ΕΞΕΤΑΣΗ 2 - 23/3/2022

---

1. Χρησιμοποιώντας μετασχηματισμένες Laplace να λυθούν τα προβλήματα

(i) $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - 5\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 6y = \mathrm{e}^t, \quad y(0) = y'(0) = 0,$

(ii) $t\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + 2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + ty = 0, \quad \lim\limits_{t\to 0^+} y(t) = 1.$

2. Αν $x \in (-\pi, \pi)$, να δειχθεί ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n} = \frac{x}{2}.$$

Χρησιμοποιώντας την πιο πάνω σχέση να βρεθεί η σειρά Fourier της συνάρτησης $f(x) = x^2$ στο διάστημα $(-\pi, \pi)$. Να γίνει η γραφική παράσταση αυτής της σειράς Fourier στο διάστημα $(-3\pi, 3\pi)$.

Να δειχθεί ότι $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$ και ότι $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

3. (α) Να βρεθεί το συνημιτονικό ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\sin x$.

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\infty}\frac{2-x^2}{4+x^4}\cos ax\mathrm{d}x.$$

(β) Να βρεθεί η συνημιτονική μετασχηματισμένη Fourier της συνάρτησης $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.

Στη συνέχεια να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty}\frac{(1-\alpha^2)\cos(\alpha x)}{(1+\alpha^2)^2}\mathrm{d}\alpha, \quad x \geq 0.$$

4. Χρησιμοποιώντας την γεννήτρια συνάρτηση των πολυωνύμων Legendre $P_n(x)$, να αποδειχθεί ο αναδρομικός τύπος

$$(2n+1)xP_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x).$$

Δίνεται ότι

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1}\delta_{mn},$$

όπου δ_{mn} είναι το σύμβολο του Kronecker. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

(i) $\displaystyle\int_{-1}^{1}xP_n(x)P_m(x)\mathrm{d}x,$ (ii) $\displaystyle\int_{-1}^{1}x^2[P_n(x)]^2\mathrm{d}x.$