ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Η Λαπλασιανή $\bigtriangledown^2$ σε καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z) ορίζεται ως

$$\bigtriangledown^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Να δειχθεί ότι

(α) σε κυλινδρικές συντεταγμένες (ρ, ϕ, z) γράφεται

$$\bigtriangledown^2 u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

(β) σε σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, ϕ) γράφεται

$$\bigtriangledown^2 u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}$$

2. Να προσδιοριστούν τα σχετικά μέγιστα, σχετικά ελάχιστα και σαγματικά των συναρτήσεων

(α) $f(x, y) = \mathrm{e}^x \sin y$

(β) $f(x, y) = xy + \dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{y}$

(γ) $f(x, y) = y \sin x$

3. (α) Να βρεθούν τα σημεία του επιπέδου $x + y + z = 5$ στο πρώτο οκτημόριο για τα οποία η συνάρτηση $f(x, y, z) = xy^2z^2$ έχει μέγιστη τιμή.

(β) Να βρεθούν τα σημεία πάνω στην επιφάνεια $x^2 - yz = 5$ τα οποία είναι τα πλησιέστερα στην αρχή των αξόνων.

4. Χρησιμποιώντας τους πολλαπλασιαστές του Lagrange

(α) να βρεθούν τα μέγιστα-ελάχιστα των πιο κάτω συναρτήσεων με τις δοσμένες συνθήκες.

(i) $f(x, y, z) = 2x + y - 2z, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4$

(ii) $f(x, y, z) = xyz, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$

(β) Να βρεθεί το σημείο του επιπέδου $x + 2y + z = 1$, το οποίο είναι το πλησιέστερο στην αρχή των αξόνων.

5. Να αποδειχθεί ότι

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\mathrm{d}t\right] = h'(x)f(h(x)) - g'(x)f(g(x))$$

6. Να δειχθεί ότι η $y(x, t) = F(2x + 3t) + G(2x - 3t)$ είναι η γενική λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης

$$4\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

7. Να λυθεί η μερική διαφορική εξίσωση

$$x\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Να βρεθεί μια ειδική λύση που ικανοποιεί τις συνθήκες $z(x,0) = x^5 + x - \dfrac{68}{x}, \quad z(2,y) = 3y^4$.

8. Να δειχθεί ότι η $u(x,y) = F(2x+y) + G(2x-y)$ είναι η γενική λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Να βρεθεί η γενική λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \mathrm{e}^{2x+y}.$$

9. Αν $u^2 - v = 3x + y$ και $u - 2v^2 = x - 2y$, χρησιμοποιώντας ιακωβιανές να βρεθούν οι παράγωγοι u_x, v_x, u_t, v_t.

10. Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $u = F\left(\dfrac{x}{\sqrt{t}}\right)$ να μετασχηματιστεί η μερική διαφορική εξίσωση $u_t = u_{xx} + u_x^2$ σε συνήθη διαφορική εξίσωση.

11. Να λυθούν τα παρακάτω προβλήματα συνοριακών τιμών με τη μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών.

(i) $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial x} - 2u, \quad u(x,0) = 10\mathrm{e}^{-x} - 6\mathrm{e}^{-4x}$

(ii) $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0,t) = u(4,t) = 0,\ u(x,0) = 6\sin\dfrac{\pi x}{2} + 3\sin\pi x$