίνουν ομοιόμορφα στις αντίστοιχες συναρτήσεις.

3.18 Να δειχθεί ότι για $-\pi < x < \pi$,

$$x\cos x = -\frac{1}{2}\sin x + 2(\frac{2}{1.3}\sin 2x - \frac{3}{2.4}\sin 3x + \frac{4}{3.5}\sin 4x - ...)$$

Χρησιμοποιώντας αυτή τη σχέση να δειχθεί ότι για $-\pi \leq x \leq \pi$,

$$x\sin x = 1 - \frac{1}{2}\cos x - 2(\frac{\cos 2x}{1.3} - \frac{\cos 3x}{2.4} + \frac{\cos 4x}{3.5} - ...)$$

3.19 Παραγωγίζοντας τη σχέση στην άσκηση 3.8(β) να δειχθεί ότι για $0 \leq x \leq \pi$,

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + ...)$$

3.20 Να βρεθεί το ολοκλήρωμα Fourier:

(α) $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 < x < 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$ (β) $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$

3.21 Να βρεθεί το κατάλληλο ημιτονικό ή συνημιτονικό ολοκλήρωμα

(α) $f(x) = \begin{cases} |x|, & |x| < \pi \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}$ (β) $f(x) = e^{-|x|} \sin x$

3.22 Να βρεθεί το ημιτονικό και συνημιτονικό ολοκλήρωμα

(α) $f(x) = e^{-kx}, \ \ k > 0, \ x > 0$ (β) $f(x) = xe^{-2x}, \ \ x > 0$

3.23 Να βρεθεί το ολοκλήρωμα Fourier της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & 0 < x < 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

Να δειχθεί ότι $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin kx}{x} dx = \frac{\pi}{2}, \ \ k > 0.$

3.24 Να βρεθεί η μετασχηματισμένη Fourier της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

3.25 Να βρεθεί η ημιτονική μετασχηματισμένη της $e^{-x}, \ \ x \geq 0.$

Να δειχθεί ότι $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x \sin mx}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{2} e^{-m}, m > 0.$

3.26 Να βρεθεί η ημιτονική και συνημιτονική μετασχηματισμένη της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & x \geq 1 \end{cases}$$

3.27 Να λυθούν τα πιο κάτω συνοριακά προβλήματα:

(α) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad x > 0, \ 0 < y < 2$

$u(0, y) = 0, \ \ 0 < y < 2, \ \ u(x, 0) = f(x), \ \ u(x, 2) = 0, \ \ x > 0$

(β) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < \pi, \ y > 0$

$$u(0,y)=e^{-y},\ \ u(\pi,y)=0,\ \ y>0,\ \ \left.\frac{du}{dy}\right|_{y=0}=0,\ \ 0<x<\pi$$

3.28 Να δειχθεί ότι η λύση του συνοριακού προβλήματος

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t},\ \ -\infty<x<\infty,\ \ t>0$$

$$u(x,0)=f(x),\ \ -\infty<x<\infty$$

είναι $u(x,t)=\dfrac{1}{2\sqrt{kpt}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(w)e^{-\int (x-w)^2 4kt}\mathrm{d}w$

$$\left[\ \ \mathcal{F}\{e^{-\frac{x^2}{4r^2}}\}=2\sqrt{\pi}pe^{-p^2a^2},\ \ \mathcal{F}^{-1}\{F(a)G(a)\}=\int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)du\ \ \right]$$

Να δειχθεί ότι $\displaystyle\int_a^b e^{-u^2}\mathrm{d}u=\frac{\sqrt{\pi}}{2}[erf(b)-erf(a)]$

Χρησιμοποιώντας αυτό το αποτέλεσμα και το μετασχηματισμό $v=\dfrac{x-w}{2\sqrt{kt}}$, να δειχθεί ότι η πιο πάνω λύση όταν

$$f(x)=\begin{cases} u_0, & |x|<1 \\ 0, & |x|>1 \end{cases}$$

γράφεται στη μορφή

$$u(x,t)=\frac{u_0}{2}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x+1}{2\sqrt{kt}}\right)-\operatorname{erf}\left(\frac{x-1}{2\sqrt{kt}}\right)\right].$$

3.29 Να λυθούν τα πιο κάτω συνοριακά προβλήματα:

(i)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\gamma^2 u=\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t},\quad 0<x<L,\ t>0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(L,t)=0,\quad t>0$$

$$u(x,0)=\frac{x}{L},\quad 0<x<L$$

(ii)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad 0<x<L,\ t>0$$

$$u(0,t)=0,\ u(L,t)=0,\quad t>0$$

$$u(x,0)=\frac{1}{4}x(L-x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0,\quad 0<x<L$$

3.30 Να λυθεί το συνοριακό πρόβλημα

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + u, \quad 0 < x < \pi,\ t > 0$$

$$u(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = \begin{cases} x, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} \le x < \pi \end{cases}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \quad 0 < x < \pi$$