ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2

2.1 Να βρεθεί η $\mathcal{L}\{f(t)\}$

(α) $f(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t < 1 \\ 1 & t \geq 1 \end{cases}$ (β) $f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t < \pi \\ 0, & t \geq \pi \end{cases}$

(γ) $f(t) = e^{-t}\sin t$ (δ) $f(t) = t\cos t$ (ε) $f(t) = 4t^2 - 5\sin 3t$

(στ) $f(t) = e^{t}\sinh t$ (ζ) $f(t) = \sin 2t \cos 2t$ (η) $f(t) = \sin t \cos 2t$

2.2 Η συνάρτηση **Γάμμα** ορίζεται ως:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}\mathrm{d}t, \qquad \alpha > 0$$

Να δειχτεί ότι $\mathcal{L}\{t^{\alpha}\} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}, \qquad \alpha > -1$

Να βρεθεί η $\mathcal{L}\{f(t)\}$

(α) $f(t) = t^{-\frac{1}{2}}$ (β) $f(t) = t^{\frac{1}{2}}$ (γ) $f(t) = t^{\frac{3}{2}}$

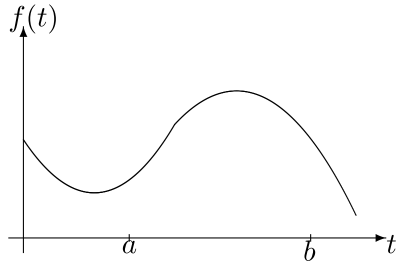
2.3 Να δειχτεί ότι η συνάρτηση $f(t) = t^{-2}$ δεν έχει μετασχηματισμένη Laplace.

2.4 Να υπολογιστούν:

(α) $\mathcal{L}\{t^3e^{-2t}\}$ (β) $\mathcal{L}\{t(e^t + e^{2t})^2\}$

(γ) $\mathcal{L}\{t\,\mathcal{U}(t-2)\}$ (δ) $\mathcal{L}\{\cos 2t\,\mathcal{U}(t-\pi)\}$

2.5 Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(t)$ δίνεται από το πιο κάτω σχήμα



Σχήμα 1:

Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των πιο κάτω συναρτήσεων.

(α) $f(t) - f(t)\mathcal{U}(t-a)$

(β) $f(t-b)\mathcal{U}(t-b)$

(γ) $f(t)\mathcal{U}(t-a)$

(δ) $f(t) - f(t)\mathcal{U}(t-b)$

(ε) $f(t)\mathcal{U}(t-a) - f(t)\mathcal{U}(t-b)$

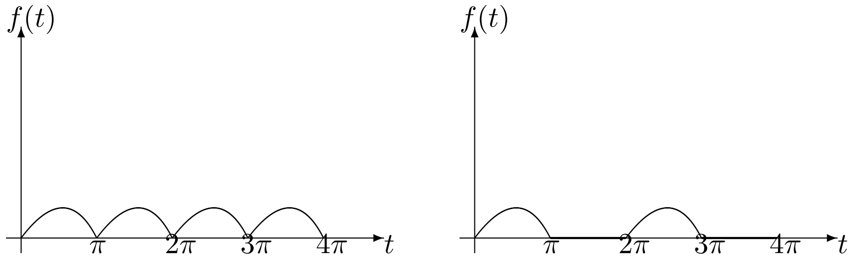
(στ) $f(t-a)\mathcal{U}(t-a) - f(t-a)\mathcal{U}(t-b)$

2.6 Να γραφούν οι πιο κάτω συναρτήσεις συναρτήσει μοναδιαίων βηματικών συναρτήσεων. Στη συνέχεια να βρεθεί η μετασχηματισμένη Laplace για την καθεμιά.

(α) $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 4 \\ 0, & 4 \leq t < 5 \\ 1, & t \geq 5 \end{cases}$ (β) $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1 \\ t^2, & t \geq 1 \end{cases}$

(γ) $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases}$ (δ) $f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t < 2\pi \\ 0, & t \geq 2\pi \end{cases}$

2.7 Να βρεθεί η μετασχηματισμένη Laplace για τις πιο κάτω περιοδικές συναρτήσεις που δίνονται γραφικά.



Σχήμα 2:

2.8 Να βρεθεί η $\mathcal{L}\{f(t)\}$, όπου

$f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 1 \\ 0, & 1 < t < 2 \end{cases}$ και $f(t+2) = f(t)$ για $t > 0$.

2.9 Να αποδειχτεί η αντιμεταθετική ιδιότητα της συνέλιξης δύο συναρτήσεων,

$$f * g = g * f.$$

2.10 Να βρεθεί η $\mathcal{L}\{f(t)\}$.

(α) $f(t) = \displaystyle\int_0^t e^u \mathrm{d}u$ (β) $f(t) = \displaystyle\int_0^t e^{-u} \cos u \mathrm{d}u$ (γ) $f(t) = \displaystyle\int_0^t u e^{t-u} \mathrm{d}u$

2.11 Να βρεθούν:

(α) $\mathcal{L}\{1 * t^3\}$ (β) $\mathcal{L}\{t^2 * t^4\}$ (γ) $\mathcal{L}\{e^{-t} * e^t \cos t\}$

2.12 Να βρεθούν :

(α) $\mathcal{L}\{t \cos at\}$ (β) $\mathcal{L}\{t^2 \sin t\}$ (γ) $\mathcal{L}\{t^3 \cos t\}$

(δ) $\mathcal{L}\{\frac{1}{t}(e^{-at} - e^{-bt})\}$ (ε) $\mathcal{L}\{\dfrac{\sinh t}{t}\}$

2.13 Να δειχθεί ότι

(α) $\displaystyle\int_0^{+\infty} t e^{-3t} \sin t \mathrm{d}t = \frac{3}{50}$ (β) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-3t} - e^{-6t}}{t} \mathrm{d}t = \ln 2$

(γ) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$

2.14 Να βρεθεί η $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$

(α) $F(s)=\dfrac{(s+1)^3}{s^4}$ (β) $F(s)=\dfrac{1}{4s+1}$ (γ) $F(s)=\dfrac{1}{s^2-16}$

(δ) $F(s)=\dfrac{2s-6}{s^2+9}$ (ε) $F(s)=\dfrac{s}{(s-2)(s-3)(s-6)}$

(στ) $F(s)=\dfrac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}$

2.15 Να βρεθεί η $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$

(α) $F(s)=\dfrac{1}{(s+2)^3}$ (β) $F(s)=\dfrac{s}{(s+1)^2}$ (γ) $F(s)=\dfrac{2s-1}{s^2(s+1)^3}$

(δ) $F(s)=\dfrac{e^{-2s}}{s^3}$ (ε) $F(s)=\dfrac{e^{-s}}{s(s+1)}$ (στ) $F(s)=\dfrac{s}{(s^2+1)^2}$

2.16 Χρησιμοποιώντας τη σχέση $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\}=f*g$ να βρεθούν:

(α) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s+1)}\right\}$ (β) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+1)(s-2)}\right\}$

(γ) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s^2+4)^2}\right\}$ (δ) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s^2+4s+5)^2}\right\}$

2.17 Να δειχθεί ότι $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\mathrm{d}u=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

2.18 Να υπολογιστούν:

(α) $\mathcal{L}\left\{\dfrac{e^{-2t}}{\sqrt{t}}\right\}$ (β) $\mathcal{L}\{t^2C_i(t)\}$ (γ) $\mathcal{L}\{e^{-t}S_i(2t)\}$

(δ) $\mathcal{L}\{e^{3t}erf(\sqrt{t})\}$ (ε) $\mathcal{L}\{erfc(\sqrt{t})\}$ (στ) $\mathcal{L}\{\displaystyle\int_0^t erf\sqrt{u}\mathrm{d}u\}$

(ζ) $\mathcal{L}\{t^2\mathcal{U}(t-2)\}$ (η) $\mathcal{L}\left\{\dfrac{\sin^2 t}{t}\right\}$ (θ) $\mathcal{L}\{t\,\mathcal{U}(t-1)+t^2\delta(t-1)\}$

2.19 Να δειχθεί ότι

$$\mathcal{L}\{\sin\sqrt{t}\}=\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{1}{4}s} \quad \text{και} \quad \mathcal{L}\left\{\frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right\}=\sqrt{\frac{\pi}{s}}e^{-\frac{1}{4}s}$$

Υπόδειξη: $\sin\sqrt{t}=\sqrt{t}-\frac{(\sqrt{t})^3}{3!}+\frac{(\sqrt{t})^5}{5!}-\cdots$.

2.20 Η συνάρτηση **Βήτα** ορίζεται ως:

$$B(m,n)=\int_0^1 u^{m-1}(1-u)^{n-1}\mathrm{d}u, \qquad m>0,\ n>0.$$

Να δειχθεί ότι $B(m,n) = \dfrac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$.

2.21 Να υπολογιστούν: (Με την χρήση του τύπου του Heaviside).

(α) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s^2-6s+5}{s^3-6s^2+11s-6}\right\}$ (β) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s-1}{(s+3)(s^2+2s+2)}\right\}$

(γ) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s^2-2s+2)(s^2+2s+2)}\right\}$

2.22 Να υπολογιστούν:

(α) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{\sqrt{s}}{s-1}\right\}$ (β) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-s}(1-e^{-s})}{s(s^2+1)}\right\}$ (γ) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{1+\sqrt{s}}\right\}$

2.23 Να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις υποκείμενες στις δοσμένες αρχικές συνθήκες:

(α) $y''-6y'+9y=t$ $\quad y(0)=0,\quad y'(0)=1$
(β) $y''-y'=e^t\cos t$ $\quad y(0)=0,\quad y'(0)=0$
(γ) $y^{(4)}-y=t$ $\quad y(0)=y'(0)=y''(0)=y'''(0)=0$
(δ) $y''+4y=\sin t\ \mathcal{U}(t-2\pi)$ $\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0$
(ε) $y''+4y'+13y=\delta(t-\pi)+\delta(t-3\pi)$ $\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0$

2.24 Να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις

(α) $y''+2y'+y=0$ $\quad y'(0)=2,\quad y(1)=2$
(β) $ty''-y'=t^2$ $\quad y(0)=0$

2.25 Να λυθούν τα συστήματα διαφορικών εξισώσεων

(α)

$$\begin{aligned} x''+x-y &= 0, \quad x(0)=0,\ x'(0)=-2 \\ y''+y-x &= 0, \quad y(0)=0,\ y'(0)=1 \end{aligned}$$

(β)

$$\begin{aligned} x''+3y'+3y &= 0, \quad x(0)=0,\ x'(0)=2 \\ x''+3y &= te^{-t}, \quad y(0)=0 \end{aligned}$$

2.26 Να λυθεί η μερική διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad x>0, \qquad t>0$$

η οποία ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες

$u(0,t)=u_0,$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} u(x,t)=0$
$u(x,0)=0,$ $\quad x>0$