ΕΞΕΤΑΣΗ 1 - 24/2/2018

---

1. (i) Χρησιμοποιώντας μεταβολικό συμβολισμό, ή διαφορετικά, να αποδειχθεί η εξίσωση του Euler για το πρόβλημα

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} f\left(x, y, y'\right) \mathrm{d}x = 0.$$

(ii) Να βρεθεί η καμπύλη $y(x)$ που δίνει ακρότατη τιμή στο ολοκλήρωμα

$$\mathrm{I}[y(x)] = \int_A^B (4\mathrm{cosx} + y'^2 - y^2)\mathrm{d}x,$$

όπου $A(0,0)$ και $B(\pi, 0)$.
(iii) Να βρεθεί η συνάρτηση $y(x)$ που δίνει ακρότατη τιμή στο ολοκλήρωμα

$$\mathrm{I}[y(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(y'^2 + 2xyy'\right) \mathrm{d}x,$$

όπου $y(0) = 0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ και η $y(x)$ είναι υποκείμενη στη συνθήκη

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} y \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - 1.$$

2. Να δειχθεί ότι η εξίσωση του Euler μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\frac{1}{y'}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f - \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) - \frac{\partial f}{\partial x}\right] = 0.$$

Να βρεθεί η απλή μορφή της εξίσωσης του Euler στην περίπτωση όπου $f = f(y, y')$.
Να βρεθεί η εξίσωση της καμπύλης που δίνει ακρότατη τιμή στο ολοκλήρωμα

$$\int_A^B \frac{y'^2}{1+y^2}\mathrm{d}x,$$

όπου $A(0,0)$ και $B(1,2)$.
[**Υπόδειξη**: $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}} = \sinh^{-1} u + c$]

3. Αφού χρησιμοποιηθούν οι κατάλληλες ιδιότητες της μετασχηματισμένης Laplace, να βρεθεί η $\mathcal{L}\{\frac{\sin t}{t}\}$ και στη συνέχεια να δειχθεί ότι

$$\mathcal{L}\{\mathrm{Si}(t)\} = \frac{1}{s}\tan^{-1}\frac{1}{s},$$

όπου $\mathrm{Si}(t)$ είναι το ημιτονικό ολοκλήρωμα.
Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$ty'' + 2y' + ty = 0, \quad \lim_{t\to 0^+} y(t) = 1.$$

[**Υπόδειξη**: $\tan^{-1}\frac{1}{s} = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} s$]

4. (α) Αν η συνάρτηση $f(t)$ είναι τμηματικά συνεχής στο διάστημα $[0, \infty)$, εκθετικής τάξης και περιοδική με περίοδο T, τότε να δειχθεί ότι

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-sT}} \int_0^T \mathrm{e}^{-st} f(t) \mathrm{d}t.$$

(β) Να δειχθεί ότι

$$\mathcal{L}\{\mathrm{e}^{-t} \sin^2 t\} = \frac{2}{(s+1)(s^2+2s+5)}.$$

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} - y = 2(\cos 2t - \sin 2t)\mathrm{e}^{-t}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$