ΕΞΕΤΑΣΗ 2 - 26/3/2016

---

1. Αν η σειρά Fourier της συνάρτησης $f(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο διάστημα $(-p,p)$, να αποδειχθεί η ταυτότητα του Parseval,

$$\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}[f(x)]^2 dx = \frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2),$$

με την προϋπόθεση ότι το ολοκλήρωμα υπάρχει.

Να βρεθεί η σειρά ημιτόνων και η σειρά συνημιτόνων της συνάρτησης $f(x)=\pi-x,\ 0\le x\le\pi$.

Να γίνει η γραφική παράσταση των δύο σειρών στο διάστημα $[-3\pi,3\pi]$.

Στη συνέχεια να υπολογιστούν τα αθροίσματα

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \qquad \text{και} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}.$$

2. Να βρεθούν:

(i) το ημιτονικό και συνημιτονικό ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x)=\mathrm{e}^{-x}$.

(ii) η ημιτονική και η συνημιτονική μετασχηματισμένη της συνάρτησης $f(x)=\mathrm{e}^{-x}$.

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos kx}{x^2+1}\mathrm{d}x, \qquad \int_0^{\infty}\frac{x\sin kx}{x^2+1}\mathrm{d}x, \quad k>0.$$

3. Έστω $P_n(x)$ πολυώνυμα Legendre, τα οποία είναι ορθογώνια στο διάστημα $[-1,1]$. Χρησιμοποιώντας την γεννήτρια συνάρτηση, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^{1}[P_n(x)]^2\mathrm{d}x.$$

Χρησιμοποιώντας τον κατάλληλο αναδρομικό τύπο, να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$\text{(i)} \int_{-1}^{1} xP_n(x)P_m(x)\mathrm{d}x, \qquad \text{(ii)} \int_{-1}^{1} x^2[P_n(x)]^2\mathrm{d}x.$$

$[\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\dots\ ]$

4. (α) Υποθέτοντας λύση της μορφής

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^k,$$

να βρεθεί πολυώνυμο που να είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+20y=0.$$

(β) Εφαρμόζοντας τη μέθοδο του Frobenious, να βρεθούν οι χαρακτηριστικές ρίζες για τη διαφορική εξίσωση

$$2x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+(2x^2+x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+(3x-1)y=0.$$