ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1

1.1. Να βρεθούν τα ακρότατα των παρακάτω συναρτησιακών:

(α) $\mathrm{I}[y(x)] = \int_A^B (y'^2 + 2yy' + y^2)dx$, όπου $A(1,1),\ B(2,0)$.

(β) $\mathrm{I}[y(x)] = \int_A^B (y'^2 + 2xy - y^2)dx$, όπου $A(0,0),\ B(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

(γ) $\mathrm{I}[y(x)] = \int_A^B (4\mathrm{cosx} + y'^2 - y^2)dx$, όπου $A(0,0),\ B(\pi,0)$.

(δ) $\mathrm{I}[y(x)] = \int_A^B (x+1)^2 y'^2 dx$, όπου $A(0,0),\ B(1,1)$.

1.2. Να δειχθεί ότι τα ακρότατα του συναρτησιακού

$$\mathrm{I}[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx$$

είναι κύκλοι με κέντρα πάνω στον άξονα των x.

1.3. Να βρεθεί η εξίσωση της καμπύλης $y = y(x)$ που ενώνει τα σημεία (x_1, y_1) και (x_2, y_2) τέτοια ώστε όταν περιστραφεί γύρω από τον άξονα των x, το εμβαδόν της επιφάνειας που παράγεται να έχει ελάχιστη τιμή.

1.4. Να δειχθεί ότι το μήκος της καμπύλης μεταξύ δύο σημείων που προσδιορίζονται με πολικές συντεταγμένες (ρ, ϕ) είναι

$$\int_{\phi_1}^{\phi_2} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\phi}\right)^2} d\phi,$$

όπου (ρ_1, ϕ_1) και (ρ_2, ϕ_2) οι πολικές συντεταγμένες των δύο σημείων.
Υπολογίζοντας το ελάχιστο του πιο πάνω ολοκληρώματος να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας γραμμής σε πολικές συντεταγμένες.

1.5. Σύμφωνα με την αρχή του Fermat, μια ακτίνα φωτός κινείται από ένα σημείο σε άλλο με τέτοιο τρόπο ώστε ο χρόνος που χρειάζεται και είναι ίσος με

$$\int \frac{\mathrm{d}s}{v},$$

όπου s είναι το μήκος του τόξου που ενώνει τα δύο σημεία και v η ταχύτητα, να είναι ελάχιστος. Να δειχθεί ότι η τροχιά της ακτίνας δίνεται από τη διαφορική εξίσωση

$$vy'' + (1+y'^2)\frac{\partial v}{\partial y} - y'(1+y'^2)\frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

1.6 Να δειχθεί ότι η εξίσωση Euler για το πρόβλημα

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y', y'')dx = 0$$

γράφεται στη μορφή

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

1.7. Να βρεθεί η συνάρτηση $y(x)$ τέτοια ώστε $\int_0^{\pi} y^2 \mathrm{d}x = 1$, η οποία δίνει στο ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} y''^2 dx$ ελάχιστη τιμή και ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες $y(0) = y(\pi) = y''(0) = y''(\pi) = 0$.

1.8. (α) Να βρεθεί η συνάρτηση που καθιστά το ολοκλήρωμα

$$\mathrm{I}[y(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y'^2 + 2xyy')\mathrm{d}x$$

ακρότατο, όπου $y(0) = 0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ και η $y(x)$ είναι υποκείμενη στη συνθήκη

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} y\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - 1.$$

(β) Να βρεθεί η καμπύλη $y(x)$ που καθιστά το ολοκλήρωμα

$$\mathrm{I}[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1 + y'^2} dx$$

ελάχιστο, όπου $y(x)$ είναι υποκείμενη στη συνθήκη

$$\int_{x1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx \ = \text{σταθερά}.$$

Να δοθεί η γεωμετρική ερμηνεία του αποτελέσματος.

1.9. Να βρεθούν τα ακρότατα του συναρτησιακού

$$\mathrm{I}[y(x),\ z(x)] = \int_0^1 (y'^2 + z'^2 - 4xz' - 4z)\mathrm{d}x$$

με $y(0) = 0,\ z(0) = 0,\ y(1) = 1,\ z(1) = 1$, υποκείμενο στη συνθήκη

$$\int_0^1 (y'^2 - xy' - z'^2)\mathrm{d}x = 2.$$

1.10. Να βρεθούν τα ακρότατα του ολοκληρώματος

$$\mathrm{I}[y(x),\ z(x)] \ = \ \int_0^1 (y^2 + y'^2 + z'^2)\mathrm{d}x$$

με $y(0) = 0,\ z(0) = 0,\ y(1) = 1,\ z(1) = 0$ υποκείμενο στη συνθήκη

$$y' + z' - y = 0.$$

1.11. Να δειχθεί ότι $\delta \displaystyle\int_{x_1}^{x_2} f(x,y,y')\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} \delta f(x,y,y')\mathrm{d}x.$

1.12. Να δειχθεί ότι $\delta(F_1F_2) = F_1\delta F_2 + F_2\delta F_1$.

1.13. Χρησιμοποιώντας μεταβολικό συμβολισμό να αποδειχθεί η εξίσωση του Euler.

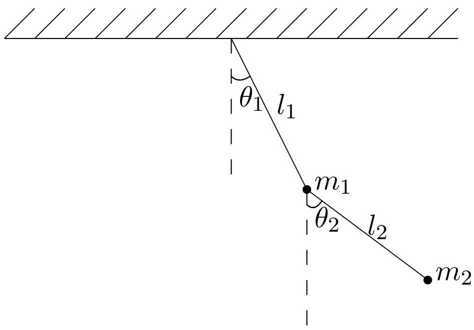
1.14. Αν $x = x(t)$ και $y = y(t)$ τότε να αποδειχθεί η σχέση

$$\delta\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\delta y) - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\delta x).$$

1.15. Να λυθεί η άσκηση 1.9 χρησιμοποιώντας μεταβολικό συμβολισμό.

1.16. Χρησιμοποιώντας μεταβολικό συμβολισμό να αποδειχθεί η μέθοδος των πολλαπλασιαστών Lagrange στην περίπτωση που έχουμε ολοκληρωτικές συνθήκες.

1.17. Να βρεθούν οι εξισώσεις κίνησης για το διπλό εκκρεμές.



Σχήμα 1:

1.18. Να βρεθούν οι εξισώσεις κίνησης ενός υλικού σημείου μάζας M σε σφαιρικές συντεταγμένες

$$(x = r\sin\theta\cos\varphi,\quad y = r\sin\theta\sin\varphi,\quad z = r\cos\theta),$$

όπου $V = V(r,\theta,\varphi)$.

1.19. Να βρεθεί το συναρτησιακό που έχει ως εξίσωση Euler την διαφορική εξίσωση $y'' + y + x = 0$. Στη συνέχεια να βρεθεί κατά προσέγγιση μια λύση της εξίσωσης με $y(0) = y(1) = 0$ χρησιμοποιώντας τις υπο-δοκιμή συναρτήσεις (i) $y = c\,x(1-x)$, (ii) $y = c_1x(1-x) + c_2x^2(1-x)$, όπου c, c_1, c_2 σταθερές προς υπολογισμό

1.20. Να βρεθεί κατά προσέγγιση λύση για την ακρότατη τιμή του ολοκληρώματος $\displaystyle\int_0^{\pi}(y'^2 - y^2 + 4xy)\mathrm{d}x$ αν $y'(0) = y(\pi) = 0$.

1.21. Να εκφραστεί η διαφορική εξίσωση $(1-x^2)y''-2xy'+12y=0$ με $y(0)=0,\ y(1)=1$ σε μεταβολική μορφή και να βρεθούν κατά προσέγγιση λύσεις.

1.22. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Rayleigh-Ritz να βρεθεί μια κατά προσέγγιση λύση της

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)+y=x,\quad y(0)=0,\ \ y(1)=1,$$

στη μορφή $y\approx x+x(1-x)(c_1+c_2x)$.

1.23. Να δειχθεί ότι οι ιδιοτιμές και αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις της διαφορικής εξίσωσης Sturm - Liouville 4ης τάξης

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left[s(x)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right]+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+[q(x)+\lambda r(x)]y=0$$

μπορούν να υπολογιστούν θεωρώντας τα ακρότατα του

$$\lambda=\frac{\int_{x_1}^{x_2}(py'^2-qy^2-sy''^2)\mathrm{d}x}{\int_{x_1}^{x_2}ry^2\mathrm{d}x}.$$

1.24. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Rayleigh-Ritz να βρεθούν δύο διαδοχικές προσεγγίσεις για την ελάχιστη ιδιοτιμή του προβλήματος

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1+x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\lambda y=0,\ \ y(0)=y(1)=0$$

υποθέτοντας (α) $y(x)=C_1x(1-x)$ και (β) $y(x)=(C_1+C_2x)x(1-x)$.

1.25. Να δειχθεί ότι μια αναγκαία συνθήκη για το ολοκλήρωμα

$$\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,z,y',z')$$

υποκείμενο στις δύο συνθήκες

$$\int_{x_1}^{x_2}F_1(x,y,z,y',z')\mathrm{d}x=K_1,\qquad \int_{x_1}^{x_2}F_2(x,y,z,y',z')\mathrm{d}x=K_2$$

να έχει μέγιστο ή ελάχιστο είναι

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial G}{\partial y'}\right)-\frac{\partial G}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial G}{\partial z'}\right)-\frac{\partial G}{\partial z}=0.$$

όπου $G=F+\lambda_1F_1+\lambda_2F_2,\ \ \lambda_1,\ \ \lambda_2$ είναι οι πολλαπλασιαστές του Lagrange.