ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
ΜΑΣ 481

ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

Δευτέρα 9 Μαΐου, 2022

Να λυθούν πέντε (5) θέματα.

---

1. Να δειχθεί ότι $\delta \int_{x_1}^{x_2} F\left(x, y, y'\right) \mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} \delta F\left(x, y, y'\right) \mathrm{d}x.$

Να βρεθεί η εξίσωση Euler (με απόδειξη) για το πρόβλημα

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} F\left(x, y, y'\right) \mathrm{d}x = 0.$$

Να βρεθεί η καμπύλη που δίνει ακρότατη τιμή στο ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{x} \mathrm{d}x,$$

όπου $y(0) = 0$ και $y(1) = 1$.

Στη περίπτωση που η συνάρτηση $f = f(y, y')$, δηλαδή δεν εξαρτάται άμεσα από το x, να δειχθεί ότι η εξίσωση του Euler γράφεται στη μορφή

$$f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} = c,$$

όπου c είναι σταθερά.

Να βρεθεί η καμπύλη $y(x)$ που δίνει ακρότατη τιμή στο συναρτησιακό

$$\mathbf{I}[y(x)] = \int_0^1 \left[\tfrac{1}{2}(y')^2 + yy' + y' + y\right] \mathrm{d}x, \qquad y(0) = y(1) = 1.$$

2. Αν $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ και το όριο $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{f(t)}{t}$ υπάρχει, να αποδειχθούν οι ιδιότητες.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(u)\mathrm{d}u \quad \text{και} \quad \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)\mathrm{d}u\right\} = \frac{F(s)}{s}.$$

Να βρεθεί η μετασχηματισμένη Laplace $\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}$ και να δειχθεί ότι

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right\} = \frac{1}{s}\cot^{-1} s.$$

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x \quad \text{και} \quad \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x}\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

και να βρεθεί η μετασχηματισμένη Laplace $\mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{\mathrm{e}^x \sin x}{x}\mathrm{d}x\right\}$.
Χρησιμοποιώντας μετασχηματισμένες Laplace να λυθεί το πρόβλημα

$$t\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + ty = 0, \quad \lim_{t\to 0^+} y(t) = 1.$$

3. (α) Να διατυπωθεί το θεώρημα σύγκλισης για τις σειρές Fourier.
Αν $x \in [0, \pi]$, να δειχθεί ότι

$$\sin x = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1}.$$

Στη συνέχεια να υπολογιστούν τα πιο κάτω αθροίσματα:

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{4n^2-1}, \qquad \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{4n^2-1}.$$

(β) Χρησιμοποιώντας τη σειρά Fourier της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0 \\ x, & 0 \le x < 1 \end{cases}$$

να βρεθεί η άπειρη σειρά η οποία είναι ίση με $\dfrac{\pi^2}{8}$.

4. (α) Να βρεθεί το ολοκλήρωμα Fourier της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ e^{-x}, & x > 0 \end{cases}.$$

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty \frac{\cos(kx) + x\sin(kx)}{1+x^2} \mathrm{d}x,$$

όπου k είναι πραγματικός αριθμός.

(β) Να βρεθεί η μετασχηματισμένη Fourier της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}.$$

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty \left(\frac{x\cos x - \sin x}{x^3} \right) \cos\frac{x}{2} \mathrm{d}x.$$

5. Έστω $J_n(x)$ η συνάρτηση Bessel πρώτου είδους τάξης n. Να αποδειχθούν οι πιο κάτω αναδρομικοί τύποι

(i) $J_n(x) = \dfrac{x}{2n}\left[J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)\right],$

(ii) $J_n'(x) = \dfrac{1}{2}\left[J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)\right].$

Στη συνέχεια να αποδειχθούν οι πιο κάτω σχέσεις

(iii) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[xJ_n(x)J_{n+1}(x)\right] = x\left[J_n^2(x) - J_{n+1}^2(x)\right],$

(iv) $\displaystyle\int_0^x sJ_n^2(s)\mathrm{d}s = \frac{x^2}{2}\left[J_n^2(x) - J_{n-1}(x)J_{n+1}(x)\right].$

6. Έστω η γεννήτρια συνάρτηση των πολυωνύμων Legendre

$$\phi(x,t) = (1 - 2xt + t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^\infty P_n(x)t^n.$$

Να δειχθεί ότι

$$(1-x^2)\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial\phi}{\partial x} + t\frac{\partial^2}{\partial t^2}(t\phi) = 0.$$

Αντικαθιστώντας στην πιο πάνω εξίσωση τη σειρά από την γεννήτρια συνάρτηση, να δεχθεί ότι $P_n(x)$ ικανοποιούν τη διαφορική εξίσωση του Legendre

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

Να δειχθεί ότι $P_n(1) = 1$ και ότι

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)\mathrm{d}x = \frac{2\delta_{mn}}{2n+1},$$

όπου δ_{mn} είναι το σύμβολο του Kronecker.

7. (α) Να δειχθεί ότι

$$\mathcal{L}\left\{\cos x + \sin x + \tfrac{1}{2}x\sin x\right\} = \frac{s^3+s^2+2s+1}{(s^2+1)^2}.$$

Να λυθεί ολοκληρωτική εξίσωση

$$\phi(x) = \cos x - x - 2 - \int_0^x (x-t)\phi(t)\mathrm{d}t$$

(i) χρησιμοποιώντας ολοκληρωτικό μετασχηματισμό,
(ii) μετατρέποντας τη σε πρόβλημα αρχικών τιμών.

(β) Αφού βρεθεί η συνάρτηση Green για τον κατάλληλο διαφορικό τελεστή, ή διαφορετικά, να μετασχηματιστεί το πρόβλημα

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + (\lambda x^2 - 16)y = 0, \quad y(0) = y(1) = 0$$

σε Fredholm ολοκληρωτική εξίσωση.

8. Η μετασχηματισμένη Laplace της συνάρτησης $u(x,t)$ ως προς τη μεταβλητή t, ορίζεται ως

$$\mathcal{L}\{u(x,t)\} = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-st}u(x,t)\mathrm{d}t = U(x,s),$$

όπου το x θεωρείται ως παράμετρος. Να δειχθεί ότι

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} = sU(x,s) - u(x,0), \quad \mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\} = s^2U(x,s) - su(x,0) - u_t(x,0) \ \text{ και } \ \mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} = \frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}.$$

Να λυθεί το πρόβλημα συνοριακών και αρχικών τιμών

$$\begin{aligned}
&u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x < 1,\ t > 0,\\
&u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t > 0,\\
&u(x,0) = \sin\pi x,\ u_t(x,0) = -\sin\pi x, \quad 0 < x < 1.
\end{aligned}$$